This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

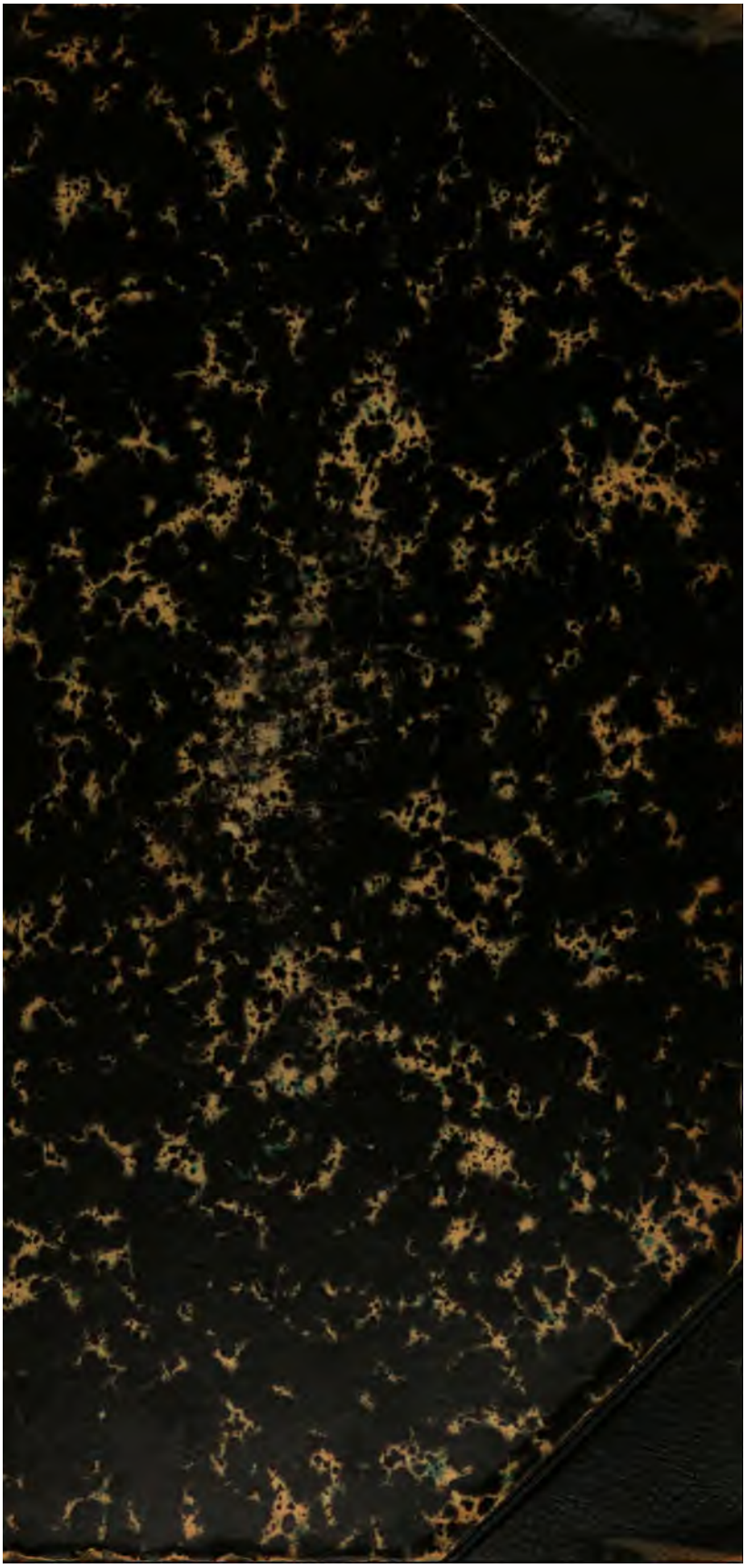
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



L Soc 1726,9

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $20,000, and of its income three quarters shall be spent for books and one quarter be added to the principal.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

MIT 22 FIGUREN IM TEXT UND 2 TAFELN.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1084.5/4

Z Soc 1726.9

Lowell Fund

INHALT.

Seite

Alfred Loewy, Über die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes 1

An die Royal Society in London als leitende Gesellschaft der internationalen Association der Akademieen. Antrag d. Kön. Sächs. Ges. d. Wissenschaften 14

Friedrich Engel, Die höheren Differentialquotienten 17

A. Mayer, Symmetrische Lösung der Aufgabe, die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen 53

Karl Boehm, Zur Integration partieller Differentialgleichungen 63

Hermann Credner, Die vogtländischen Erderschütterungen in dem Zeitraume vom September 1900 bis zum März 1902, insbesondere die Erdbebenschwärme im Frühjahr und Sommer 1901. Mit 2 Kartenskizzen im Texte 74

C. Neumann, Über Metallreflexion und über totale Reflexion. Mit 1 Textfigur 92

Paul Stäckel, Beiträge zur Flächentheorie 101

Thomae, 1. Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte. 2. Projektiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. 3. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung 121

M. Krause, Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen 139

A. Mayer, Über den Zusammenstoſs zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung 208

Heinrich Liebmann, Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie. 244

F. Kirchner, Über beobachtete Absorptions- und Farbenänderungen infolge von Abstandsänderungen der absorbierenden Teilchen. Mit 2 Abbildungen 261

Gerhard Kowalewski, Über das Kroneckersche Integral für die Charakteristik eines Funktionensystems 267

Ch. Riquier, Über Systeme partieller Differentialgleichungen . 272
Franz Etzold, Das Wiechertsche astatische Pendelseismometer der Erdbebenstation Leipzig und die von ihm gelieferten Seismogramme von Fernbeben. Mit 2 Tafeln u. 2 Textfiguren 283
A. Mayer, Nachtrag zu dem Aufsatze: Über den Zusammenstoſs zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung 327
C. Neumann, Beiträge zur analytischen Mechanik. Zweite und dritte Abhandlung. Mit 3 Textfiguren 333
G. Scheffers, Über Loxodromen. 363
Gerhard Kowalewski, Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes 371
Heinrich Liebmann, Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Mit 14 Textfiguren . . 393
Wilhelm His, Zur Vorgeschichte des deutschen Kartells und der internationalen Association der Akademien. (Sonderheft.)

A 302/126.9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

I.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Einzelpreis 1 Mark 20 Pfg.

SITZUNG AM 13. JANUAR 1902.

Vorträge hielten:

Herr FELIX MARCHAND, o. M.: „Ueber das Gehirngewicht des Menschen"; für die Abhandlungen.

Herr ENGEL, o. M., legte eine Arbeit vor von Herrn A. LOEWY in Freiburg i. B. „Ueber die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes."

Alfred Loewy: *Ueber die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes.*

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit den linearen homogenen Differentialgleichungen, die bei der Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreducible Factoren resultiren. Für derartige Fragen ist zuerst die Festlegung eines Rationalitätsbereiches, welcher der Betrachtung zu Grunde liegen soll, erforderlich. Wir denken uns daher einen Bereich von Functionen einer Variablen x gegeben; dieser Bereich soll derartig in sich abgeschlossen sein, dass man die Functionen des Bereiches unbeschränkt unter einander addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren sowie eine jede differentiren kann, und dabei nicht den Bereich verlässt.

Eine lineare homogene Differentialgleichung mit Coefficienten aus dem Bereiche heisst im Anschluss an Herrn FROBENIUS[1]) inbezug auf den Bereich reducibel, wenn sie durch alle Integrale irgend einer ebenfalls linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten auch dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Rationalitätsbereiche angehören, erfüllt wird.

Wird die lineare homogene Differentialgleichung $P = 0$ durch alle Integrale einer anderen linearen homogenen Differential-

1) G. FROBENIUS, Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 76, S. 236. (Ueber den Begriff der Irreductibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen.)

gleichung niedrigerer Ordnung $Q = 0$ befriedigt, so lässt sich die linke Seite von $P = 0$ in die Form

$$P = RQ$$

zerlegen[1]); der als Operationssymbol dienende lineare homogene Differentialausdruck R hat ebenso wie P und Q nur Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche[2]); sind Q $k$ter und P $n$ter Ordnung, so ist

$$R = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung $n - k$ter Ordnung.

Ist $P = RQ$, so kann man stets ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von Integralen von $P = 0$ derartig wählen, dass die ersten k Elemente desselben $y_1, y_2, \cdots y_k$ ein Fundamentalsystem von $Q = 0$ bilden. Wählt man $y_1, y_2, \cdots y_n$ derartig, so transformiren sich $y_1, y_2, \cdots y_k$ bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe[3]) von $P = 0$ nur in lineare homogene Verbindungen ihrer selbst. Umgekehrt, kann man für eine lineare homogene Differentialgleichung $P = 0$ ein derartiges Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von Integralen finden, dass sich bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ k Elemente $y_1, y_2, \cdots y_k$ des Fundamentalsystemes $(k < n)$ nur in lineare homogene Verbindungen ihrer selbst transformiren, so giebt es eine Differentialgleichung $Q = 0$, die $y_1, y_2, \cdots y_k$ zu einem Fundamentalsystem von Integralen besitzt, und P zerfällt in RQ.

---

1) FROBENIUS, a. a. O., S. 259. Vgl. auch L. HEFFTER, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipzig (1894), S. 182 und LUDW. SCHLESINGER, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 84. Leipzig (1895).

2) Alle in der Arbeit verwandten Differentialgleichungen sind *ausnahmslos* linear und homogen und haben Coefficienten aus dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Rationalitätsbereiche.

3) Der Begriff der Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung wird den Herren PICARD und VESSIOT verdankt. E. PICARD, Comptes rendus, April 1883. (Sur les groupes de transformations des équations linéaires.) Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 1887. Traité d'analyse, Bd. III, S. 531. Paris. (1896). E. VESSIOT, Annales de l'école normale, (3) Bd. 9, S. 197 (1892). (Sur l'intégration des équations différentielles linéaires.) Vgl. auch SCHLESINGER, Handbuch, II_1, S. 58 ff. Leipzig. (1897). Die Rationalitätsgruppe ist in dem vorliegenden Aufsatze immer unter Zugrundelegung des für die Betrachtung einmal gewählten Rationalitätsbereiches zu verstehen.

Wir wollen diesem Satze von Herrn Beke[1]) die folgende Fassung geben:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Reducibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$ $n$ter Ordnung, so dass $P \doteq RQ$ wird, wobei Q $k$ter Ordnung $(k < n)$ ist, besteht in der Existenz eines derartigen Fundamentalsystemes $y_1, y_2, \cdots y_n$ von Integralen von $P = 0$, dass die Matrices aller Transformationen, welche $y_1, y_2, \cdots y_n$ bei der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ erleiden, in der Form:

$$\text{(a)} \qquad \begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \hline a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & a_{k+1k+2} & \cdots a_{k+1n} \\ a_{k+21} & a_{k+22} & \cdots & a_{k+2k} & a_{k+2k+1} & & \cdots a_{k+2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & & \cdots a_{nn} \end{array}$$

erscheinen.

Wir nehmen die Rationalitätsgruppe von $P = 0$ so beschaffen an, dass alle ihre Transformationen in der Form (a) darstellbar sind und bezeichnen diese Gruppe mit G; man kann dann aus G eine Gruppe, die wir mit G_1 bezeichnen, absondern, indem man nämlich nur die Transformationen der ersten k Functionen $y_1, y_2, \cdots y_k$ für sich betrachtet. G_1 ist eine mit G isomorphe Gruppe, und G_1 ist offenbar die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung $Q = 0$.

Man kann aber aus der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ noch auf eine zweite Weise eine Gruppe erhalten, nämlich indem man einer jeden Substitution der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ eine Transformation zuordnet, deren Matrix sich aus der Matrix der entsprechenden Substitution von G durch Unterdrücken der ersten k Zeilen und ersten k Colonnen ergiebt, und also von der Form:

---

1) E. Beke, Math. Annalen, Bd. 45, S. 279. (Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen.) Vgl. auch Schlesinger, Handbuch, II_1, S. 106.

$$\begin{matrix} a_{k+1\,k+1} & a_{k+1\,k+2} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ a_{k+2\,k+1} & a_{k+2\,k+2} & \cdots & a_{k+2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n\,k+1} & a_{n\,k+2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

wird. Die Gesamtheit von Substitutionen, welche auf diese Weise allen Substitutionen der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ zugeordnet sind und welche Transformationen in $n - k$ Variablen entsprechen, bilden offenbar auch eine mit G isomorphe Gruppe, diese sei mit G_2 bezeichnet.

Ich behaupte nun, dass G_2 die Rationalitätsgruppe von $R = 0$ ist.

Die lineare Differentialgleichung $R = 0$ hat, da $P = RQ$ ist, die $n - k$ Functionen:

$$Q(y_{k+1}),\ Q(y_{k+2}),\ \cdots\ Q(y_n)$$

zu Integralen, und diese bilden ersichtlich, weil $y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots y_n$ linear unabhängig sind und keine Integrale von $Q = 0$ sind, ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung $R = 0$. Erleidet nun das Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_n$ von $P = 0$ eine Transformation der Rationalitätsgruppe G, welche von der Form (a) ist, so geht $Q(y_{k+1})$ über in:

$$\begin{aligned} &Q(a_{k+11}y_1 + a_{k+12}y_2 + a_{k+13}y_3 + \cdots + a_{k+1k}y_k \\ &\qquad + a_{k+1k+1}y_{k+1} + \cdots + a_{k+1n}y_n) \\ &= a_{k+11}\,Q(y_1) + a_{k+12}\,Q(y_2) + \cdots + a_{k+1k}\,Q(y_k) \\ &\qquad + a_{k+1k+1}\,Q(y_{k+1}) + \cdots + a_{k+1n}\,Q(y_n) \\ &= a_{k+1k+1}\,Q(y_{k+1}) + a_{k+1k+2}\,Q(y_{k+2}) + \cdots + a_{k+1n}\,Q(y_n); \end{aligned}$$

denn es ist $Q(y_1) = Q(y_2) = \cdots = Q(y_k) = 0$.

Durch die Transformationen der Rationalitätsgruppe G von $P = 0$ transformirt sich das Fundamentalsystem:

$$Q(y_{k+1}),\ Q(y_{k+2}),\ \cdots\ Q(y_n)$$

von $R = 0$ vermittelst der Substitutionen, deren Matrices aus den entsprechenden von G entstehen, wenn man in diesen die ersten k Zeilen und k Colonnen fortlässt, d. h. also das Fundamentalsystem von $R = 0$ erleidet die Transformationen der Gruppe G_2.

Nach den Untersuchungen der Herren PICARD und VESSIOT über die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung gilt bekanntlich der folgende Satz: Erleiden die In-

tegrale eines Fundamentalsystemes einer linearen homogenen Differentialgleichung eine lineare homogene Gruppe von Transformationen, welche eine jede beliebige rationale Differentialfunction des Fundamentalsystems, die einen dem Rationalitätsbereiche angehörigen Werth hat, numerisch ungeändert lassen, und hat ferner eine jede rationale Differentialfunction des Fundamentalsystemes, die bei sämtlichen Transformationen der Gruppe numerisch ungeändert bleibt, einen dem Rationalitätsbereiche angehörigen Werth, so ist die gegebene Gruppe die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung.

Aus dem angeführten Satze folgt, dass G_2 die Rationalitätsgruppe von $R = 0$ ist. Hat man nämlich irgend eine rationale Differentialfunction von $Q(y_{k+1})$, $Q(y_{k+2})$, $\cdots$ $Q(y_n)$, die bei sämtlichen linearen Transformationen der Gruppe G_2 numerisch ungeändert bleibt, so kann man diese Differentialfunction auch als eine solche von $y_1, y_2, \cdots y_n$ ansehen; sie bleibt dann bei allen Transformationen von G ungeändert und ist folglich, da G die Rationalitätsgruppe von $P = 0$ ist, eine Function des Rationalitätsbereiches. Ist umgekehrt eine rationale Differentialfunction von $Q(y_{k+1})$, $Q(y_{k+2})$, $\cdots$ $Q(y_n)$ vorgelegt, die einen dem Rationalitätsbereiche angehörigen Werth hat, so bleibt dieselbe als Function von $y_1, y_2, \cdots y_n$ bei sämtlichen linearen Transformationen der Rationalitätsgruppe G ungeändert; da aber den Transformationen der Gruppe G für $y_1, y_2, \cdots y_n$ die Transformationen der Gruppe G_2 für $Q(y_{k+1})$, $Q(y_{k+2})$, $\cdots$ $Q(y_n)$ entsprechen, so bleibt die Function auch bei G_2 ungeändert. Mithin ist G_2 die Rationalitätsgruppe von $R = 0$.

Fassen wir kurz zusammen, so haben wir den Satz bewiesen:

I. *Ist P zerlegbar in RQ, so ist bei geeigneter Wahl des Fundamentalsystemes von Integralen von $P = 0$ die Rationalitätsgruppe von $P = 0$ von der Form:*

$$\left|\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline G_{21} & G_2 \end{array}\right|;$$

dabei bedeuten G_1 die Gesamtheit der Matrices der Rationalitätsgruppe von $Q = 0$, G_2 die Gesamtheit der Matrices der Rationalitätsgruppe von $R = 0$, G_{21} eine Gesamtheit von Matrices, die soviel Colonnen wie G_1, soviel Zeilen wie G_2 besitzen. Die Rationalitätsgruppen der Factoren sind also Bestandtheile der Rationalitätsgruppe von $P = 0$.

Herr E. LANDAU[1]) hat nun in dem eben erschienenen Hefte des Journals f. d. r. u. ang. Math. den folgenden Satz bewiesen:

Bei allen Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreducible Factoren ist die Anzahl der Factoren dieselbe, und es sind die Ordnungen der Factoren, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben. Dieser Satz ist, wenn man die einzelnen Factoren gleich Null setzt und die so entstehenden linearen homogenen irreduciblen Differentialgleichungen auffasst, in einem viel allgemeineren Satze enthalten, nämlich in folgendem:

II. *Bei allen Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreducible Factoren lassen die Factoren sich eineindeutig so zuordnen, dass die zugeordneten Factoren, als lineare homogene Differentialgleichungen aufgefasst, dieselbe Rationalitätsgruppe besitzen.*

Es sei P in irreducible Factoren:

$$(1) \qquad P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} Q_{\lambda-2} \cdots Q_2 Q_1$$

zerlegt; ist $\mathfrak{a}_{ii}$ die Rationalitätsgruppe von $Q_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots \lambda)$, so folgt durch wiederholte Anwendung des Satzes I, dass die Rationalitätsgruppe von $P = 0$ die Form:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mathfrak{a}_{31} & \mathfrak{a}_{32} & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & 0 & 0 \\
\mathfrak{a}_{\lambda-11} & \mathfrak{a}_{\lambda-12} & \mathfrak{a}_{\lambda-13} & \mathfrak{a}_{\lambda-14} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda-1\lambda-1} & 0 \\
\mathfrak{a}_{\lambda 1} & \mathfrak{a}_{\lambda 2} & \mathfrak{a}_{\lambda 3} & \mathfrak{a}_{\lambda 4} & \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda-1} & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}
\end{array}$$

hat. Dabei bedeutet $\mathfrak{a}_{ki}$ $(k > i)$ eine Gesamtheit von Matrices mit f_k Zeilen und f_i Colonnen, wenn die Matrices von $\mathfrak{a}_{ii}$ f_i Zeilen und f_i Colonnen besitzen.

Da die Zerlegung von $P = 0$ irreducibel sein soll, so kann sich auch nicht die Gruppe $\mathfrak{a}_{ii}$ durch irgend welche andere Wahl des Fundamentalsystemes von $Q_i = 0$ in die Form

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{r} & 0 \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t}, \end{array}$$

---

1) E. LANDAU, Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 124, S. 115. (Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren.)

wo r weniger als f_i Zeilen und f_i Colonnen hat, bringen lassen, denn sonst wäre nach dem Satze von Herrn Beke gegen die Voraussetzung $Q_i = 0$ reducibel.

Es sei

$$P = K_\mu K_{\mu-1} \cdots K_2 K_1 \tag{2}$$

eine zweite irreducible Zerlegung von $P = 0$; ist $\mathfrak{b}_{ii}$ die Rationalitätsgruppe von $K_i = 0$ $(i = 1, 2, \cdots \mu)$, so wird die Rationalitätsgruppe von $P = 0$ von der Form:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{b}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mathfrak{b}_{21} & \mathfrak{b}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\mathfrak{b}_{31} & \mathfrak{b}_{32} & \mathfrak{b}_{33} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \\
\mathfrak{b}_{\mu-11} & \mathfrak{b}_{\mu-12} & \mathfrak{b}_{\mu-13} & \cdots & \mathfrak{b}_{\mu-1\mu-1} & 0 \\
\mathfrak{b}_{\mu 1} & \mathfrak{b}_{\mu 2} & \mathfrak{b}_{\mu 3} & \cdots & \mathfrak{b}_{\mu\mu-1} & \mathfrak{b}_{\mu\mu}.
\end{array}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{b}_{ki}$ $(k > i)$ eine Gesamtheit von Matrices von g_k Zeilen und g_i Colonnen, wenn die Matrices von $\mathfrak{b}_{ii}$ g_i Zeilen und g_i Colonnen besitzen.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die angegebenen zwei Darstellungen der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ durch eine lineare Transformation in n Variablen in einander übergeführt werden können; diese zwei Darstellungen entsprechen eben zwei verschiedenen Wahlen des Fundamentalsystemes von Integralen von $P = 0$. Die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung ist ja überhaupt nicht vollkommen bestimmt; hat man die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung in einer gewissen Form dargestellt, so kann man jede mit dieser Darstellung innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe gleichberechtigte Untergruppe auch als Darstellung der Rationalitätsgruppe ansehen[1]); es entspricht dies eben den verschiedenen Möglichkeiten, ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung zu wählen.

Wenn unser Satz II richtig ist, so müssen sich die Gruppen:

$$\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$$

und

$$\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots \mathfrak{b}_{\mu\mu}$$

1) Vgl. etwa L. Schlesinger, Handbuch, II_1, S. 72

eineindeutig einander so zuordnen lassen, dass jedem $\mathfrak{b}_{kk}$ ein $\mathfrak{a}_{ii}$ entspricht, $f_i = g_k$ wird und die zwei zugeordneten Gruppen innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe von $f_i = g_k$ Variablen gleichberechtigt sind. Sowohl $\mathfrak{a}_{ii}$ wie $\mathfrak{b}_{kk}$ sind dann zwei Darstellungen für die Rationalitätsgruppe einer jeden der zwei Gleichungen

$$Q_i = 0 \quad \text{und} \quad K_k = 0,$$

und durch geeignete Wahl der Fundamentalsysteme von $Q_i = 0$ und $K_k = 0$ kann man stets erzielen, dass $\mathfrak{a}_{ii}$ und $\mathfrak{b}_{kk}$ völlig identisch werden.

Unser Satz II gilt sicher für $n = 1$; denn für $n = 1$ ist P nothwendig irreducibel. Wir können daher das Theorem für alle Gleichungen n — 1ter Ordnung als bewiesen ansehen und brauchen es nur noch für die Ordnung n zu beweisen.

Das angewandte Beweisverfahren ist das analoge wie bei Herrn LANDAU[1]), nur führe ich die Rationalitätsgruppe, welche bei Herrn LANDAU nicht verwandt wird, ein.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ ein Integral gemeinsam haben oder nicht.

I. Haben $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ ein Integral gemeinsam, so stimmen wegen der Irreducibilität K_1 und Q_1 bis auf einen nur von x abhängigen Factor überein; es wird:

$$K_1 = f(x) \cdot Q_1.$$

α) Wenn $f(x) = 1$, also $K_1 = Q_1$, so folgt aus (1) und (2), dass man einen Differentialausdruck niedrigerer Ordnung auf zwei Arten:

$$K_\mu K_{\mu-1} \cdots K_2 = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \cdots Q_2$$

zerlegt hat; hierfür ist aber der Satz als bewiesen angenommen. Mithin ist für den Fall α) unser Theorem richtig.

β) Ist $f(x)$ nicht gleich 1, so wird:

$$(3) \quad P = K_\mu K_{\mu-1} \cdots K_3 K_2 K_1 = K_\mu K_{\mu-1} \cdots K_3 K_2 (f Q_1).$$

Man führe in $K_2(fQ_1)$ die im Symbol K_2 enthaltene Differentiationsoperation aus und ordne nach Ableitungen von Q_1, dann wird:

$$(4) \quad K_2(fQ_1) = RQ_1.$$

---

1) Zur Erleichterung des Vergleiches mit der Arbeit von Herrn LANDAU habe ich dieselben Bezeichnungen wie Herr LANDAU verwandt.

Aus dieser Gleichung folgt: Hat man ein Fundamentalsystem von Integralen von $R = 0$ und multiplicirt die Elemente des Fundamentalsystemes mit $f(x)$, so gewinnt man ein Fundamentalsystem von Integralen von $K_2 = 0$.

Hieraus folgt leicht, dass die zwei Gleichungen $K_2 = 0$ und $R = 0$ dieselbe Rationalitätsgruppe haben; zwei entsprechenden Fundamentalsystemen der zwei Gleichungen, deren Elemente sich nur durch den Factor $f(x)$ unterscheiden, entspricht übrigens dieselbe Darstellung der Rationalitätsgruppe. Mithin muss wegen der Irreducibilität von $K_2 = 0$ nach dem Beke'schen Satze auch $R = 0$ irreducibel sein.

Infolge von (3) und (4) gewinnt man daher die neue Zerlegung:

$$P = K_\mu \cdots K_3 R Q_1 \tag{5}$$

in irreducible Factoren. Aus (5) und (1) schliesst man:

$$K_\mu \cdots K_3 R = Q_\lambda \cdots Q_3 Q_2.$$

Jetzt haben wir einen Differentialausdruck niedrigerer Ordnung auf zwei Arten zerlegt; für diesen haben wir den Satz als bewiesen angenommen. Mithin lassen sich die Gleichungen:

$$K_\mu = 0,\ K_{\mu-1} = 0,\ \cdots\ K_3 = 0,\ R = 0$$

und

$$Q_\lambda = 0,\ Q_{\lambda-1} = 0,\ \cdots\ Q_3 = 0,\ Q_2 = 0$$

in gewisser Weise derartig einander eineindeutig zuordnen, dass die zugeordneten immer dieselbe Rationalitätsgruppe besitzen. Wie wir bewiesen, haben $K_2 = 0$ und $R = 0$ dieselbe Rationalitätsgruppe; $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$, welche dieselben Integrale besitzen, haben natürlich dieselbe Rationalitätsgruppe. Daher ist im Falle (β) das Theorem völlig bewiesen; man kann also die Gleichungen:

$$K_\mu = 0,\ K_{\mu-1} = 0,\ \cdots\ K_2 = 0,\ K_1 = 0$$

und

$$Q_\lambda = 0,\ Q_{\lambda-1} = 0,\ \cdots\ Q_2 = 0,\ Q_1 = 0$$

einander in einer gewissen Reihenfolge eineindeutig so zuordnen, dass die zugeordneten Gleichungen stets dieselbe Rationalitätsgruppe haben. Im besonderen ist $\lambda = \mu$, und die zugeordneten Gleichungen, die dieselbe Rationalitätsgruppe besitzen, haben dieselben Ordnungen. (Theorem von Herrn Landau.)

II. Mögen $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ kein Integral gemein haben. Wir bezeichnen mit $y_1, y_2, \cdots y_f$ ein Fundamentalsystem von

Integralen von $Q_1 = 0$, mit $z_1, z_2, \cdots z_{g_1}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $K_1 = 0$. Es existirt dann eine lineare homogene Differentialgleichung $U = 0$, welche nur Coefficienten aus dem Rationalitätsbereiche hat, bis auf einen nur von x abhängigen Factor vollständig bestimmt ist und die $f_1 + g_1$ Functionen $y_1, y_2, \cdots y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots z_{g_1}$ zu Integralen besitzt.[1]) U ist einerseits durch K_1, andererseits durch Q_1 theilbar; daher ergiebt sich:

$$U = AQ_1$$
$$U = BK_1.$$

Ersichtlich bilden die g_1 Functionen:

$$Q_1(z_1),\ Q_1(z_2),\ \cdots\ Q_1(z_{g_1})$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von $A = 0$. Mithin hat, wie aus den Betrachtungen, die uns zu dem Satze I führten, hervorgeht, $A = 0$ dieselbe Rationalitätsgruppe wie die Gleichung $K_1 = 0$, welche $z_1, z_2, \cdots z_{g_1}$ zu einem Fundamentalsysteme von Integralen hat. Da $A = 0$ und $K_1 = 0$ die gleiche Rationalitätsgruppe haben, so folgt wegen der Irreducibilität von $K_1 = 0$ nach dem BEKE'schen Satze die Irreducibilität von $A = 0$.

Die Gleichung $B = 0$ hat die f_1 Functionen

$$K_1(y_1),\ K_1(y_2),\ \cdots\ K_1(y_{f_1})$$

zu einem Fundamentalsysteme von Integralen. $Q_1 = 0$ besitzt $y_1, y_2, \cdots y_{f_1}$ zu einem Fundamentalsysteme von Integralen. Mithin haben die zwei Gleichungen $B = 0$ und $Q_1 = 0$ dieselbe Rationalitätsgruppe und sind daher, da $Q_1 = 0$ irreducibel ist, beide irreducibel.

Da der gegebene Differentialausdruck P durch K_1 und Q_1 theilbar ist, so wird er auch durch U theilbar sein. Mithin wird:

$$P = VU.$$

Zerlegt man V in irreducible Factoren

$$V = L_\nu L_{\nu-1} \cdots L_1,$$

so gewinnt man folgende zwei weitere Zerlegungen von P in irreducible Factoren:

---

1) Mit der Aufstellung dieser schon von BRASSINNE untersuchten Differentialgleichung hat sich auch Herr BEKE beschäftigt. (Die symmetrischen Functionen bei den linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Ann. Bd. 45, S. 298.)

$$P = L_\nu L_{\nu-1} \cdots L_1 A Q_1, \tag{6}$$

$$P = L_\nu L_{\nu-1} \cdots L_1 B K_1. \tag{7}$$

Betrachtet man die aus (6) entstehenden Gleichungen:

$$L_\nu = 0,\ L_{\nu-1} = 0,\ \cdots\ L_1 = 0,\ A = 0,\ Q_1 = 0$$

und ordnet ihnen die aus (7) entstehenden Gleichungen in der folgenden Reihenfolge:

$$L_\nu = 0,\ L_{\nu-1} = 0,\ \cdots\ L_1 = 0,\ K_1 = 0,\ B = 0$$

zu, so haben die eindeutig einander zugeordneten Gleichungen immer dieselben Rationalitätsgruppen; denn für die entsprechenden Gleichungen $A = 0$ und $K_1 = 0$ sowie $B = 0$ und $Q_1 = 0$ haben wir dies soeben nachgewiesen; die anderen Gleichungen der zwei Reihen sind identisch.

Die Zerlegungen (6) und (1) schliessen mit demselben Factor Q_1; daher lassen sich nach I α die durch Nullsetzen der Factoren der Zerlegung (6) entstehenden Gleichungen den Gleichungen, die durch Nullsetzen der Factoren der Zerlegung (1) entstehen, in gewisser Reihenfolge eineindeutig zuordnen, so dass zwei zugeordnete Gleichungen immer dieselbe Rationalitätsgruppe haben. Hieraus aber folgt wegen des Voraufgegangenen eine eineindeutige Zuordnung im verlangten Sinne zwischen den aus (7) und (1) hervorgehenden Gleichungen.

Die Gleichungen, welche aus (7) und (2) resultiren, lassen sich wegen I α, da beide Zerlegungen mit K_1 schliessen, eineindeutig zuordnen, so dass zwei zugeordnete Gleichungen immer dieselbe Rationalitätsgruppe besitzen. Wegen der bereits gefundenen eineindeutigen Zuordnung der aus (1) und (7) hervorgehenden Gleichungen folgt mithin, dass die Gleichungen, welche durch Nullsetzen der Factoren der Zerlegungen (1) und (2) resultiren, in gewisser Reihenfolge einander eineindeutig zugeordnet werden können, so dass zwei zugeordnete Gleichungen immer dieselbe Rationalitätsgruppe haben. Hiermit ist der Satz II bewiesen.

Aus der Eineindeutigkeit der Zuordnung und der Uebereinstimmung der Rationalitätsgruppe zweier zugeordneter Gleichungen folgt unmittelbar als Corollar der citirte Satz von Herrn Landau über die gleiche Anzahl der Factoren bei jeder Zerlegung und die Uebereinstimmung der Ordnungen der Factoren bis auf die Reihenfolge.

Herr LANDAU weist am Schlusse seines Aufsatzes auf die Verwandtschaft des angewandten Beweisverfahrens mit dem für den C. JORDAN'schen Satz über die Compositionsreihe einer endlichen Gruppe und den analogen, von LIE gefundenen Satz für continuirliche Gruppen hin. Durch dasselbe Beweisverfahren zeigt man auch die Sätze über die lückenlose Hauptreihe der Zusammensetzung einer endlichen Gruppe[1]) sowie über die lückenlose Reihe characteristischer Untergruppen einer endlichen discreten Gruppe.[2]) Da die Analoga dieser zuletzt erwähnten Sätze für *endliche continuirliche Gruppen* noch nicht veröffentlicht sind, so soll dies anschliessend an das Voraufgehende geschehen; diese Sätze sind mir übrigens seit einigen Jahren bekannt.

Es sei G eine $r$gliedrige continuirliche Gruppe und:

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{k-1},\ G_k,\ \cdots$$

eine Reihe von continuirlichen endlichen Untergruppen von G, so dass jedes G_k invariant in G ist, ferner sei die Reihe lückenlos, d. h. man kann keine weiteren Untergruppen in die Reihe einschieben, ohne dass die Reihe ihre Eigenschaft verliert. Eine derartige Reihe heisse analog wie bei endlichen discreten Gruppen eine *Hauptreihe der Zusammensetzung.* Dann bestimmen G_{k-1} und G_k eine mit G_{k-1} meroedrisch isomorphe Gruppe $\mathfrak{E}_k (k = 1, 2, \cdots)$, die dadurch erhalten wird, dass man in den Relationen für die Zusammensetzung von G_{k-1} alle infinitesimalen Transformationen der auch in G_{k-1} invarianten Untergruppe G_k Null setzt. Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Gruppenreihe: $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \cdots$, *wenn man von der Reihenfolge absieht, für jede Hauptreihe der Zusammensetzung dieselbe.*[3])

In Analogie mit der von Herrn FROBENIUS[4]) in die Theorie der endlichen discreten Gruppen eingeführten Bezeichnung „characteristische Untergruppe" heisse G_{k-1} eine *characteristische Untergruppe* der endlichen continuirlichen Gruppe G, wenn G_{k-1} nicht

1) C. JORDAN, traité des substitutions et des équations algébriques, S. 663. Paris. (1870). O. HÖLDER, Math. Annalen, Bd. 34, S. 38. Vgl. auch BURNSIDE, theory of groups of finite order, S. 123. Cambridge. (1897).

2) G. FROBENIUS, Berichte der Berliner Academie, Jahrg. 1895, S. 1027.

3) Vgl. den Satz von Herrn ENGEL in LIE-ENGEL, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, S. 765. Leipzig. 1893.

4) Berliner Berichte, Jahrg. 1895, S. 183.

nur in G selbst, sondern auch in jeder endlichen continuirlichen Gruppe, in der G invariant ist, ebenfalls invariant ist. Z. B. ist eine jede derivirte Gruppe einer endlichen continuirlichen Gruppe eine characteristische Untergruppe derselben.[1])

Ist

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{k-1},\ G_k,\ \cdots^{2})$$

eine lückenlose Reihe characteristischer continuirlicher Untergruppen einer endlichen continuirlichen Gruppe G und bildet man für diese die Gruppen $\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{E}_2,\ \cdots\cdots$, *so ist die Reihe* $\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{E}_2,\ \cdots$ *für eine jede lückenlose Reihe characteristischer Untergruppen der endlichen continuirlichen Gruppe* G, *wenn man von der Reihenfolge absieht, genau dieselbe.*

---

1) Vgl. LIE-ENGEL, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, S. 679.

2) Es braucht wohl als selbstverständlich kaum gesagt zu werden, dass die Reihe:

$$G,\ G_1,\ G_2,\ \cdots\ G_{k-1},\ G_k,\ \cdots$$

in beiden besprochenen Fällen mit der identischen Transformation welche die letzte Gruppe der Reihe ist, endet.

Druckfertig erklärt 10. II. 1902.]

SITZUNG AM 3. FEBRUAR 1902.

Herr His verliest den durch Vermittelung der Royal Society an die internationale Association der Akademien zu stellenden Antrag der Classe.

Einen Vortrag hielt:

Herr Friedrich Engel o. M. über die höheren Differentialquotienten.

An die Royal Society in London als leitende Gesellschaft der internationalen Association der Akademien. Antrag der Kön. sächs. Ges. d. Wissenschaften. (Beschlossen in der Sitzung vom 3. Februar 1902.)

Bei der vom 16. bis 20. April 1901 in Paris tagenden internationalen Association der Akademien hatte die Kön. sächs. Ges. d. Wissenschaften folgenden Antrag eingereicht: *„Die internationale Association der Akademien möge eine Fachcommission aufstellen zur Berathung der Mittel und Wege, wie auf den Gebieten, einestheils der menschlichen und thierischen Entwicklungsgeschichte, anderntheils der Hirnanatomie eine nach einheitlichen Grundsätzen erfolgende Sammlung, Verarbeitung und allgemeine Nutzbarmachung von sicherem Beobachtungsmaterial erreicht werden kann."* Im Verlauf der Discussion dieses Antrages hat es sich als wünschbar herausgestellt, die in demselben gestellten Aufgaben zu theilen und nur die auf Gehirnforschung bezüglichen als international zu behandelnde beizubehalten. Der von der Association gefasste Beschluss lautet nunmehr:

1) *Die Berathung der auf menschliche und thierische Entwicklungsgeschichte bezüglichen Abschnitte des Antrages ist vorerst den betreffenden Fachvereinen (den anatomischen Gesellschaften) zu überlassen.*

2) *Dagegen setzt die internationale Association der Akademien eine Specialcommission nieder, die eine nach einheitlichen Grundsätzen erfolgende Durchforschung, Sammlung und allgemeine Nutzbarmachung des auf Gehirnanatomie bezüglichen Materiales zu berathen hat. Die Commission hat insbesondere die Schaffung eines*

internationalen Systemes von Centralinstituten in Erwägung zu ziehen, in denen die Methoden der Forschung entwickelt, das vorhandene Beobachtungsmaterial aufgespeichert und der allgemeinen Benutzung der dabei interessirten Gelehrten zugänglich gemacht wird.[1])

Die Ernennung der in diesem Beschluss vorgesehenen Commission ist bei der Pariser Generalversammlung nicht mehr erfolgt und laut § 10 der Statuten fällt sie nunmehr dem Comité der Association zu.

In die Commission dürfen nach dem Zusatzreglement[2]) auch solche Mitglieder gewählt werden, die den Akademien nicht angehören, die Commission hat in ihrer ersten Versammlung ihr eigenes Reglement aufzustellen. Die Kön. sächs. Ges. d. Wissensch. beantragt beim Comité der Association die endgültige Ernennung der bei der Pariser Generalversammlung beschlossenen Commission, und sie begleitet ihren Antrag mit folgenden Erwägungen: Es erscheint zunächst angemessen, die Commission aus Mitgliedern der Akademien zusammenzusetzen, da sich bei den Pariser Verhandlungen gezeigt hat, dass das Interesse für die aufgeworfenen Fragen bei den anwesenden Delegirten ein sehr vielseitiges war. Die verschiedenartigen Seiten der zu berathenden Frage kommen in einer grösseren Commission am besten zur Geltung. Eine solche wird auch im Stande sein, den Rath solcher Gelehrten einzuholen, die den Akademien nicht angehören. Für genauere Durchführung der aufzustellenden Pläne wird die Commission am besten einen kleineren Executivausschuss niedersetzen.

Sachliche Gründe sprechen übrigens dafür, dass die nationalen Gesichtspunkte bei der Wahl der Commissionsmitglieder in zweite Linie treten und dass es dem Comité überlassen bleiben

---

1) Association internationale des Académies. Première assemblée générale. Compte rendu. Paris, Gauthier-Villars 1901. S. 46.

l'Association nommera une commission spéciale ayant la mission de discuter les moyens de faire avancer les études en commun sur l'anatomie du cerveau.

Elle engagera cette commission à discuter la formation d'un système international d'établissements qui soient destinés à développer les méthodes de recherches, à rassembler d'après des principes uniformes le matériel d'observation et à mettre ce dernier à la portée des savants qui pourraient en avoir besoin.

2) Compte rendu S. 63.

muss, aus einzelnen Akademien mehrere geeignet erscheinende Mitglieder zu ernennen.

Unter den Akademikern der verschiedenen Nationalitäten glauben wir bei folgenden Herren Interesse für die Sache voraussetzen zu dürfen:

Cunningham Ehlers, Flechsig, Ferrier, Sir Michael Foster, Giard, Golgi, Guldberg, Heger, His, Horsley, von Kölliker, von Kupffer, Ray Lankester, Lannelongue, Lenhossek, Mall, Minot, Mosso, H. Munk, Perrier, Retzius, Sherrington, Toldt, Sir William Turner, Waldeyer.

Indem wir der Royal Society als der leitenden Akademie den Wunsch aussprechen, sie möge die zur Ernennung einer Commission nöthigen Schritte einleiten, erlauben wir uns darauf hinzuweisen, dass der Termin der nächsten, in London abzuhaltenden Sitzung des Comités der Association zugleich der zweckmässigste Zeitpunkt zur Einberufung einer Specialcommission sein wird.

Druckfertig erklärt 21. II. 1902.]

Friedrich Engel: *Die höheren Differentialquotienten.*

Bei jeder Anwendung der Analysis auf die Geometrie macht man die Erfahrung, dass die analytische Darstellung der geometrischen Begriffe hie und da versagt, dass sich ihr einzelne Fälle dieser Begriffe entziehen. Man muss darin stets eine Aufforderung erblicken, den analytischen Apparat so zu vervollkommnen, dass er auch alle besondern Fälle mit umfasst.

Ein allgemein bekanntes Beispiel eines solchen analytischen Apparates besitzen wir in den homogenen Koordinaten, ohne die eine befriedigende analytische Behandlung der projektiven Geometrie unmöglich ist. Ein anderes sind die CLEBSCHischen Konnexkoordinaten, mit Hülfe deren man bei algebraischen Kurven und Flächen für die geometrischen Begriffe Tangente und Tangentialebene ein analytisches Aequivalent aufstellen kann, das niemals versagt. Wendet man diese Konnexkoordinaten auf die von LIE geschaffenen Begriffe: Element erster Ordnung, vereinigte Lage und Verein von Elementen an, durch deren Einführung die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erst zu einer wirklich vollkommenen Theorie geworden ist, so erhält man den geeignetsten analytischen Apparat zur Behandlung der algebraischen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Einen ähnlichen analytischen Apparat für die algebraischen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung zu schaffen, hatte F. KLEIN schon Anfang der siebziger Jahre versucht, aber ohne zu einem befriedigenden Ergebnisse zu gelangen. Er theilte mir das 1884 mit, und seitdem habe ich diese Frage niemals ganz aus den Augen verloren. Im Jahre 1893 gelang es mir, sie für projektive Räume in einer zwar theoretisch vollkommenen, aber leider praktisch nicht verwendbaren Weise zu beantworten (s. meine Note: Die höheren Differentialquotienten, Leipziger Be-

richte von 1893, S. 468—476). Ich zeigte damals, dass man die ∞^{n+2} Elemente n-ter Ordnung der projektiven Ebene eindeutig umkehrbar auf die Punkte einer krummen $(n+2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einem ebenen Raume von geeigneter Dimensionenzahl abbilden kann derart, dass kein Element verloren geht. Ferner gab ich eine Abbildung derselben Art für die Elemente zweiter Ordnung des Raumes, die unmittelbar auf die Elemente zweiter Ordnung eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen übertragbar war, und es lag auf der Hand, dass auf diesem Wege auch die Elemente dritter und höherer Ordnung zugänglich werden mussten.

Praktische Verwendung konnten freilich diese meine Abbildungen nicht finden, denn die Dimensionenzahlen der benutzten ebenen Räume fielen schon für die Elemente höherer Ordnung der Ebene erschreckend gross aus, und die Mannigfaltigkeiten, auf deren Punkte ich die Elemente abbildete, waren als Schnitte einer kaum übersehbaren Zahl von Mannigfaltigkeiten zweiten Grades definirt. Ich sah wohl ein, woher dieser Uebelstand stammte: ich hatte mich darauf versteift, die Elemente höherer Ordnung durch die Punkte einer Punktmannigfaltigkeit darzustellen, während doch die Elemente einer bestimmten Ordnung eine Mannigfaltigkeit bilden, die selbständige Existenzberechtigung hat und die nicht ohne einen gewissen Zwang in die Form einer Punktmannigfaltigkeit gepresst werden kann. Auch war ich mir bewusst, dass meine Elementkoordinaten zwar theoretisch für die Elemente beliebig hoher Ordnung dasselbe leisteten, was die Konnexkoordinaten für die Elemente erster Ordnung leisteten, dass sie aber keine Erweiterung der Konnexkoordinaten auf die Elemente höherer Ordnung darstellten, denn schon bei den Elementen erster Ordnung hatte ich die CLEBSCHischen Konnexkoordinaten durch andere Elementkoordinaten ersetzt, die mir eine von LIE gegebene Abbildung der Elemente erster Ordnung auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit in einem höheren ebenen Raume lieferte. Der Vortheil, den ich dabei erreichte, dass ich als Elementkoordinaten lauter gleichberechtigte homogene Veränderliche bekam, während man bei den Konnexkoordinaten zwei Reihen von Veränderlichen braucht, die x_i und die u_i, wurde durch die grosse Zahl der Veränderlichen mehr als aufgehoben.

Meine öfters wiederholten Versuche, eine wirkliche Erweiterung der Konnexkoordinaten zu finden, führten nicht zum Ziele,

da theilte mir Study Anfang 1901 eine analytische Darstellung für die Elemente zweiter Ordnung der Ebene mit, zu der er auf ganz anderem Wege gekommen war. Die Elementkoordinaten, die er mir damals angab, waren so beschaffen, dass zu jeder Geraden und ebenso zu jedem Punkte nur ein Werthsystem von solchen Koordinaten gehörte, dass also jeder Geraden und ebenso jedem Punkte nur ein Element zweiter Ordnung zugeordnet wurde. Für mich hatte das etwas Störendes, da ich die ganze Frage im Sinne Lies vom Standpunkte der Berührungstransformationen aus betrachtete und daher verlangen musste, dass zu jedem der ∞^1 Elemente erster Ordnung einer Geraden oder eines Punktes ein besonderes Element zweiter Ordnung gehöre. Diese Forderung konnte ich um so weniger fallen lassen, als ich die Theorie der Elemente höherer Ordnung auch auf das Studium der singulären Stellen der algebraischen Kurven anwenden wollte; bei der Study'schen Darstellung würden aber zum Beispiel zwei Kurven, die zwei verschiedene Punkte zu Wendepunkten, aber in diesen Wendepunkten dieselbe Gerade zur Tangente haben, ein Element zweiter Ordnung gemein haben.

Es gelang mir nun sehr bald, eine Darstellung der Elemente zweiter Ordnung der Ebene zu finden, bei der wirklich jeder Geraden und ebenso jedem Punkte ∞^1 Elemente zweiter Ordnung zugeordnet werden. Auch gelang es mir, für die Elemente zweiter Ordnung im Raume dasselbe zu leisten. Von Study erfuhr ich nachher, dass er die betreffenden Koordinaten für die Elemente zweiter Ordnung der Ebene auch schon gehabt hatte, während dagegen meine Koordinaten für die Elemente zweiter Ordnung des Raumes auch für ihn neu waren, da die Uebertragung seiner Formeln auf den Raum nur eine specielle, wenn auch sehr merkwürdige Theorie liefert, die sich auf die Krümmung der Flächen und auf die Torsion der Raumkurven bezieht, nicht aber die allgemeine Theorie der Elemente zweiter Ordnung.

Auf meinen Wunsch hat dann Study seine Untersuchungen über die Elemente zweiter Ordnung der Ebene ausführlich dargestellt („Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie", Leipz. Ber. 1901, S. 338—403). Ich könnte daher, soweit es sich um die Elemente zweiter Ordnung der Ebene handelt, auf Studys Arbeit verweisen, will aber doch meine Ableitung der betreffenden Elementkoordinaten mittheilen, denn ich glaube, dass sie auch jetzt noch selbständiges Interesse hat, zumal da das allgemeine Princip, auf dem sie beruht, auch auf die

Elemente höherer Ordnung anwendbar bleibt. Sodann werde ich in aller Kürze meine neuen Koordinaten für die Elemente zweiter Ordnung des Raumes entwickeln; ausführliche Anwendungen verspare ich mir auf eine andre Gelegenheit.[1])

§ 1.

Die Elemente höherer Ordnung in der Ebene.

Ein Element erster Ordnung x, y, y' der Ebene fassen wir mit LIE auf als den Inbegriff des Punktes x, y und der hindurchgehenden Geraden: $\eta - y - y'(\xi - x) = 0$. Indem wir nun mit LIE auch umgekehrt jede Figur, die aus einem Punkte und aus einer hindurchgehenden Geraden besteht, als ein Element erster Ordnung auffassen und diese Figur durch die homogenen Koordinaten ihres Punktes und ihrer Geraden bestimmen, erhalten wir die bekannte allgemein gültige Darstellung der Elemente erster Ordnung durch die CLEBSCHischen Konnexkoordinaten.

Die gewöhnlichen Koordinaten x, y, y', y'' eines Elementes zweiter Ordnung der Ebene versagen nicht blos in allen den Fällen, in denen die Koordinaten x, y, y' des zugehörigen Elementes erster Ordnung versagen, also wenn der Punkt x, y im Unendlichen liegt oder wenn die Gerade des Elementes x, y, y' der y-Axe parallel ist, sondern sie versagen auch dann, wenn es sich um ein Element zweiter Ordnung handelt, das dualistisch ist zu einem Elemente zweiter Ordnung x, y, y', $y'' = 0$ einer Geraden, sie sind also unfähig, die Berührung zweiter Ordnung zwischen einer Kurve und einem Punkte darzustellen. Trotzdem können wir aus ihnen ein Princip ableiten, das uns zu einer analytischen Darstellung führt, die alle Elemente zweiter Ordnung umfasst: es ist dasselbe Princip, das ich schon in meiner Note von 1893 zu Grunde gelegt habe.

Ist nämlich x, y, y', y'' ein reguläres Element zweiter Ordnung einer Kurve und ist $x + dx$, $y + dy$, $y' + dy'$ das dem Element erster Ordnung x, y, y' der Kurve unendlich benachbarte Element der Kurve, so bestehen die bekannten Gleichungen:

$$dy - y'dx = 0, \quad dy' - y''dx = 0.$$

---

1) Die Grundgedanken der gegenwärtigen Arbeit habe ich im September 1901 in einem in der ersten Sektion der Naturforscherversammlung zu Hamburg gehaltenen Vortrage mitgetheilt.

Demnach ist durch das dem Elemente erster Ordnung x, y, y' unendlich benachbarte Element $x + dx, y + dy, y' + dy'$ der Werth von y'' und damit das zu dem Elemente erster Ordnung x, y, y' der Kurve gehörige Element zweiter Ordnung x, y, y', y'' der Kurve bestimmt. Ebenso wird auch umgekehrt durch das zu dem Elemente erster Ordnung x, y, y' der Kurve gehörige Element zweiter Ordnung x, y, y', y'' ein ganz bestimmtes dem Elemente x, y, y' unendlich benachbartes Element erster Ordnung $x + dx, y + dy, y' + dy'$ definirt.

Nun bildet der Inbegriff aller Elemente erster Ordnung der projektiven Ebene im Cantorschen Sinne eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit, deren Individuen wir mit Hülfe der Konnexkoordinaten vollständig und eindeutig darstellen können. Ferner hat die Gleichung: $dy - y'dx = 0$, wenn sie für irgend zwei unendlich benachbarte Elemente erster Ordnung erfüllt ist, nach Lie die Bedeutung, dass die beiden Elemente vereinigt liegen, und auch diese Bedingung der vereinigten Lage erhält bei Anwendung der Konnexkoordinaten ganz allgemeine Gültigkeit, so dass ausnahmelos zu jedem Elemente erster Ordnung ∞^1 ihm unendlich benachbarte und mit ihm vereinigt liegende Elemente erster Ordnung gehören.

Wir stellen daher die folgende Definition auf:

Durch jedes Element erster Ordnung, das einem gegebenen Elemente erster Ordnung unendlich benachbart ist und im Lieschen Sinne mit ihm vereinigt liegt, ist ein dem gegebenen Elemente erster Ordnung angehöriges Element zweiter Ordnung bestimmt, und auf diese Weise wird jedes dem gegebenen Elemente erster Ordnung angehörige Element zweiter Ordnung erhalten,

und sind sicher, dass der Inbegriff der so definirten Elemente zweiter Ordnung eine abgeschlossene, bei der projektiven Gruppe invariante Mannigfaltigkeit bildet und dass er alle regulären Elemente zweiter Ordnung der ebenen Kurven enthält. Daraus und aus dem Umstande, dass wir zu jedem Elemente erster Ordnung ∞^1 ihm angehörige Elemente zweiter Ordnung erhalten, entnehmen wir die Berechtigung, die so definirten Elemente zweiter Ordnung als eine in jeder Beziehung vollkommene Erweiterung der Elemente erster Ordnung zu betrachten, ja sogar als die einzige Erweiterung, die den früher besprochenen Anforderungen entspricht.

Das Princip, das uns zu einer allgemein gültigen Definition

der Elemente zweiter Ordnung geführt hat, kann jetzt leicht so erweitert werden, dass es auch zu den Elementen dritter und höherer Ordnung führt. Ich will es gleich in der allgemeinsten Fassung aussprechen:

I. *Wir nennen zwei unendlich benachbarte Elemente n-ter Ordnung der Ebene vereinigt liegend, wenn die Elemente* $(n-1)$*-ter Ordnung, denen sie angehören, entweder identisch sind oder vereinigt liegen.*

II. *Hat man ein Element n-ter Ordnung und ein zweites ihm unendlich benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes, so ist dadurch stets ein Element* $(n+1)$*-ter Ordnung bestimmt, das jenem Elemente n-ter Ordnung angehört, und umgekehrt erhält man auf diese Weise alle einem Elemente n-ter Ordnung der Ebene angehörigen Elemente* $(n+1)$*-ter Ordnung.*

Da nämlich die Elemente erster Ordnung der Ebene vollständig definirt sind und auch der Begriff der vereinigten Lage für sie festgestellt ist, so erkennt man sofort, dass man auf diese Weise nach und nach zur Definition der Elemente beliebig hoher Ordnung aufsteigen kann.

Bemerkenswerth ist es, dass unsre Definition II in gewissem Sinne auch auf den Fall $n = 0$ und die Definition I auf den Fall $n = 1$ anwendbar bleibt. Als Elemente nullter Ordnung der Ebene sind nämlich die Punkte und die Geraden zu betrachten. Zwei Elemente nullter Ordnung derselben Art, also zwei Punkte oder zwei Gerade, müssen, wenn sie unendlich benachbart sind, als in vereinigter Lage befindlich angesehen werden und bestimmen dann immer einen Punkt und eine hindurchgehende Gerade, also ein Element erster Ordnung. Zwei verschiedenartige Elemente nullter Ordnung, also ein Punkt und eine Gerade, liegen vereinigt, wenn die Gerade durch den Punkt geht oder, was dasselbe ist, der Punkt auf der Geraden liegt: auch sie bestimmen offenbar stets ein Element erster Ordnung. Auf diese Weise gehört jedes Element erster Ordnung zwei verschiedenen Elementen nullter Ordnung an, einem Punkte und einer Geraden. Bei zwei unendlich benachbarten, vereinigt liegenden Elementen erster Ordnung sind nun erstens die Punkte beider und ebenso die Geraden entweder identisch oder unendlich benachbart, andrerseits geht die Gerade des einen immer durch den Punkt des andern und umgekehrt liegt der Punkt des einen immer auf der Geraden des andern. Sind demnach zwei unendlich benachbarte

Elemente erster Ordnung vereinigt, so steht jedes Element nullter Ordnung, dem das eine angehört zu jedem Elemente nullter Ordnung, dem das andre angehört, in einer solchen Beziehung, dass beide entweder identisch sind oder vereinigt liegen.

Durch das Vorstehende ist eine allgemeine Definition für die Elemente beliebig hoher Ordnung der projektiven Ebene gewonnen. Mir scheint, dass durch die Einführung dieses allgemeinen Elementbegriffes auch auf die singulären Stellen der algebraischen Kurven ein ganz neues Licht fallen wird. Die Ausführung dieses Gedankens muss allerdings der Zukunft vorbehalten bleiben, doch will ich hier wenigstens so viel bemerken: Zu jedem Elemente n-ter Ordnung giebt es ∞^1 bestimmte Elemente $(n+1)$-ter Ordnung, die ihm angehören. Umgekehrt gehört jedes Element n-ter Ordnung E_n einem ganz bestimmten Elemente $(n-1)$-ter Ordnung E_{n-1} an, dieses einem bestimmten Elemente $(n-2)$-ter Ordnung E_{n-2} und so geht es fort, bis man zu einem ganz bestimmten Elemente erster Ordnung E_1 gelangt, das seinerseits zwei bestimmten Elementen nullter Ordnung E_0, einem Punkte und einer Geraden, angehört. Ich nenne nun das Element E_n singulär, wenn es eine Zahl $0 < l \leqq n-2$ von solcher Beschaffenheit giebt, dass nicht blos das Element E_{l+1}, sondern auch das ihm unendlich benachbarte, mit ihm vereinigt liegende Element $(l+1)$-ter Ordnung, das zusammen mit E_{l+1} das Element $(l+2)$-ter Ordnung E_{l+2} bestimmt, dem Elemente E_l angehört. In diesem Sinne sind also die Elemente erster Ordnung samt und sonders nicht singulär. Dagegen gehört zu jedem singulären Elemente n-ter Ordnung $(n>1)$ eine vollständig bestimmte Reihe von ganzen Zahlen $0 < l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leqq n-2$ von solcher Beschaffenheit, dass für jedes $k = 1, 2 \cdots m$ die zwei unendlich benachbarten, vereinigt liegenden Elemente (l_k+1)-ter Ordnung, die das Element E_{l_k+2} bestimmen, beide dem Elemente E_{l_k} angehören. Diese Zahlen $l_1, l_2, \cdots l_m$ können dann als Maass für die Singularität des Elementes E_n betrachtet werden.

Erwähnt sei auch noch, dass das vorhin entwickelte Princip genau in derselben Weise angewendet werden kann, um die Elemente höherer Ordnung auf irgend einer algebraischen Fläche, namentlich auf der Fläche zweiten Grades zu definiren.

Nunmehr wende ich mich zur Ableitung der Koordinaten für die Elemente zweiter Ordnung der Ebene. Um möglichst leicht verständlich zu sein, will ich aber nicht gleich homogene Punkt-

koordinaten benutzen, sondern blos rechtwinklige x, y, nur für y' will ich mit LIE die beiden Verhältnissgrössen $p : q$ einführen, wo $p + qy' = 0$ ist, so dass also ein Element erster Ordnung durch die vier Grössen: x, y, p, q bestimmt ist und zwei unendlich benachbarte, vereinigt liegende Elemente erster Ordnung x, y, p, q und $x + dx$, $y + dy$, $p + dp$, $q + dq$ durch die Gleichung: $pdx + qdy = 0$ charakterisirt werden. Auf diese Weise geht uns wenigstens kein Element erster Ordnung verloren, dessen Punkt im Endlichen liegt.

Zu jedem Elemente erster Ordnung x, y, p, q gehören ∞^1 unendlich benachbarte, mit ihm vereinigt liegende, unter denen eines mit x, y, p, q den Punkt und eines mit ihm die Gerade gemein hat; jenes ist durch: $dx = dy = 0$ charakterisirt, wobei die Bedingung $pdx + qdy = 0$ der vereinigten Lage von selbst erfüllt ist, dieses durch: $pdq - qdp = 0$ in Verbindung mit $pdx + qdy = 0$. Wir wollen nun versuchen, die ∞^1 zu x, y, p, q unendlich benachbarten und mit ihm vereinigt liegenden Elemente erster Ordnung durch zwei Verhältnissgrössen σ und τ derart zu bestimmen, dass $\tau = 0$ das Element liefert, das denselben Punkt, und $\sigma = 0$ das Element liefert, das dieselbe Gerade hat, wie x, y, p, q. Es muss daher unter Berücksichtigung von $pdx + qdy = 0$ aus $\tau = 0$ folgen: $dx = dy = 0$ und aus $\sigma = 0$ folgen: $pdq - qdp = 0$, mit andern Worten: es muss die Proportion bestehen:

$$\tau q : \tau p : \sigma = dx : -dy : pdq - qdp,$$

so dass wir die Gleichungen erhalten:

$$(1) \qquad \begin{cases} pdx + qdy = 0 \\ \tau q(pdq - qdp) = \sigma dx \\ \tau p(pdq - qdp) = -\sigma dy, \end{cases}$$

unter denen natürlich nur zwei von einander unabhängige vorhanden sind.

Die Grössen σ, τ, die selbstverständlich nicht beide verschwinden können, genügen nun in der That allen unsern Wünschen. Für je zwei benachbarte, vereinigt liegende Elemente erster Ordnung x, y, p, q und $x + dx, \cdots, q + dq$ ist ja $pdx + qdy = 0$ erfüllt und demnach das Verhältniss $\sigma : \tau$ vollkommen bestimmt, denn das Verschwinden aller drei Ausdrücke: dx, dy, $pdq - qdp$ ist ausgeschlossen, da es nicht zwei unendlich benachbarte, sondern zwei zusammenfallende Elemente erster Ordnung liefern würde.

Umgekehrt liefert jedes Verhältniss $\sigma : \tau$ ein ganz bestimmtes, dem Elemente x, y, p, q unendlich benachbartes und mit ihm vereinigt liegendes Element; ist nämlich $\tau = 0$, so folgt aus (1), da σ nicht auch verschwinden kann: $dx = dy = 0$, wodurch auch $pdx + qdy = 0$ erfüllt ist, verschwindet aber τ nicht, so können dx und dy nicht beide verschwinden, weil sonst auch $pdq - qdp$ null sein müsste, und es folgt aus (1):

$$dx = q\delta t, \quad dy = -p\delta t,$$

wo δt eine unendlich kleine Konstante bedeutet, und da p und q nicht beide verschwinden dürfen:

$$\tau(pdq - qdp) = \sigma \,.\, \delta t,$$

wodurch das Element $x + dx, \cdots, q + dq$ vollständig bestimmt ist, sobald man beachtet, dass p und q Verhältnissgrössen sind. Endlich ist auch klar, dass zwei verschiedene dem Elemente x, y, p, q unendlich benachbarte und mit ihm vereinigte Elemente erster Ordnung stets zwei verschiedene Verhältnisse $\sigma : \tau$ liefern.

Nun haben wir früher gesehen, dass jedes dem Elemente x, y, p, q unendlich benachbarte und mit ihm vereinigte Element erster Ordnung ein dem Elemente x, y, p, q angehöriges Element zweiter Ordnung bestimmt, und dass man auf diese Weise alle Elemente zweiter Ordnung erhält, die dem Elemente x, y, p, q angehören. Demnach werden wir die Grössen: x, y, p, q, σ, τ geradezu als Bestimmungsstücke der dem Elemente x, y, p, q angehörigen Elemente zweiter Ordnung ansehen können und somit überhaupt als Koordinaten der Elemente zweiter Ordnung, die zu einem Elemente erster Ordnung gehören, dessen Punkt im Endlichen liegt. *Die Gleichungen* (1) *sind dann nach dem Früheren zugleich die Bedingungen dafür, dass die beiden unendlich benachbarten Elemente zweiter Ordnung* x, y, p, q, σ, τ und $x + dx, \cdots, \tau + d\tau$ *vereinigt liegen.*

Zu bemerken ist hier noch, dass weder p und q noch σ und τ gleichzeitig verschwinden dürfen; da ferner alle Werthsysteme $x, y, \lambda p, \lambda q$ bei beliebigem λ dasselbe Element erster Ordnung darstellen, und da auch σ, τ selbst Verhältnissgrössen sind, so werden alle Werthsysteme:

$$x, \quad y, \quad \lambda p, \quad \lambda q, \quad \lambda^3 \mu\sigma, \quad \mu\tau$$

bei beliebigem λ und μ dasselbe Element zweiter Ordnung darstellen, und zwei verschiedene Werthsysteme x, y, p, q, σ, τ und

$x_1, y_1, p_1, q_1, \sigma_1, \tau_1$ werden dann und nur dann dasselbe Element zweiter Ordnung darstellen, wenn $x_1 = x$, $y_1 = y$ ist und wenn es zwei von Null verschiedene Zahlen λ und μ von der Beschaffenheit giebt, dass:

$$p_1 = \lambda p, \quad q_1 = \lambda q, \quad \sigma_1 = \lambda^3 \mu \sigma, \quad \tau_1 = \mu \tau$$

wird.

Der Zusammenhang zwischen den eben gefundenen Elementkoordinaten und den gewöhnlichen x, y, y', y'' ist sehr einfach. Aus $p + qy' = 0$ und $dy' - y''dx = 0$ folgt nämlich:

$$\frac{pdq - qdp}{q^2} - y''dx = 0,$$

nach (1) ist also:

$$y'' = \frac{\sigma}{\tau q^3}. \tag{2}$$

Hieraus ergiebt sich zum Beispiel, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \infty$ in zwei zerfällt, von denen die eine: $\tau = 0$ die Differentialgleichung aller Punkte darstellt, während die andere: $q = 0$ blos von erster Ordnung ist und die Geraden: $x = \text{const.}$ zu Integralkurven hat.

Es ist von Interesse, die Zuwachse von σ und τ bei einer beliebigen infinitesimalen Punkttransformation der Ebene zu kennen. Ist $\xi(x, y)p + \eta(x, y)q$ das Symbol dieser Transformation, so ist nach LIE:

$$\begin{cases} \delta x = \xi \,.\, \delta t, \quad \delta y = \eta \,.\, \delta t \\ \delta p = -(\xi_x p + \eta_x q)\delta t, \quad \delta q = -(\xi_y p + \eta_y q)\delta t \end{cases} \tag{3}$$

und man findet aus (1):

$$\begin{cases} \sigma \frac{\delta \tau}{\delta t} - \tau \frac{\delta \sigma}{\delta t} = 2\sigma\tau(\xi_x + \eta_y) - \\ \quad - \tau^2\{\xi_{yy}p^3 + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})p^2 q + (\xi_{xx} - 2\eta_{xy})pq^2 + \eta_{xx}q^3\}. \end{cases} \tag{4}$$

Ebenso bekommt man bei einer beliebigen infinitesimalen homogenen Berührungstransformation mit der charakteristischen Funktion $H(x, y, p, q)$, die natürlich in p und q homogen von erster Ordnung sein muss:

$$\begin{cases} \delta x = \frac{\partial H}{\partial p}\delta t, \quad \delta y = \frac{\partial H}{\partial q}\delta t, \quad \delta p = -\frac{\partial H}{\partial x}\delta t, \quad \delta q = -\frac{\partial H}{\partial y}\delta t \\ \sigma \frac{\delta \tau}{\delta t} - \tau \frac{\delta \sigma}{\delta t} = 2\sigma\tau(H_{xp} + H_{yq}) + \\ \qquad + \sigma^2 \frac{H_{pq}}{pq} - \tau^2\{p^2 H_{yy} - 2pq H_{xy} + q^2 H_{xx}\}. \end{cases} \tag{5}$$

Von den Gleichungen (1) zu den entsprechenden für homogene Punktkoordinaten überzugehen ist nicht schwer. Wir setzen:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad p = \frac{u_1}{x_3}, \quad q = \frac{u_2}{x_3}$$

und definiren u_3 durch:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = (ux) = 0.$$

Dann stellt jedes Werthsystem $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3$, das der Bedingung $(ux) = 0$ genügt, ein Element erster Ordnung dar, dessen Gerade die homogenen Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 besitzt, und zwei unendlich benachbarte, vereinigt liegende Elemente erster Ordnung sind durch die Gleichungen $(udx) = 0$, $(xdu) = 0$ charakterisirt, von denen immer die eine aus der andern vermöge $(ux) = 0$ folgt.

Die letzten beiden der Gleichungen (1) erhalten jetzt die Form:

$$\tau u_2(u_1 du_2 - u_2 du_1) = \sigma x_3(x_3 dx_1 - x_1 dx_3)$$
$$\tau u_1(u_1 du_2 - u_2 du_1) = \sigma x_3(x_2 dx_3 - x_3 dx_2),$$

bedenkt man aber, dass aus $(ux) = 0$, $(udx) = 0$ folgt:

$$u_1 : u_2 : u_3 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

und dass ebenso:

$$x_1 : x_2 : x_3 = u_2 du_3 - u_3 du_2 : u_3 du_1 - u_1 du_3 : u_1 du_2 - u_2 du_1,$$

so findet man leicht, dass jetzt an die Stelle der Gleichungen (1) die folgenden treten:

$$(6) \qquad \begin{cases} (ux) = 0, \quad (udx) = 0, \quad (xdu) = 0 \\ \tau(\xi u)(vudu) = \sigma(vx)(\xi x dx), \end{cases}$$

wo ξ_1, ξ_2, ξ_3 ein willkürlicher Punkt und v_1, v_2, v_3 eine willkürliche Gerade ist, so dass in der letzten Gleichung eigentlich deren neun zusammengefasst sind, und wo $(\xi x dx)$ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix}$$

bedeutet.

Als Koordinaten eines Elementes zweiter Ordnung erhält man daher die acht Grössen:

$$x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, \sigma, \tau,$$

die durch die Relation $(ux) = 0$ verknüpft sind; hier dürfen weder x_1, x_2, x_3, noch u_1, u_2, u_3, noch σ und τ gleichzeitig verschwinden und ausserdem stellt jedes Werthsystem:

$$\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \mu u_1,\ \mu u_2,\ \mu u_3,\ \mu^3\nu\sigma,\ \lambda^3\nu\tau$$

bei ganz beliebigen λ, μ, ν immer dasselbe Element zweiter Ordnung dar. Die Gleichungen (6) sind die Bedingung für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarter Elemente zweiter Ordnung.

Das sind dieselben Elementkoordinaten, die STUDY schon angegeben hat, nur ist er auf ganz anderm Wege zu ihnen gelangt und hat ausser den eben gefundenen noch andere Arten von Elementkoordinaten aufgestellt, die aber hier für uns nicht in Betracht kommen, da sie den früher von uns aufgestellten Forderungen nicht genügen.

In den neuen Elementkoordinaten wird

$$(7) \qquad y' = -\frac{u_1}{u_2}, \quad y'' = \frac{\sigma \cdot x_3{}^3}{\tau \cdot u_2{}^3}.$$

Diese Formeln legen es nahe, an Stelle von x, y, y', y'' die Grössen x, y, y', $\sqrt[3]{y''}$ als Bestimmungsstücke eines Elementes zweiter Ordnung zu betrachten oder in homogenen Koordinaten die Grössen x, u, $\sqrt[3]{\sigma}$, $\sqrt[3]{\tau}$. Man würde auf diese Weise, wegen der Dreideutigkeit der dritten Wurzel zu dem von STUDY eingeführten Begriffe der *orientirten* Elemente zweiter Ordnung gelangen, doch will ich hier auf diesen Begriff, der ganz STUDYS Eigenthum ist, nicht weiter eingehen, sondern verweise auf STUDYS Arbeit. Dagegen will ich noch ein paar Worte über die Elemente dritter Ordnung sagen.

Wir wollen zunächst das bisher benutzte Koordinatendreieck durch ein beliebiges andres ersetzen und führen zu diesem Zwecke auf die x eine beliebige lineare homogene Transformation von der Determinante 1 aus. Die u unterliegen dann ebenfalls einer linearen homogenen Transformation von der Determinante 1 und die Gleichungen (6) zeigen, dass σ und τ bei unsrer Transformation als absolut invariant betrachtet werden können. Dagegen ändert sich der Ausdruck für y'' und erhält die Form:

$$y'' = \frac{\sigma(wx)^3}{\tau(\eta u)^3},$$

wo $(w\eta) = 0$ ist, während der Punkt η_1, η_2, η_3 und die Gerade w_1, w_2, w_3 sonst ganz beliebig sind.

Hieraus geht hervor, dass wir als Bestimmungsstücke der ∞^1 Elemente zweiter Ordnung, die zu dem Elemente erster Ordnung x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, $(ux) = 0$ gehören, die beiden Grössen:

$$\sigma_1 = \sigma(wx)^3 \qquad \tau_1 = \tau(\eta u)^3$$

benutzen können, wo der Punkt η und die Gerade w der Bedingung $(w\eta) = 0$ unterworfen sind, sonst aber ganz unbestimmt. Diese Grössen σ_1 und τ_1 haben vor σ und τ den Vortheil, dass jede von ihnen mit dem Faktor λ^3 oder mit dem Faktor μ^3 multiplicirt wird, je nachdem man alle x mit dem Faktor λ oder alle u mit dem Faktor μ multiplicirt; andrerseits ist wegen der Unbestimmtheit von η und w sicher, dass σ_1 nur verschwindet, wenn σ verschwindet und τ_1 nur verschwindet, wenn τ null ist.

Man findet nun:

$$dy'' = -\frac{\sigma_1 d\tau_1 - \tau_1 d\sigma_1}{\tau_1^2} = y''' dx$$

und:

$$\frac{\sigma_1 d\tau_1 - \tau_1 d\sigma_1}{(wx)^2 (\eta u)^2} = (\sigma d\tau - \tau d\sigma)(wx)(\eta u) + \\ + 3\sigma\tau[(wx)(\eta du) - (\eta u)(wdx)].$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich das folgende Verfahren, um die Elemente dritter Ordnung durch Koordinaten zu bestimmen:

Als Koordinaten benutzen wir ausser x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, σ, τ, die durch die Relation $(ux) = 0$ verknüpft sind, noch zehn Grössen ϱ und ϱ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$, die durch die Relation $\varrho_{11} + \varrho_{22} + \varrho_{33} = 0$ verknüpft sind. Die vereinigte Lage zweier so bestimmter unendlich benachbarter Elemente dritter Ordnung wird ausser den Gleichungen (6) noch durch die folgenden definirt:

$$(8)\begin{cases} \varrho\tau(\xi u)\{(\sigma d\tau - \tau d\sigma)(wx)(\eta u) + 3\sigma\tau[(wx)(\eta du) - (\eta u)(wdx)]\} \\ \qquad = (\xi x dx)\sum_{ik}^{123} w_i \eta_k \varrho_{ik} \\ \varrho\sigma(vx)\{(\sigma d\tau - \tau d\sigma)(wx)(\eta u) + 3\sigma\tau[(wx)(\eta du) - (\eta u)(wdx)]\} \\ \qquad = (vudu)\sum_{ik}^{123} w_i \eta_k \varrho_{ik}, \end{cases}$$

in denen ξ und η beliebige Punkte, v und w beliebige Gerade sind, die nur an die Bedingung $(w\eta) = 0$ gebunden sind.

Die Gleichungen (8) zerlegen sich sofort in die folgenden:

$$\varrho\tau(\xi u)\{(\sigma d\tau - \tau d\sigma)x_i u_k + 3\sigma\tau(x_i du_k - u_k dx_i)\} = (\xi x dx)\varrho_{ik}$$
$$\varrho\sigma(vx)\{(\sigma d\tau - \tau d\sigma)x_i u_k + 3\sigma\tau(x_i du_k - u_k dx_i)\} = (vu_i' du)\varrho_{ik},$$
$$(i, k = 1, 2, 3)$$

wo der Punkt ξ und die Gerade v ganz willkürlich sind, und aus diesen erhält man durch Elimination von $\sigma d\tau - \tau d\sigma$ und durch Benutzung von (6) eine Anzahl endlicher Gleichungen, die zwischen den Grössen x, u, σ, τ, ϱ, ϱ_{ik} bestehen müssen, wenn diese wirklich die Koordinaten eines Elementes dritter Ordnung sein sollen.

Ich will mich mit der Aufstellung dieser endlichen Gleichungen nicht aufhalten, sondern nur bemerken, dass man, um sie in bequemer, übersichtlicher Form zu erhalten, besser von den unzerlegten Gleichungen (8) ausgeht und darin den Ausdruck $\Sigma w_i \eta_k \varrho_{ik}$ durch ein symbolisches Produkt von der Form $(pw)(l\eta)$ ersetzt, wo die Symbole p zu den x und die Symbole l zu den u kogredient sind.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass natürlich das gleichzeitige Verschwinden von ϱ und allen ϱ_{ik} ausgeschlossen ist, dass ferner ϱ als eine Grösse zu betrachten ist, die ungeändert bleibt, wenn man alle x mit dem Faktor λ und alle u mit dem Faktor μ multiplicirt, während dagegen jedes ϱ_{ik} bei dieser Operation mit dem Faktor $\lambda^5 . \mu^5$ multiplicirt wird. Die Gleichung $\varrho = 0$ definirt alle die singulären Elemente dritter Ordnung, die durch zwei unendlich benachbarte vereinigte Elemente zweiter Ordnung mit gemeinsamem Elemente erster Ordnung bestimmt werden. Die Gleichungen $\varrho_{ik} = 0$ definiren die Elemente dritter Ordnung der Punkte und der Geraden der Ebene.

Es versteht sich von selbst, dass die projektive Gruppe der Ebene sowohl die Gleichung $\varrho = 0$, als das Gleichungensystem $\varrho_{ik} = 0$ invariant lässt. Da aber das Gleichungensystem $\varrho_{ik} = 0$ zur Folge hat: $\sigma . \tau = 0$, so stellt es keine invariante Differentialgleichung dritter Ordnung dar, sondern nur eine zerfallende Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dagegen ist: $\varrho = 0$ wirklich eine Differentialgleichung dritter Ordnung, als deren ∞^3 Integralvereine die ∞^3 Elemente erster Ordnung der Ebene anzusehen sind, jedes aufgefasst als der Verein der ∞^1 zu ihm gehörigen Elemente zweiter Ordnung.

§ 2.
Die Elemente zweiter Ordnung im Raume.

Nach Lie bestimmt jedes Werthsystem x, y, z, p, q ein Element erster Ordnung des Raumes, und geometrisch wird dieses Element dargestellt durch den Punkt x, y, z und die hindurchgehende Ebene $\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$. Zwei unendlich benachbarte Elemente erster Ordnung: x, y, z, p, q und $x + dx, \cdots, q + dq$ liegen vereinigt, wenn sie die Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ erfüllen, das heisst, wenn der Punkt $x + dx, y + dy, z + dz$ des zweiten Elementes auf der Ebene des ersten liegt, woraus zugleich folgt, dass auch die Ebene des zweiten Elementes durch den Punkt des ersten geht. Indem man nun mit Lie überhaupt jede Figur, die aus einem Punkte und einer hindurchgehenden Ebene besteht, als ein Element erster Ordnung betrachtet und die Punkte und die Ebenen durch homogene Koordinaten darstellt, erhält man die bekannte Darstellung der Elemente erster Ordnung durch Konnexkoordinaten.

Wir behalten zunächst die gewöhnlichen Koordinaten x, y, z, p, q bei und betrachten irgend ein Element zweiter Ordnung x, y, z, p, q, r, s, t einer Fläche. Ist dann $x + dx, y + dy, z + dz$ ein beliebiger, dem Punkte x, y, z unendlich benachbarter Punkt der Fläche, so ist das zu diesem Punkte gehörige Element erster Ordnung $x + dx, \cdots, q + dq$ der Fläche bestimmt durch:

$$(9) \qquad \begin{cases} dz = pdx + qdy \\ dp = rdx + sdy \\ dq = sdx + tdy. \end{cases}$$

Da hier dx, dy beliebig sind, so sehen wir: Jedes Element zweiter Ordnung x, y, z, p, q, r, s, t bestimmt für das Element erster Ordnung x, y, z, p, q, dem es angehört, ∞^1 unendlich benachbarte, damit vereinigt liegende Elemente erster Ordnung $x + dx, \cdots, q + dq$.

Haben wir umgekehrt ein Element erster Ordnung x, y, z, p, q und ein unendlich benachbartes, damit vereinigt liegendes $x + dx, \cdots, q + dq$, das also der Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ genügt, so sind dadurch vermöge der beiden Gleichungen:

$$(10) \qquad dp - rdx - sdy = 0, \quad dq - sdx - tdy = 0$$

∞^1 Elemente zweiter Ordnung bestimmt, die dem Elemente erster Ordnung x, y, z, p, q angehören.

Im Raume genügt also ein dem Elemente x, y, z, p, q unendlich benachbartes und mit ihm vereinigtes Element erster Ordnung noch nicht zur Bestimmung eines Elementes zweiter Ordnung, wir müssen noch ein zweites unendlich benachbartes Element $x + \delta x, \cdots, q + \delta q$ hinzunehmen, das ebenfalls mit $x, \cdots, q$ vereinigt liegt und also die Gleichung: $\delta z - p\delta x - q\delta y = 0$ erfüllt. Aber freilich dürfen wir dieses zweite Element erster Ordnung nicht ganz beliebig wählen, denn wir erhalten für das Element zweiter Ordnung ausser den Gleichungen (10) noch die beiden:

$$(10') \qquad \delta p - r\delta x - s\delta y = 0, \quad \delta q - s\delta x - t\delta y = 0,$$

es muss also eine Bedingung erfüllt sein, wenn die Gleichungen (10), (10′) wirklich durch ein Werthsystem r, s, t befriedigt werden sollen. Nun ergiebt sich aus (10), (10′):

$$(11) \qquad \begin{cases} r = -\dfrac{dy\delta p - dp\delta y}{dx\delta y - dy\delta x}, & t = \dfrac{dx\delta q - dq\delta x}{dx\delta y - dy\delta x} \\ s = \dfrac{dx\delta p - dp\delta x}{dx\delta y - dy\delta x} = -\dfrac{dy\delta q - dq\delta y}{dx\delta y - dy\delta x}, \end{cases}$$

die erwähnte Bedingung kommt somit einfach darauf hinaus, dass die Gleichung:

$$(12) \qquad dx\delta p - dp\delta x + dy\delta q - dq\delta y = 0$$

erfüllt sein muss.

Wir sehen hieraus, dass zwei von einander verschiedene, dem Elemente $x, \cdots, q$ unendlich benachbarte und mit ihm vereinigt liegende Elemente erster Ordnung: $x + dx, \cdots, q + dq$ und $x + \delta x, \cdots, q + \delta q$ stets dann aber auch nur dann ein Element zweiter Ordnung bestimmen, wenn sie die Gleichung (12) befriedigen. Ebenso kann man offenbar auch umgekehrt zu jedem Elemente zweiter Ordnung $x, y, \cdots, q, r, s, t$, das dem Elemente erster Ordnung $x, \cdots, q$ angehört, zwei solche Elemente erster Ordnung: $x + dx, \cdots, q + dq$ und $x + \delta x, \cdots, q + \delta q$ bestimmen, die mit $x, \cdots, q$ vereinigt liegen und die Gleichung (12) erfüllen.

Die Gleichung (12) ist zunächst unter der Voraussetzung abgeleitet, dass $x, y, \cdots, r, s, t$ ein Element zweiter Ordnung einer Fläche ist. Sie hat aber eine davon unabhängige Bedeutung,

sie ist nämlich[1]) die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass alle die ∞^1 Elemente erster Ordnung:

$$x + \lambda dx + \mu \delta x, \quad \cdots, \quad q + \lambda dq + \mu \delta q$$

einen Verein von Elementen im Lieschen Sinne bilden, oder schärfer ausgedrückt, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sie einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit:

$$x = X(u, v), \quad \cdots, \quad q = Q(u, v)$$

von Elementen erster Ordnung angehören können, die durch das Element x, y, z, p, q geht und in der je zwei unendlich benachbarte Elemente erster Ordnung vereinigt liegen, bei der also die Gleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial u} - P\frac{\partial X}{\partial u} - Q\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} - P\frac{\partial X}{\partial v} - Q\frac{\partial Y}{\partial v} = 0$$

für alle Werte von u und v identisch erfüllt sind.

Hiermit haben wir eine Definition der Elemente zweiter Ordnung des Raumes gewonnen, die nur von dem Begriffe des Elementes erster Ordnung und von dem Begriffe der vereinigten Lage solcher Elemente Gebrauch macht, die sich also gegenüber allen projektiven Transformationen invariant verhält. Wir könnten diese Definition zur Ableitung von Koordinaten für die Elemente zweiter Ordnung benutzen, wie wir es in der Ebene gemacht haben, wir ziehen jedoch vor, die Gleichungen (12) und (10) zu benutzen, in diese homogene Koordinaten einzuführen und dann alle Gleichungen aufzustellen, die aus (12) und (10) durch alle projektiven Transformationen des Raumes hervorgehen. Dieses Verfahren lässt zwar an Eleganz zu wünschen übrig, aber es hat den Vorzug leichterer Verständlichkeit. In der Ebene haben wir den andern Weg eingeschlagen, weil da die Gleichung (12) noch nicht auftritt.

Wir bestimmen also ein Element erster Ordnung durch die homogenen Koordinaten $x_1, \cdots, x_4$ und $u_1, \cdots, u_4$ seines Punktes und seiner Ebene. Dass die Ebene u durch den Punkt x geht, drückt sich durch das Bestehen der Gleichung $\Sigma u_i x_i = (ux) = 0$ aus. Für zwei dem Elemente x, u unendlich benachbarte und

1) Vgl. die Arbeit von Kowalewski: Elementvereine und Streifenelemente im R_{n+1}, Leipz. Ber. 1900, S. 93—95. Uebrigens habe ich die Gleichung (12) auch schon in meiner Note von 1893 zur Darstellung der Elemente zweiter Ordnung des Raumes benutzt.

mit ihm vereinigt liegende Elemente erster Ordnung $x + dx$, $u + du$ und $x + \delta x$, $u + \delta u$ bestehen dann die Gleichungen:

$$(13)\quad (ux) = 0,\ (udx) = 0,\ (xdu) = 0,\ (u\delta x) = 0,\ (x\delta u) = 0.$$

In der Bedingung (12), die erfüllt sein muss, wenn die angegebenen Elemente erster Ordnung ein Element zweiter Ordnung bestimmen sollen, setzen wir jetzt:

$$(14)\qquad x = \frac{x_1}{x_4},\quad y = \frac{x_2}{x_4},\quad z = \frac{x_3}{x_4},\quad p = -\frac{u_1}{u_3},\quad q = -\frac{u_2}{u_3}$$

und finden:

$$(15)\qquad \begin{cases} (x_4 dx_1 - x_1 dx_4)(u_3 \delta u_1 - u_1 \delta u_3) - \\ -(u_3 du_1 - u_1 du_3)(x_4 \delta x_1 - x_1 \delta x_4) + \\ +(x_4 dx_2 - x_2 dx_4)(u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) - \\ -(u_3 du_2 - u_2 du_3)(x_4 \delta x_2 - x_2 \delta x_4) = 0. \end{cases}$$

Ausser der Bedingung (15) müssen nun noch alle andern Bedingungen erfüllt sein, die aus ihr durch eine beliebige projektive Transformation des Raumes hervorgehen. Um diese Bedingungen leicht angeben zu können, ersetzen wir (15) durch die äquivalente Gleichung:

$$(15')\qquad \begin{cases} x_4 u_3 \{(dx\delta u) - (\delta x du)\} + (dx_4 \delta u_3 - du_3 \delta x_4)(ux) + \\ \qquad + x_4 du_3 (u\delta x) - x_4 \delta u_3 (udx) + \\ \qquad + u_3 \delta x_4 (xdu) - u_3 dx_4 (x\delta u) = 0, \end{cases}$$

aus der sofort hervorgeht, dass alle Gleichungen, in die (15) bei beliebigen projektiven Transformationen des Raumes übergeht, in die eine überdies zu sich selber dualistische Gleichung zusammengefasst werden können:

$$(15'')\qquad \begin{cases} (vx)(\xi u)\{(dx\delta u) - (\delta x du)\} + \\ +\{(vdx)(\xi\delta u) - (\xi du)(v\delta x)\}(ux) + \\ +(vx)\{(\xi du)(u\delta x) - (\xi\delta u)(udx)\} + \\ +(\xi u)\{(xdu)(v\delta x) - (x\delta u)(vdx)\} = 0, \end{cases}$$

wo der Punkt ξ und die Ebene v in der Beziehung $(v\xi) = 0$ stehen müssen, sonst aber ganz beliebig sind.

Aus (15'') und auch schon aus (15') ergiebt sich durch Benutzung von (13) die einfache Gleichung:

$$(16)\qquad (dx\delta u) - (\delta x du) = 0,$$

die offenbar (15) und auch alle Gleichungen (15″) nach sich zieht. Sie ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass alle ∞^1 Elemente erster Ordnung von der Form:

$$x_i + \lambda dx_i + \mu \delta x_i, \quad u_i + \lambda du_i + \mu \delta u_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

einem zweifach ausgedehnten Vereine im Sinne Lies angehören können. Wir hätten diese Bedingung (16) natürlich auch finden können, ohne die Gleichung (12) zu benutzen. Es ist von Wichtigkeit, dass die Gleichung (15″) aus (13) und (16) auch dann folgt, wenn $(v\xi) \neq 0$ ist.

Führen wir die homogenen Veränderlichen in die Ausdrücke (11) für r, s, t ein, so erhalten wir lauter Quotienten, in denen zweireihige Determinanten der Matrix:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} x_i dx_k - x_k dx_i & u_\mu du_\nu - u_\nu du_\mu \\ x_i \delta x_k - x_k \delta x_i & u_\mu \delta u_\nu - u_\nu \delta u_\mu \end{vmatrix}_{(i,k,\mu,\nu = 1 \ldots 4)}$$

vorkommen. Da nun auch (15) eine Relation zwischen zwei solchen Determinanten ist und da der Inbegriff aller zweireihigen Determinanten der Matrix offenbar bei jeder projektiven Transformation des Raumes eine lineare homogene Transformation erleidet, so können wir einfach die zweireihigen Determinanten der Matrix als Bestimmungsstücke des durch die beiden Elemente erster Ordnung $x + dx$, $u + du$ und $x + \delta x$, $u + \delta u$ definirten Elementes zweiter Ordnung einführen und sind dann sicher, dass wir Elementkoordinaten bekommen, die für kein Element zweiter Ordnung versagen. Dass diese Elementkoordinaten durch Differentiale ausgedrückt sind, schadet nichts, da es ja doch nur auf ihre Verhältnisse ankommt.

Aber diese Elementkoordinaten sind noch einer weitern Vereinfachung fähig. Die Determinanten der Matrix (17) zerfallen nämlich in drei Kategorien derart, dass die Determinanten jeder Kategorie bei jeder projektiven Transformation des Raumes für sich linear und homogen transformirt werden.

Die Determinanten der einen Kategorie enthalten sowohl die x als die u und können nicht weiter reducirt werden; wir setzen daher:

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} x_i dx_k - x_k dx_i & u_\mu du_\nu - u_\nu du_\mu \\ x_i \delta x_k - x_k \delta x_i & u_\mu \delta u_\nu - u_\nu \delta u_\mu \end{vmatrix} = s_{ik,\mu\nu}.$$

Die Determinanten der beiden andern Kategorien hängen entweder nur von den x oder nur von den u ab. Nun gilt aber die Identität:

$$\begin{vmatrix} (\xi\eta x dx)(\xi'\eta' x dx) \\ (\xi\eta x\delta x)(\xi'\eta' x\delta x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\xi x dx\delta x)(\eta x dx\delta x) & \\ (\xi'\eta' x\xi) & (\xi'\eta' x\eta) \end{vmatrix},$$

in der ξ, η, ξ', η' beliebige Punkte bedeuten; ferner ist nach (13) für je zwei Punkte ξ und ζ:

$$(\xi x dx\delta x)(\zeta u) = (\zeta x dx\delta x)(\xi u),$$

und da $u_1, \cdots, u_4$ niemals alle vier verschwinden können, so dürfen wir setzen:

$$(19) \qquad (\xi x dx\delta x) = \tau(\xi u)$$

und analog:

$$(20) \qquad (vudu\delta u) = \sigma(vx).$$

Demnach lassen sich die Determinanten der beiden andern Kategorien vermöge der Formeln

$$(21) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} (\xi\eta x dx) & (\xi'\eta' x dx) \\ (\xi\eta x\delta x) & (\xi'\eta' x\delta x) \end{vmatrix} = \tau \begin{vmatrix} (\xi'\eta'\xi x) & (\xi'\eta'\eta x) \\ (\xi u) & (\eta u) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (vwudu)(v'w'udu) & \\ (vwu\delta u) & (v'w'u\delta u) \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} (v'w'vu) & (v'w'wu) \\ (vx) & (wx) \end{vmatrix} \end{cases}$$

durch die x, die u und die beiden Grössen σ, τ ausdrücken.

Aus (19) und (20) folgt noch die in den Differentialen d und δ homogene Gleichung:

$$\sigma(vx)(\xi x dx\delta x) = \tau(\xi u)(vudu\delta u),$$

die zeigt, dass σ und τ nichts weiter sind als die Uebertragung der von STUDY in der Ebene eingeführten Elementkoordinaten σ und τ auf den Raum. Wie STUDY bemerkt hat, beherrschen diese Grössen σ und τ die Krümmung der Flächen und zugleich in gewissem Sinne die Torsion der Raumkurven. Hier will ich nur erwähnen, dass $\sigma = 0$ die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen ist und $\tau = 0$ die der Kurven.

Aus (11) erhalten wir nunmehr durch Einführung der homogenen Veränderlichen und durch Benutzung von (18) und (21):

$$(22)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{x_4 \cdot s_{42,31}}{u_3^{\,3} \cdot \tau}, \quad t = \dfrac{x_4 \cdot s_{41,23}}{u_3^{\,3} \cdot \tau} \\ s = \dfrac{x_4 \cdot s_{41,12}}{u_3^{\,3} \cdot \tau} = -\dfrac{x_4 \cdot s_{42,23}}{u_3^{\,3} \cdot \tau}, \end{cases}$$

während die Bedingung (15) die Form:

$$(15''')\qquad s_{41,12} + s_{42,23} = 0$$

bekommt und die Gleichungen (10) in der Gestalt:

$$(23)\qquad \begin{cases} x_4 u_3 \tau (u_3 du_1 - u_1 du_3) + s_{42,31}(x_4 dx_1 - x_1 dx_4) - \\ \qquad - s_{42,23}(x_4 dx_2 - x_2 dx_4) = 0 \\ x_4 u_3 \tau (u_2 du_3 - u_3 du_2) + s_{41,12}(x_4 dx_1 - x_1 dx_4) + \\ \qquad + s_{41,23}(x_4 dx_2 - x_2 dx_4) = 0 \end{cases}$$

erscheinen.

Die Grössen σ, τ und $s_{ik,\mu\nu}$ bestimmen nun stets dann aber auch nur dann ein dem Elemente erster Ordnung x, u angehöriges Element zweiter Ordnung, wenn es möglich ist, zwei von einander verschiedene Elemente $x + dx$, $u + du$ und $x + \delta x$, $u + \delta u$ so zu wählen, dass die Bedingungen (13) und (16) erfüllt sind und ausserdem die Gleichungen (18), (19), (20) bestehen.

Hieraus ergiebt sich, dass ein Werthsystem x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ dann und nur dann ein Element zweiter Ordnung darstellt, wenn es gewissen endlichen Bedingungsgleichungen genügt. Eine davon ist selbstverständlich:

$$(24)\qquad (ux) = 0.$$

Um die übrigen möglichst einfach und übersichtlich angeben zu können, wollen wir festsetzen, dass die Zeichen x_i, u_i, dx_i, du_i, δx_i, δu_i nur da angewendet werden sollen, wo es uns auf die betreffenden Elemente erster Ordnung selbst ankommt, dagegen wollen wir, sobald es sich um die durch diese Grössen bestimmten Koordinaten $s_{ik,\mu\nu}$ handelt, deutsche Buchstaben benutzen, also: $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{u}_i$, $d\mathfrak{x}_i$, $\cdots$, $\delta\mathfrak{u}_i$, und wenn ein Ausdruck von zweitem oder höherem Grade in den $s_{ik,\mu\nu}$ darzustellen ist, wollen wir mehrere Reihen solcher Grössen benutzen, also: $\mathfrak{x}_i$, $\cdots$, $\delta\mathfrak{u}_i$; $\mathfrak{x}_i'$, $\cdots$, $\delta\mathfrak{u}_i'$; $\mathfrak{x}_i''$, $\cdots$, $\delta\mathfrak{u}_i''$ und so weiter. Die deutschen Buchstaben sind mithin so zu verstehen, dass immer:

$$(25)\quad \begin{cases} (\xi\mathfrak{x}d\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x}) = \tau(\xi u), \quad (vudu\delta u) = \sigma(vx) \\ \begin{vmatrix} (\xi\eta\mathfrak{x}d\mathfrak{x})(\xi'\eta'\mathfrak{x}d\mathfrak{x}) \\ (\xi\eta\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x})(\xi'\eta'\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x}) \end{vmatrix} = \tau \begin{vmatrix} (\xi'\eta'\xi x) & (\xi'\eta'\eta x) \\ (\xi u) & (\eta u) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (vwudu)(v'w'udu) \\ (vwu\delta u)(v'w'u\delta u) \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} (v'w'vu)(v'w'wu) \\ (vx) \quad (wx) \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_i d\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_k d\mathfrak{x}_i & \mathfrak{u}_\mu d\mathfrak{u}_\nu - \mathfrak{u}_\nu d\mathfrak{u}_\mu \\ \mathfrak{x}_i\delta\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_k\delta\mathfrak{x}_i & \mathfrak{u}_\mu\delta\mathfrak{u}_\nu - \mathfrak{u}_\nu\delta\mathfrak{u}_\mu \end{vmatrix} = s_{ik,\mu\nu} \end{cases}$$

für jeden Punkt ξ, η, ξ', η' und für jede Ebene v, w, v', w', dass aber auch nur die hier vorkommenden Verbindungen der $\mathfrak{x}_i, \cdots, \delta\mathfrak{u}_i$ eine reelle Bedeutung haben.[1])

Die zwischen den Grössen x_i, u_i, σ, $s_{ik,\mu\nu}$, τ bestehenden endlichen Gleichungen zerfallen nun, von (24) abgesehen, in vier Kategorien:

I. Solche, die sich nur auf das Verhalten der $s_{ik,\mu\nu}$ bei Vertauschung von Indices beziehen:

$$(26)\qquad s_{ik,\mu\nu} + s_{ki,\mu\nu} = 0, \quad s_{ik,\mu\nu} + s_{ik,\nu\mu} = 0.$$

II. Gewisse Relationen für die $s_{ik,\mu\nu}$, die sich sofort aus der Definition dieser Grössen ergeben, nämlich:

$$(27)\qquad \begin{cases} x_i s_{kj,\mu\nu} + x_k s_{ji,\mu\nu} + x_j s_{ik,\mu\nu} = 0 \\ u_\mu s_{ik,\nu\pi} + u_\nu s_{ik,\pi\mu} + u_\pi s_{ik,\mu\nu} = 0 \\ \sum_i^{1\ldots4} u_i s_{ik,\mu\nu} = 0, \quad \sum_\mu^{1\ldots4} x_\mu s_{ik,\mu\nu} = 0. \end{cases}$$

Wir können jedoch offenbar alle diese Relationen in die folgenden zusammenfassen:

$$(28)\qquad \begin{cases} (\xi x\mathfrak{x}d\mathfrak{x})(vwu\delta u) - (\xi x\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x})(vwudu) = 0 \\ (\xi\eta\mathfrak{x}d\mathfrak{x})(vuu\delta u) - (\xi\eta\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x})(vuudu) = 0 \end{cases}$$

und:

$$(29)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} (u\mathfrak{x}) & (v\mathfrak{x}) \\ (ud\mathfrak{x}) & (vd\mathfrak{x}) \end{vmatrix} (v'v''u\delta u) - \begin{vmatrix} (u\mathfrak{x}) & (v\mathfrak{x}) \\ (u\delta\mathfrak{x}) & (v\delta\mathfrak{x}) \end{vmatrix} (v'v''udu) = 0 \\ \begin{vmatrix} (xu) & (\xi u) \\ (xdu) & (\xi du) \end{vmatrix} (\xi'\xi''\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x}) - \begin{vmatrix} (xu) & (\xi u) \\ (x\delta u) & (\xi\delta u) \end{vmatrix} (\xi'\xi''\mathfrak{x}d\mathfrak{x}) = 0, \end{cases}$$

1) Diese Bezeichnungsweise lässt sich durch eine noch kürzere ersetzen, wenn man die von STUDY erdachte symbolische Darstellung der alternirenden Formen unserm Falle anpasst, doch will ich das für jetzt nicht ausführen, um das Verständniss nicht unnöthig zu erschweren.

wo ξ, η, ξ', ξ'' willkürliche Punkte und v, w, v', v'' willkürliche Ebenen sind.

III. Die Relationen zwischen den $s_{ik,\mu\nu}$, die in (15″) enthalten sind. Wir müssen, um diese sämtlich zu bekommen, erst (15″) so umgestalten, dass es Gleichungen zwischen den $s_{ik,\mu\nu}$ darstellt. Dazu gelangen wir leicht, indem wir etwa die Ebene v durch drei ihrer Punkte ξ', ξ'', ξ''' ausdrücken und also zum Beispiel $(vx) = (\xi'\xi''\xi'''x)$ setzen. Nun ist bekanntlich identisch:

$$(\xi\eta\zeta x)(dx\delta u) = (\xi\eta\zeta dx)(x\delta u) + (\xi\eta dx x)(\xi\delta u) + \\ + (\xi dx\zeta x)(\eta\delta u) + (dx\eta\zeta x)(\xi\delta u);$$

wenden wir das auf (15″) an und schreiben wir nach der vorhin getroffenen Verabredung $\mathfrak{x}_i, \cdots, \delta\mathfrak{u}_i$ an Stelle von $x_i, \cdots, \delta u_i$, so erhalten wir die gewünschten Relationen zwischen den $s_{ik,\mu\nu}$ in der Gestalt:

$$(30)\quad \begin{cases} \Sigma(\xi\xi'\mathfrak{x}d\mathfrak{x})\{(\xi''\mathfrak{u})(\xi'''\delta\mathfrak{u}) - (\xi'''\mathfrak{u})(\xi''\delta\mathfrak{u})\} - \\ - \Sigma(\xi\xi'\mathfrak{x}\delta x)\{(\xi''\mathfrak{u})(\xi'''d\mathfrak{u}) - (\xi'''\mathfrak{u})(\xi''d\mathfrak{u})\} = 0, \end{cases}$$

wo ξ, ξ', ξ'', ξ''' willkürliche Punkte bedeuten und wo Σ die cyklische Summe in Bezug auf die Accente von ξ', ξ'', ξ''' bezeichnet. Die Beschränkung $(v\xi) = 0$, unter der (15″) abgeleitet war, fällt also weg.

Die in (30) enthaltenen Relationen besitzen, wie beiläufig bemerkt sein mag, die Form:

$$(31)\quad \begin{cases} s_{\lambda\mu,\mu\pi} + s_{\lambda\nu,\nu\pi} = 0 \\ s_{\lambda\mu,\lambda\mu} = s_{\nu\pi,\nu\pi} \\ s_{\lambda\mu,\lambda\mu} + s_{\mu\nu,\mu\nu} + s_{\nu\lambda,\nu\lambda} = 0 \\ s_{\pi\lambda,\pi\lambda} + s_{\pi\mu,\pi\mu} + s_{\pi\nu,\pi\nu} = 0, \end{cases}$$

unter λ, μ, ν, π irgend eine Anordnung der Zahlen $1 \cdots 4$ verstanden.

Es ist von vornherein klar, dass der Inbegriff dieser Relationen bei allen projektiven Transformationen des Raumes invariant bleibt. Beachtet man überdies, dass die dualistische Transformation $x_i' = u_i$, $u_i' = x_i$ bei Hinzunahme der Grössen σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ die folgende erweiterte Transformation liefert:

$$(32)\quad x_i' = u_i,\ u_i' = x_i,\ \sigma' = \tau,\ \tau' = \sigma,\ s'_{ik,\mu\nu} = -s_{\mu\nu,ik}$$

und dass diese Transformation in den Symbolen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{u}$ einfach durch $\mathfrak{x}_i' = \mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{u}_i' = \mathfrak{x}_i$ dargestellt werden kann, so erkennt man sofort, dass der Inbegriff der Relationen (30) auch bei allen dualistischen Transformationen invariant bleibt.

IV. Hierzu kommen endlich gewisse Relationen vom zweiten Grade in σ, τ und den $s_{ik,\mu\nu}$. Diese Relationen ergeben sich aus den bekannten Identitäten zwischen den Determinanten einer zweireihigen Matrix, angewendet auf den Fall der Matrix (17).

Statt dieser Matrix setzen wir zunächst eine andre zweireihige, in der jede Spalte eine der beiden Formen:

$$\begin{matrix}(\xi\eta x dx) & (vwudu)\\ (\xi\eta x\delta x) & (vwu\delta u)\end{matrix}$$

hat, unter ξ, η beliebige Punkte und unter v, w beliebige Ebenen verstanden. Die erwähnten Identitäten benutzen wir in der Form:

$$(33)\qquad \begin{vmatrix} ab\\ cd\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha\\ c\beta\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b\beta\\ d\delta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a\beta\\ c\delta\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b\alpha\\ d\gamma\end{vmatrix}.$$

Wir wenden (33) zuerst auf das Produkt:

$$\begin{vmatrix}(\xi\eta x dx)(vwudu)\\ (\xi\eta x\delta x)(vwu\delta u)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(\xi'\eta' x dx)(v'w'udu)\\ (\xi'\eta' x\delta x)(v'w'u\delta u)\end{vmatrix}$$

an, berücksichtigen (21) und führen die früher verabredete Schreibweise für die $s_{ik,\mu\nu}$ ein; auf diese Weise kommt:

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix}(\xi\eta\mathfrak{x}d\mathfrak{x})(vwud\mathfrak{u})\\ (\xi\eta\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x})(vwu\delta\mathfrak{u})\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(\xi'\eta'\mathfrak{x}'d\mathfrak{x}')(v'w'u'du')\\ (\xi'\eta'\mathfrak{x}'\delta\mathfrak{x}')(v'w'u'\delta u')\end{vmatrix} -\\ &-\begin{vmatrix}(\xi\eta\mathfrak{x}d\mathfrak{x})(v'w'ud\mathfrak{u})\\ (\xi\eta\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x})(v'w'u\delta\mathfrak{u})\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(\xi'\eta'\mathfrak{x}'d\mathfrak{x}')(vwu'du')\\ (\xi'\eta'\mathfrak{x}'\delta\mathfrak{x}')(vwu'\delta u')\end{vmatrix} =\\ &=\sigma\tau\begin{vmatrix}(\xi u) & (\eta u)\\ (\xi'\eta'\xi x) & (\xi'\eta'\eta x)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(vx) & (wx)\\ (v'w'vu) & (v'w'wu)\end{vmatrix}.\end{aligned}\right.$$

Hiermit sind alle die gesuchten Relationen gefunden, in denen ein Produkt zweier $s_{ik,\mu\nu}$ vorkommt und zugleich alle die, in denen das Produkt $\sigma\cdot\tau$ vorkommt. Es ist klar, dass der Inbegriff aller dieser Relationen bei allen projektiven und bei allen dualistischen Transformationen des Raumes invariant bleibt.

Die noch fehlenden Relationen erhalten wir, wenn wir (33) auf das Produkt:

$$(35)\qquad \begin{vmatrix} (\xi\eta x dx)(\xi'\eta' x dx) \\ (\xi\eta x\delta x)(\xi'\eta' x\delta x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\xi''\eta'' x dx)(vwudu) \\ (\xi''\eta'' x\delta x)(vwu\delta u) \end{vmatrix}$$

oder auf den dazu dualistischen Ausdruck anwenden. Aus (35) ergiebt sich durch Benutzung von (33) und (21) eine Relation, die den Faktor τ enthält und nach Weglassung von τ in den $s_{ik,\mu\nu}$ linear wird:

$$(36)\qquad \sum \begin{vmatrix} (\xi u) & (\eta u) \\ (\xi'\eta'\xi x) & (\xi'\eta'\eta x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (\xi''\eta''\xi d\xi)(vwudu) \\ (\xi''\eta''\xi\delta\xi)(vwu\delta u) \end{vmatrix} = 0,$$

wo $\sum$ die cyklische Summe über die Accente von $\xi\eta$, $\xi'\eta'$, $\xi''\eta''$ bedeutet. Aus dem zu (35) dualistischen Produkte ergiebt sich natürlich die zu (36) dualistische Gleichung.

Aber (36) ist keine neue Relation zwischen den $s_{ik,\mu\nu}$, sondern ist eine Folge von (28) und (29).

In der That, es ist wegen $(ux) = 0$:

$$\begin{vmatrix} (\xi''u) & (\eta''u) \\ (\xi\eta\xi'' x) & (\xi\eta\eta'' x) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} (\xi u) & (\eta u) \\ (\xi''\eta''\xi x) & (\xi''\eta''\eta x) \end{vmatrix}$$

und ferner:

$$(\xi' u) \begin{vmatrix} (\xi\eta\xi d\xi)(vwudu) \\ (\xi\eta\xi\delta\xi)(vwu\delta u) \end{vmatrix} = (\xi u) \begin{vmatrix} (\xi'\eta\xi d\xi)(vwudu) \\ (\xi'\eta\xi\delta\xi)(vwu\delta u) \end{vmatrix} + (\eta u) \begin{vmatrix} (\xi\xi'\xi d\xi)(vwudu) \\ (\xi\xi'\xi\delta\xi)(vwu\delta u) \end{vmatrix},$$

weil die beiden andern Glieder, die rechts eigentlich noch hinzukommen, nach (29) verschwinden. Gestalten wir auf diese Weise die linke Seite von (36) so um, dass u nur in den Verbindungen (ξu) und (ηu) vorkommt, so erhält zum Beispiel $(\xi u)(vwu\delta u)$ den Faktor:

$$(\xi'\eta'\eta x)(\xi''\eta''\xi d\xi) - (\xi''\eta''\eta x)(\xi'\eta'\xi d\xi) + (\xi''\eta''\eta' x)(\xi'\eta\xi d\xi) - (\xi''\eta''\xi' x)(\eta'\eta\xi d\xi),$$

den wir der Kürze wegen mit L bezeichnen wollen. Nun ist:

$$\begin{aligned}(\xi'\eta'\eta x)(\xi''\eta''\xi d\xi) = &- (\xi'\eta'\eta d\xi)(\xi''\eta'' x\xi) + \\ &+ (\xi'\eta' x d\xi)(\xi''\eta'\eta\xi) - \\ &- (\xi'\eta x d\xi)(\xi''\eta''\eta'\xi) + \\ &+ (\eta'\eta x d\xi)(\xi''\eta''\xi'\xi).\end{aligned}$$

Hier vertauschen wir ξ mit $d\xi$, ziehen die entstehende Gleichung von der letzten ab und dividiren mit zwei, dann wird zum Beispiel:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(\xi'\eta'\eta\xi)(\xi''\eta''xd\xi) - \tfrac{1}{2}(\xi'\eta'\eta d\xi)(\xi''\eta''x\xi) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\xi'\eta'\eta x)(\xi''\eta''\xi d\xi) + \tfrac{1}{2}(\xi'\eta'\eta\xi'')(\eta''x\xi d\xi) - \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}(\xi'\eta'\eta\eta'')(\xi''x\xi d\xi),\end{aligned}$$

wo die beiden letzten Glieder nach (28) zur linken Seite von (36) den Beitrag Null liefern. Ferner wird:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(\xi''\eta''\eta\xi)(\xi'\eta'xd\xi) - \tfrac{1}{2}(\xi''\eta''\eta d\xi)(\xi'\eta'x\xi) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\xi''\eta''\eta x)(\xi'\eta'\xi d\xi) + \cdots,\end{aligned}$$

wo die weggelassenen Glieder ebenfalls nach (28) zur linken Seite von (36) den Beitrag Null liefern. Auf diese Weise kommt schliesslich: $L = \frac{1}{2}L + \cdots$, wo die weggelassenen Glieder zur linken Seite von (36) den Beitrag Null liefern.

Demnach ist (36) wirklich eine Folge von (28) und (29) und dasselbe gilt natürlich von der zu (36) dualistischen Gleichung.

Ausser den Relationen (34) finden wir also auf dem angegebenen Wege keine neuen Relationen zwischen σ, τ und den $s_{ik,\mu\nu}$.

Es ist jetzt noch zu zeigen, dass hiermit alle Relationen erschöpft sind, die bestehen müssen, wenn ein Werthsystem x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ ein Element zweiter Ordnung darstellen soll. Das aber sieht man folgendermassen ein:

Nach dem Früheren ist jedes dem Elemente erster Ordnung x_i, u_i angehörige Element zweiter Ordnung x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ durch ∞^1 dem Elemente x_i, u_i unendlich benachbarte und mit ihm vereinigt liegende Elemente erster Ordnung bestimmt, die so beschaffen sind, dass je zwei unter ihnen: $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ und $x_i + \delta x_i$, $u_i + \delta u_i$ die Bedingung (16) erfüllen. Die Koordinaten σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ des Elements zweiter Ordnung sind dann, natürlich abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor, durch die Gleichungen (18) und (21) definirt. Hieraus folgt, dass die eben erwähnten ∞^1 Elemente erster Ordnung den Gleichungen genügen, die man durch Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} x_i dx_k - x_k dx_i & u_i du_k - u_k du_i \\ \xi_i d\xi_k - \xi_k d\xi_i & \mathfrak{u}_i d\mathfrak{u}_k - \mathfrak{u}_k d\mathfrak{u}_i \\ \xi_i \delta\xi_k - \xi_k \delta\xi_i & \mathfrak{u}_i \delta\mathfrak{u}_k - \mathfrak{u}_k \delta\mathfrak{u}_i \end{vmatrix}_{(i,k,\mu,\nu=1\ldots4)}$$

erhält, wo die ξ, $d\xi$, $\cdots$ die früher erklärte Bedeutung haben.

Ein Werthsystem x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$, für das $(ux) = 0$ ist, wird stets dann aber auch nur dann ein Element zweiter Ordnung darstellen, wenn den durch Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten von (37) entstehenden Gleichungen gerade ∞^1 verschiedene dem Elemente x_i, u_i unendlich benachbarte Elemente $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ genügen, die die bekannten Bedingungen:

$$(38) \qquad (ux) = 0, \quad (udx) = 0, \quad (xdu) = 0$$

erfüllen und die überdies so beschaffen sind, dass je zwei unter ihnen: $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ und $x_i + \delta x_i$, $u_i + \delta u_i$ die Gleichung:

$$(16) \qquad (dx\delta u) - (\delta x du) = 0$$

erfüllen.

Nun ist bekannt, dass die $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ Gleichungen

$$(39) \qquad q_{ik}z_j + q_{kj}z_i + q_{ji}z_k = 0 \qquad (i,k,j = 1 \ldots m)$$

in denen $q_{ik} + q_{ki} = 0$ ist, stets dann aber auch nur dann von ∞^1 verschiedenen Werthsystemen der Verhältnissgrössen $z_1, \cdots, z_m$ befriedigt werden, wenn die q_{ik} alle Gleichungen von der Form:

$$(40) \qquad q_{ik}q_{jl} + q_{kj}q_{il} + q_{ji}q_{kl} = 0$$

erfüllen. Die Gleichungen (40) sind aber für das System (39) genau dasselbe, was die vorhin unter IV von uns aufgestellten Relationen zwischen den zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$(17') \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_i d\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_k d\mathfrak{x}_i & \mathfrak{u}_\mu du_\nu - \mathfrak{u}_\nu d\mathfrak{u}_\mu \\ \mathfrak{x}_i \delta\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_k \delta\mathfrak{x}_i & \mathfrak{u}_\mu \delta\mathfrak{u}_\nu - \mathfrak{u}_\nu \delta\mathfrak{u}_\mu \end{vmatrix}_{(i,k,\mu,\nu = 1 \ldots 4)}$$

für das Gleichungensystem sind, das durch Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten von (37) entsteht.

Hiernach ist klar, dass die eben erwähnten Gleichungen sicher von gerade ∞^1 Werthsystemen der Verhältnissgrössen $x_i dx_k - x_k dx_i$, $u_\mu du_\nu - u_\nu du_\mu$ befriedigt werden, wenn die Grössen x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ den Gleichungen (34), (28) und (29) genügen. Es fragt sich daher nur noch, ob diese ∞^1 Werthsysteme so beschaffen sind, dass zugleich auch die Relationen (38) erfüllt sind und dass je zwei verschiedene unter ihnen (16) befriedigen.

Um diesen Punkt ins Reine zu bringen, wollen wir zunächst die Gleichungen aufstellen, die durch Nullsetzen der Determinanten von (37) entstehen. Wir können sie zusammenfassen in Glei-

chungen, die durch Nullsetzen dreireihiger Determinanten entstehen, deren Spalten eine der beiden Formen:

$$\begin{matrix}(\xi\eta x dx) & (vwudu)\\ (\xi\eta\mathfrak{x}d\mathfrak{x}) & (vwud\mathfrak{u})\\ (\xi\eta\mathfrak{x}\delta\mathfrak{x}) & (vwu\delta\mathfrak{u})\end{matrix}$$

besitzen, unter ξ, η willkürliche Punkte, unter v, w willkürliche Ebenen verstanden.

Setzt man zunächst eine derartige Determinante gleich Null, in der nur die x vorkommen, und benutzt man dabei neben ξ, η die beliebigen Punkte ξ', η', ξ'', η'', so ergiebt sich auf Grund von (21) nach Weglassung des Faktors τ die Gleichung:

$$(41)\qquad \Sigma\begin{vmatrix}(\xi u) & (\eta u)\\ (\xi'\eta'\xi x) & (\xi'\eta'\eta x)\end{vmatrix}(\xi''\eta'' x dx)=0,$$

in der Σ die cyklische Summe in Bezug auf die Accente bedeutet. Nun ist wegen $(ux)=0$:

$$(\xi' u)(\xi\eta x dx)=(\xi u)(\xi'\eta x dx)+(\eta u)(\xi\xi' x dx)-(udx)(\xi\eta\xi' x)$$

und:

$$\begin{vmatrix}(\xi'' u) & (\eta'' u)\\ (\xi\eta\xi'' x) & (\xi\eta\eta'' x)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}(\xi u) & (\eta u)\\ (\xi''\eta''\xi x) & (\xi''\eta''\eta x)\end{vmatrix}.$$

Gestaltet man auf diese Weise die linke Seite von (41) so um, dass u nur in den Verbindungen (ξu), (ηu), (udx) vorkommt, so erhält zum Beispiel (ξu) den Faktor:

$$(\xi'\eta'\eta x)(\xi''\eta'' x dx)-(\xi''\eta''\eta x)(\xi'\eta' x dx)+$$
$$+(\xi''\eta''\eta' x)(\xi'\eta x dx)-(\xi''\eta''\xi' x)(\eta'\eta x dx),$$

der offenbar identisch verschwindet. Folglich reducirt sich (41) auf

$$\{(\xi''\eta''\eta' x)(\xi\eta\xi' x)-(\xi''\eta''\xi' x)(\xi\eta\eta' x)\}(udx)=0$$

oder, da der Faktor von (udx) nicht identisch verschwindet, auf $(udx)=0$.

Setzt man andrerseits eine dreireihige Determinante gleich Null, in der nur die u vorkommen, so bekommt man auf dieselbe Weise wegen $(ux)=0$ eine Gleichung, die sich auf $(xdu)=0$ reducirt.

Demnach werden die Gleichungen (38) ganz von selbst erfüllt.

Uebrig bleiben noch die dreireihigen Determinanten, in denen entweder zwei Spalten mit x und blos eine mit u vorkommen

oder zwei Spalten mit u und blos eine mit x. Diese Determinanten liefern gleich Null gesetzt zwei zu einander dualistische Gleichungen, die wir unter Benutzung von (25) so schreiben:

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} \tau\cdot\begin{vmatrix}(\xi u) & (\eta u)\\ (\xi'\eta'\xi x) & (\xi'\eta'\eta x)\end{vmatrix}(vwudu)= \\ =\begin{vmatrix}(\xi'\eta'\xi d\xi) & (vwudu)\\ (\xi'\eta'\xi\delta\xi) & (vwu\delta u)\end{vmatrix}(\xi\eta x dx)- \\ -\begin{vmatrix}(\xi\eta\xi d\xi) & (vwudu)\\ (\xi\eta\xi\delta\xi) & (vwu\delta u)\end{vmatrix}(\xi'\eta' x dx)\end{array}\right.$$

und:

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma\cdot\begin{vmatrix}(vx) & (wx)\\ (v'w'vu) & (v'w'wu)\end{vmatrix}(\xi\eta x dx)= \\ =\begin{vmatrix}(v'w'udu) & (\xi\eta\xi d\xi)\\ (v'w'u\delta u) & (\xi\eta\xi\delta\xi)\end{vmatrix}(vwudu)- \\ -\begin{vmatrix}(vwudu) & (\xi\eta\xi d\xi)\\ (vwu\delta u) & (\xi\eta\xi\delta\xi)\end{vmatrix}(v'w'udu).\end{array}\right.$$

Es ist klar, dass der Inbegriff der in (42) und (43) enthaltenen Gleichungen bei allen projektiven und dualistischen Transformationen invariant bleibt und identisch ist mit dem Inbegriffe aller Gleichungen, die aus (23) durch die projektiven und dualistischen Transformationen erhalten werden.

Nunmehr steht fest, dass immer dann, wenn die Grössen σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ den Gleichungen (28), (29) und (34) genügen, es gerade ∞^1 dem Elemente x_i, u_i unendlich benachbarte und mit ihm vereinigte Elemente $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ giebt, die den Gleichungen (38), (42) und (43) genügen. Zu beweisen bleibt nur noch, dass immer dann, wenn die $s_{ik,\mu\nu}$ ausserdem auch noch die Bedingungen (30) erfüllen, je zwei der betreffenden ∞^1 Elemente in der Beziehung (16) stehen.

Aber das zu zeigen ist sehr leicht. Sind nämlich $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ und $x_i + \delta x_i$, $u_i + \delta u_i$ zwei verschiedene Elemente, die den Gleichungen (38), (42) und (43) genügen, so lassen sich offenbar σ, τ und die $s_{ik,\mu\nu}$ durch die Grössen x_i, u_i, dx_i, $\cdots$, δu_i ausdrücken und man erhält, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, genau die Formeln (18) und (21). Erfüllen nun die $s_{ik,\mu\nu}$ überdies die Bedingung (30), so genügen x_i, u_i, dx_i, $\cdots$, δu_i der

Bedingung, die aus (30) hervorgeht, wenn man die deutschen Buchstaben durch die lateinischen ersetzt. Aber diese letztere Bedingung ist nur eine identische Umformung von (15″), vorausgesetzt, dass in (15″) die Ebene v durch irgend drei ihrer Punkte ξ', ξ'', ξ''' ersetzt wird, und da die Elemente $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ und $x_i + \delta x_i$, $u_i + \delta u_i$ beide mit x_i, u_i vereinigt liegen, so reducirt sich (15) auf:

$$(\xi'\xi''\xi'''x)\,(\xi u)\,\{(dx\,\delta u) - (\delta x\,du)\} = 0,$$

das heisst, die Gleichung (16) ist wirklich erfüllt.

Durch das Vorstehende ist vollständig bewiesen, *dass jedes dem Elemente erster Ordnung* x_i, u_i $(xu) = 0$ *angehörige Element zweiter Ordnung durch ein Werthsystem* x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ *definirt wird, das den Gleichungen* (28), (29), (30) *und* (34) *genügt und dass diese Bedingungen nicht blos nothwendig, sondern auch hinreichend sind, wenn das Werthsystem* x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ *ein Element zweiter Ordnung bestimmen soll.*

Ferner: *Die* ∞^1 *dem Elemente* x_i, u_i *unendlich benachbarten und mit ihm vereinigten Elemente erster Ordnung, die das Element zweiter Ordnung* x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ *bestimmen, sind durch die Gleichungen* (38), (42) *und* (43) *definirt und sind so beschaffen, dass je zwei unter ihnen die Gleichung* (16) *befriedigen.*

Wir können daher, wie nebenbei erwähnt sein mag, die Gleichungen (38), (42) und (43) als Definitionsgleichungen für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarter Elemente zweiter Ordnung: x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ und $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$, $\sigma + d\sigma$, $\tau + d\tau$, $s_{ik,\mu\nu} + ds_{ik,\mu\nu}$ benutzen.

Die von uns aufgestellten Koordinaten x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ für die Elemente zweiter Ordnung des Raumes sind selbstverständlich so beschaffen, dass weder alle x, noch alle u, noch alle Grössen σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$ gleichzeitig verschwinden können. Ausserdem zeigt die Definition der σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$, dass bei ganz beliebigen α, β, γ jedes Werthsystem:

$$\alpha x_i, \quad \beta u_i, \quad \beta^3\alpha^{-1}\gamma\sigma, \quad \alpha^3\beta^{-1}\gamma\tau, \quad \alpha^3\beta^3\gamma s_{ik,\mu\nu}$$

oder wenn man lieber will, jedes Werthsystem:

$$\alpha x_i, \quad \beta u_i, \quad \beta^4\gamma\sigma, \quad \alpha^4\gamma\tau, \quad \alpha^3\beta^3\gamma s_{ik,\mu\nu}$$

dasselbe Element zweiter Ordnung darstellt wie das Werthsystem x_i, u_i, σ, τ, $s_{ik,\mu\nu}$, dass aber diese Werthsysteme auch die einzigen sind, von denen das gilt.

Wir haben schon erwähnt, dass $\sigma = 0$ die Differentialgleichung aller abwickelbaren Flächen ist und $\tau = 0$ die aller Kurven. Jetzt wollen wir noch zeigen, dass sich in diesen beiden besondern Fällen die Ausdrücke für die Elemente zweiter Ordnung wesentlich vereinfachen.

Es sei etwa x_i, u_i ein Element erster Ordnung einer Kurve, die aber nicht auf einen Punkt zusammenschrumpfen darf, und $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$, $x_i + \delta x_i$, $u_i + \delta u_i$ seien zwei von einander verschiedene, unendlich benachbarte Elemente der Kurve. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Punkt $x_i + \delta x_i$ mit dem Punkte x_i zusammenfällt, während $x_i + dx_i$ das nicht thut. Unter dieser Voraussetzung ist $\delta x_i = x_i \delta t$ und aus der Bedingung (16), die selbstverständlich erfüllt sein muss, folgt:

$$(dx\,\delta u) = 0.$$

Da die Ebene $u_i + \delta u_i$ offenbar durch die Tangente im Punkte x_i geht, aber von der Ebene u_i verschieden sein muss, so können wir für jeden Punkt ξ setzen:

$$(\xi\,\delta u) = (\xi\zeta x dx),$$

wo ζ einen Punkt bedeutet, der nur der Beschränkung unterliegt, nicht auf der Ebene u liegen zu dürfen.

Nun wird für jede Ebene w:

$$(wu du\,\delta u)\,(\xi\zeta x dx) = \begin{vmatrix} (w\xi) & (w\zeta) & (wx) & (wdx) \\ (u\xi) & (u\zeta) & 0 & 0 \\ (du\xi) & (du\zeta) & 0 & (dudx) \\ (\delta u\xi) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

wo sich die rechte Seite auf $(\xi\,\delta u)\,(u\zeta)\,(wx)\,(dudx)$ reducirt, also kommt:

$$(wu du\,\delta u) = (u\zeta)\,(wx)\,(dudx)$$

und nach (20):

$$\sigma = (u\zeta)\,(dudx).$$

Ist u insbesondere die Schmiegungsebene der Kurve, was im Falle einer Geraden immer eintritt, so wird $(dudx) = 0$, also $\sigma = 0$.

Ferner ist:

$$\begin{vmatrix} (\xi' u) & (\eta' u) \\ (\xi'\,\delta u) & (\eta'\,\delta u) \end{vmatrix} = -\,(u\zeta)\,(\xi'\eta' x dx),$$

also kommt wegen $\delta x_i = x_i \delta t$:

$$(\xi\eta x dx)\begin{vmatrix}(\xi' u) & (\eta' u)\\ (\xi'\delta u) & (\eta'\delta u)\end{vmatrix} - (\xi\eta x\delta x)\begin{vmatrix}(\xi' u) & (\eta' u)\\ (\xi' du) & (\eta' du)\end{vmatrix} = \\ = -(u\zeta)(\xi\eta x dx)(\xi'\eta' x dx),$$

wodurch die $s_{ik,\mu\nu}$ bestimmt sind.

Wir können demnach sagen: Bei einer Kurve ist das zu einem Elemente erster Ordnung x_i, u_i der Kurve gehörige Element zweiter Ordnung schon durch *ein* unendlich benachbartes Element erster Ordnung $x_i + dx_i$, $u_i + du_i$ der Kurve bestimmt, vorausgesetzt, dass der Punkt $x_i + dx_i$ nicht mit dem Punkte x_i zusammenfällt, und zwar kann man setzen:

$$(44)\quad \tau = 0,\ \sigma = -(dudx),\ s_{ik,\mu\nu} = (x_i dx_k - x_k dx_i)(x_\pi dx_\varrho - x_\varrho dx_\pi),$$

wo μ, ν, π, ϱ eine gerade Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3, 4 bedeutet.

Bei einer Geraden, die durch die Punkte α, β oder durch die Ebenen l, m bestimmt ist und deren Linienkoordinaten

$$p_{ik} = \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i,\quad q_{ik} = l_i m_k - l_k m_i$$

sind, ergiebt sich daher:

$$(45)\qquad \sigma = \tau = 0,\quad s_{ik,\mu\nu} = p_{ik} q_{\mu\nu}.$$

Die entsprechenden Formeln für die Elemente zweiter Ordnung einer abwickelbaren Fläche, die aber keine Ebene sein darf, lauten:

$$(46)\quad \sigma = 0,\ \tau = (dudx),\ s_{ik,\mu\nu} = (u_j du_i - u_i du_j)(u_\mu du_\nu - u_\nu du_\mu),$$

wo i, k, j, l eine gerade Vertauschung der Zahlen 1, $\cdots$, 4 ist. Aus ihnen ergeben sich natürlich für die Elemente zweiter Ordnung einer Geraden wieder die Formeln (45). Vorausgesetzt wird bei (46), dass die beiden Ebenen u_i und $u_i + du_i$ nicht zusammenfallen. Ist x_i ein Punkt auf der Rückkehrkante der Fläche, so wird $(dudx) = 0$, also auch $\tau = 0$.

Für die Elemente zweiter Ordnung eines Punktes ist: $\tau = 0$, $s_{ik,\mu\nu} = 0$ und für die einer Ebene: $\sigma = 0$, $s_{ik,\mu\nu} = 0$ und es ist klar, dass diese Gleichungen geradezu als Definitionsgleichungen der Punkte und der Ebenen benutzt werden können, während die Geraden durch das System der beiden Differentialgleichungen: $\sigma = \tau = 0$ definirt sind.

Wir wollen noch für einige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Formeln ermitteln, die sie in den neuen Elementkoordinaten erhalten.

Die Differentialgleichung der Minimalflächen des Euklidischen Raumes:

$$r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2) = 0 \tag{47}$$

erhält durch die Substitutionen (14) und (22) die Gestalt:

$$(u_2^2 + u_3^2)\, s_{42,31} + u_1 u_2 (s_{41,31} + s_{42,23}) + (u_1^2 + u_3^2)\, s_{41,23} = 0,$$

wo im Zähler der Faktor x_4 und im Nenner der Faktor $u_3^3 \cdot \tau$ weggelassen ist. Aber nach (27) hat man;

$$u_1 s_{41,\mu\nu} + u_2 s_{42,\mu\nu} + u_3 s_{43,\mu\nu} = 0,$$

also kommt, bei Weglassung des Faktors u_3^2:

$$s_{41,23} + s_{42,31} + s_{43,12} = 0. \tag{47'}$$

Man sieht hieraus unter anderm nach (44), dass eine Kurve der Differentialgleichung der Minimalflächen dann und nur dann genügt, wenn sie die Bedingung

$$(x_4 dx_1 - x_1 dx_4)^2 + (x_4 dx_2 - x_2 dx_4)^2 + (x_3 dx_4 - x_4 dx_3)^2 = 0$$

erfüllt. Der Inbegriff der betreffenden Kurven besteht also aus allen Kurven von der Länge Null (vgl. meine auf S. 18 angeführte Note von 1893) und aus den sämtlichen Kurven der unendlich fernen Ebene.

Man kann natürlich die Differentialgleichung (47') der Minimalflächen auch direkt ableiten, doch verschiebe ich das auf eine andere Gelegenheit, wo ich diese Differentialgleichung sogleich für eine beliebige projektive Massbestimmung aufstellen werde. —

Nach Lie hat die partielle Differentialgleichung aller Flächen, deren eine Schaar von Haupttangentenkurven dem linearen Komplexe: $dz + xdy - ydx = 0$ angehört, die Gestalt:

$$(x+q)^2 r + 2(x+q)(y-p)s + (y-p)^2 t = 0 \tag{48}$$

(s. Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, bearbeitet von Lie und Scheffers, S. 374). Aus (48) ergiebt sich nun:

$$(x_1 u_3 - x_4 u_2)^2 s_{42,31} - (x_1 u_3 - x_4 u_2)(x_2 u_3 + x_4 u_1)(s_{41,31} + s_{42,23}) + \\ + (x_2 u_3 + x_4 u_1)^2 s_{41,23} = 0,$$

aber es ist nach (27):

$$x_1 s_{42,\mu\nu} - x_2 s_{41,\mu\nu} = x_4 s_{12,\mu\nu},$$

INHALT.

Seite

Alfred Loewy, Ueber die irreduciblen Factoren eines linearen homogenen Differentialausdruckes 1

An die Royal Society in London als leitende Gesellschaft der internationalen Association der Akademieen. Antrag d. Kön. Sächs. Ges. d. Wissenschaften 14

Friedrich Engel, Die höheren Differentialquotienten 17

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Z Soc 1726,9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

II.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Einzelpreis 70 Pfg.

SITZUNG VOM 3. MÄRZ 1902.

Vorträge hielten:

Herr A. Mayer: Symmetrische Lösung der Aufgabe, die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen.

Herr O. Fischer: Das statische und das kinetische Maass für die Wirkung eines Muskels, erläutert an ein- und zweigelenkigen Muskeln des Oberschenkels (für die Abhandlungen).

Herr A. Mayer, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn Karl Boehm: Zur Integration partieller Differentialgleichungen.

Herr Hermann Credner: Die vogtländischen Erderschütterungen in dem Zeitraume vom September 1900 bis zum März 1902, insbesondere die Erdbebenschwärme im Frühjahr und Sommer 1901.

A. Mayer: *Symmetrische Lösung der Aufgabe, die Rotation eines starren Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeiten bereits gefunden wurden, vollständig zu bestimmen.*

Ein starrer Körper bewegt sich unter der Einwirkung gegebener Kräfte um einen festen Punkt. Nimmt man den festen Punkt zum Anfangspunkt zweier gleichsinniger, rechtwinkliger Axensysteme, von denen das eine, $\xi\eta\zeta$, im Raume, das andere, xyz (zu dem man am einfachsten die drei Hauptträgheitsaxen des festen Punktes wählt), im Körper fest ist, so bestehen zwischen den Coordinaten eines beliebigen Körperpunktes in beiden Axensystemen die Relationen:

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$\eta = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,$$
$$\zeta = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

und die vollständige Bestimmung der Bewegung des Körpers verlangt, dass man unter Berücksichtigung seines gegebenen Anfangszustandes, aus den Differentialgleichungen dieser Bewegung die neun Richtungscosinus α_i, β_i, γ_i als Functionen der Zeit t bestimme.

Diese Richtungscosinus sind aber einerseits mit den augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten p, q, r des Körpers um die in ihm festen Axen x, y, z durch die Differentialgleichungen verknüpft:

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p, \end{cases}$$

denen jedes der drei Systeme α_i β_i γ_i einzeln genügen muss, und andererseits bestehen zwischen ihnen die sechs Relationen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1; \\ \alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k = 0. \quad k \neq i \end{cases}$$

Hat man daher die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r bereits als Functionen von t gefunden, so reducirt sich das Rotationsproblem darauf, von den drei Differentialgleichungen (1) drei solche Systeme von Lösungen zu finden, welche die Bedingungen (2) erfüllen und für $t = 0$ die vorgeschriebenen Anfangswerthe besitzen.

Es ist nun schon längst bekannt, und im Besonderen eine aus dem Princip des letzten Multiplicators leicht sich ergebende Folgerung, *dass man diese, nach Ermittelung der Winkelgeschwindigkeiten noch übrigbleibende Aufgabe immer mittelst einer blossen Quadratur lösen kann, so oft man für die gegebenen Funktionen p, q, r von t überhaupt irgend ein System Lösungen der Gleichungen (1) kennt*, und auch die Lösung selbst ist schon lange und zwar auf verschiedenen Wegen erhalten worden, unter denen sich ganz besonders die Art auszeichnet, in der DARBOUX im 2. Cap. des I. Bandes seiner *Leçons sur la théorie générale des surfaces* die Gleichungen (1) auf eine RICCATI'sche Differentialgleichung mit complexen Coefficienten zurückführt. Soweit mir aber bekannt ist, ist man dabei bisher immer unsymmetrisch zu Werke gegangen und hat auch häufig, wenngleich in der Regel nur zur Abkürzung der Rechnung, das Imaginäre zu Hülfe genommen, woher es auch kommt, dass man von allen diesen Methoden, oder wenigstens von denjenigen unter ihnen, welche die Einführung der drei EULER'schen Winkel umgehen, einen mehr oder weniger künstlichen Eindruck erhält.

Nimmt man indessen das Princip des letzten Multiplicators zum Ausgangspunkt, und bedenkt überdies, dass in Folge der Gleichsinnigkeit unserer beiden Axensysteme die Bedingungen (2) sich ersetzen lassen durch die folgenden:

$$(2') \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0, \\ \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \\ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \end{cases}$$

so kann man dasselbe Ziel auch auf ganz symmetrischem Wege erreichen und dabei, selbstverständlich, wenn man sich auf den Fall der Mechanik beschränkt, wo die gegebenen Functionen p, q, r reell sind und daher auch immer nur reelle Lösungen des Systems (1) in Betracht kommen, ohne die Formeln irgendwie zu compliciren, immer im reellen Gebiete bleiben. Dies auseinanderzusetzen ist der Zweck der folgenden Ueberlegungen, die sich Anfangs noch ganz der DARBOUX'schen Darstellung anschliessen. —

Die Gleichungen (1) besitzen das Integral:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.},$$

und wenn $\alpha'\beta'\gamma'$ und $\alpha''\beta''\gamma''$ irgend zwei Systeme Lösungen derselben sind, so sind auch für jede willkürliche Constante c:

$$\alpha = \alpha' + c\alpha'', \quad \beta = \beta' + c\beta'', \quad \gamma = \gamma' + c\gamma''$$

wiederum Lösungen dieser Gleichungen. Daher haben alsdann nicht nur

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \quad \text{und} \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2,$$

sondern auch:

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma''$$

constante Werthe.

Hieraus folgt einmal unmittelbar, dass drei Lösungensysteme $\alpha^{(i)}\beta^{(i)}\gamma^{(i)}$, $(i = 1, 2, 3)$ der Gleichungen (1), die für $t = 0$ denselben sechs Bedingungen;

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha^{(i)}\alpha'^{(i)} + \beta^{(i)}\beta^{(i)} + \gamma^{(i)}\gamma^{(i)} = 1, \\ \alpha^{(i)}\alpha^{(k)} + \beta^{(i)}\beta^{(k)} + \gamma^{(i)}\gamma^{(k)} = 0, \quad k \neq i \end{cases}$$

wie die neun Richtungscosinus $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ genügen, diese Bedingungen überhaupt für jedes t erfüllen, und sodann aus dem Multiplicationsgesetze der Determinanten weiter, dass das Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{vmatrix}$$

je dreier Lösungensysteme $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, $\alpha'''\beta'''\gamma'''$ der Gleichungen (1), also auch diese Determinante selbst stets eine blosse Constante, und daher im Besondern für jedes t von Null verschieden ist, so oft die drei Systeme linear unabhängig sind.

Aus drei solchen Lösungensystemen aber setzen sich mittelst dreier willkürlichen Constanten a, b, c die vollständigen Lösungen der Gleichungen (1) in der Form zusammen:

$$\begin{aligned} \alpha &= a\alpha' + b\alpha'' + c\alpha''', \\ \beta &= a\beta' + b\beta'' + c\beta''', \\ \gamma &= a\gamma' + b\gamma'' + c\gamma'''. \end{aligned}$$

Hat man also irgend drei linear unabhängige Systeme $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$, $\alpha'''\beta'''\gamma'''$ von Lösungen der Gleichungen (1) gefunden, so erhält man die gesuchten Werthe der Richtungscosinus $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ selbst, indem man einfach für $i = 1, 2, 3$:

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_i = a_i\alpha' + b_i\alpha'' + c_i\alpha''', \\ \beta_i = a_i\beta' + b_i\beta'' + c_i\beta''', \\ \gamma_i = a_i\gamma' + b_i\gamma'' + c_i\gamma''', \end{cases}$$

setzt, und die neun willkürlichen Constanten $a_ib_ic_i$ aus der Forderung bestimmt, dass $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ für $t = 0$ die gegebenen Anfangswerthe $\alpha_i^0\beta_i^0\gamma_i^0$ annehmen müssen, was, wenn man diese Anfangswerthe zunächst unbestimmt lässt, nur die Auflösung der drei linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_0'a_i + \alpha_0''b_i + \alpha_0'''c_i &= \alpha_i^0, \\ \beta_0'a_i + \beta_0''b_i + \beta_0'''c_i &= \beta_i^0, \\ \gamma_0'a_i + \gamma_0''b_i + \gamma_0'''c_i &= \gamma_i^0 \end{aligned}$$

erheischt, in denen selbstverständlich links der Index 0 die Substitution $t = 0$ anzeigt. Genügen insbesondere die drei Lösungen-

systeme selbst schon den sechs Bedingungen (3), so werden diese Auflösungen einfach:

$$(5)\qquad \begin{cases} a_i = \alpha_0' \alpha_i^0 + \beta_0' \beta_i^0 + \gamma_0' \gamma_i^0, \\ b_i = \alpha_0'' \alpha_i^0 + \beta_0'' \beta_i^0 + \gamma_0'' \gamma_i^0, \\ c_i = \alpha_0''' \alpha_i^0 + \beta_0''' \beta_i^0 + \gamma_0''' \gamma_i^0, \end{cases}$$

und man braucht also, um die gesuchten Richtungscosinus zu erhalten, nur diese Werthe der $a_i b_i c_i$, nachdem man in ihnen für die $\alpha_i^0 \beta_i^0 \gamma_i^0$ die gegebenen Anfangswerthe gesetzt hat, in die Gleichungen (4) zu substituiren.

Hiernach ist klar, dass mit der vollständigen Integration der Gleichungen (1) gleichzeitig auch unsere Aufgabe, die neun Richtungscosinus aus den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten zu bestimmen, vollständig gelöst ist. Daraus aber ergiebt sich sofort, dass es in der That zur Lösung dieser Aufgabe genügt, von den Gleichungen (1) nur irgend ein System Lösungen $\alpha' \beta' \gamma'$ gefunden zu haben. Nach dem Vorhergehenden kennt man nämlich damit zugleich die beiden, von einander unabhängigen Integrale:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const.},$$
$$\alpha' \alpha + \beta' \beta + \gamma' \gamma = \text{const.}$$

dieser Gleichungen. Ueberdies aber besitzen die Gleichungen (1), da die rechte Seite einer jeden frei ist von der Variabeln, deren Differentialquotient durch die Gleichung bestimmt wird, den Jacobi'schen Multiplicator $M = 1$. Nach dem Princip des letzten Multiplicators kann man daher diese Gleichungen eben mittelst einer blossen Quadratur vollständig integriren.

Um nun diese Reduction auf eine Quadratur wirklich auszuführen, gehen wir darauf aus, aus den bekannten Lösungen $\alpha' \beta' \gamma'$ der Gleichungen (1) drei solche Systeme von Lösungen abzuleiten, welche selbst schon den Bedingungen (3) genügen.

Zu dem Ende bemerke ich zunächst, dass, wie bereits die Form (2') der Bedingungsgleichungen zwischen den neun Richtungscosinus vermuten lässt, mit $\alpha' \beta' \gamma'$ und $\alpha'' \beta'' \gamma''$ stets zugleich auch:

$$(6)\qquad \begin{cases} \alpha''' = \beta' \gamma'' - \beta'' \gamma', \\ \beta''' = \gamma' \alpha'' - \gamma'' \alpha', \\ \gamma''' = \alpha' \beta'' - \alpha'' \beta' \end{cases}$$

Lösungen der Gleichungen (1) sind. In der That, unter der Voraussetzung, dass $\alpha'\beta'\gamma'$ und $\alpha''\beta''\gamma''$ Lösungen der Gleichungen (1) sind, folgt aus (6) und (1):

$$\frac{d\alpha'''}{dt} \equiv (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')r - (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')q \equiv \beta'''r - \gamma'''q,$$

u. s. w.

Wir können ferner immer annehmen, dass zwischen den bekannten Lösungen $\alpha'\beta'\gamma'$ die Relation:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \tag{7}$$

identisch besteht. Denn jedenfalls ist:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 \equiv \text{const. und} > 0,$$

und mit $\alpha'\beta'\gamma'$ sind für jedes willkürliche constante c gleichzeitig auch $c\alpha'$, $c\beta'$, $c\gamma'$ Lösungen der Gleichungen (1). Genügen daher $\alpha'\beta'\gamma'$ nicht selbst schon der Gleichung (7), so kann man doch immer die Constante c so wählen, dass

$$(c\alpha')^2 + (c\beta')^2 + (c\gamma')^2 \equiv 1$$

wird. Erfüllt aber das bekannte System Lösungen $\alpha'\beta'\gamma'$ die Bedingung (7), so braucht man zu ihm nur ein zweites System Lösungen $\alpha''\beta''\gamma''$ der Gleichungen (1) hinzuzufinden, welches den particulären Integralen:

$$\begin{cases} \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \end{cases} \tag{8}$$

genügt, um in beiden und dem aus ihnen gebildeten dritten System Lösungen (6) drei solche Lösungensysteme gewonnen zu haben, welche den Bedingungen (3) genügen.

Um nun und zwar auf möglichst einfachem und doch zugleich symmetrischem Wege aus den bekannten, der Gleichung (7) genügenden Lösungen $\alpha'\beta'\gamma'$ ein zweites Lösungensystem $\alpha''\beta''\gamma''$ der Gleichungen (1) abzuleiten, das die Bedingungen (8) befriedigt, führe ich eine neue Unbekannte λ durch die Definitionsgleichung ein:

$$\lambda = p\alpha'' + q\beta'' + r\gamma''. \tag{9}$$

Dann haben wir für unsere drei Unbekannten $\alpha''\beta''\gamma''$ die drei Gleichungen:

$$\begin{cases} \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ p\alpha'' + q\beta'' + r\gamma'' = \lambda. \end{cases} \tag{10}$$

Setzt man nun noch:

$$(11)\qquad \begin{cases} p\alpha' + q\beta' + r\gamma' \equiv l, \\ p^2 + q^2 + r^2 \equiv w^2, \end{cases}$$

sodass mit $p\,q\,r$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ auch l und w^2 bekannte Functionen von t sind, so ergiebt sich aus (1) und (7):

$$(12)\qquad \left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)^2 \equiv w^2 - l^2.$$

Ueberdies ist für jedes System Lösungen der Gleichungen (1):

$$(13)\qquad p\,\frac{d\alpha}{dt} + q\,\frac{d\beta}{dt} + r\,\frac{d\gamma}{dt} \equiv 0.$$

Mittelst dieser beiden Formeln überzeugt man sich sofort, dass die Auflösungen der Gleichungen (10) gegeben werden durch die Gleichungen:

$$(14)\qquad \begin{cases} (w^2 - l^2)\,\alpha'' = \dfrac{d\alpha'}{dt}\sqrt{w^2 - l^2 - \lambda^2} + (p - l\alpha')\,\lambda, \\ (w^2 - l^2)\,\beta'' = \dfrac{d\beta'}{dt}\sqrt{w^2 - l^2 - \lambda^2} + (q - l\beta')\,\lambda, \\ (w^2 - l^2)\,\gamma'' = \dfrac{d\gamma'}{dt}\sqrt{w^2 - l^2 - \lambda^2} + (r - l\gamma')\,\lambda, \end{cases}$$

Gleichungen, die man, nach Substitution der Werthe der Differentialquotienten von $\alpha'\beta'\gamma'$ aus den Gleichungen (1), direct erhält, wenn man die Gleichungen (10) nach der Methode von Combescure (J. für Math., Bd. 80, p. 49) auflöst.

Nach (13) muss nun, da $\alpha''\beta''\gamma''$ Lösungen der Gleichungen (1) sein sollen,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha''\frac{dp}{dt} + \beta''\frac{dq}{dt} + \gamma''\frac{dr}{dt}$$

werden, und da nach (11) und (13)

$$(p - l\alpha')\frac{dp}{dt} + (q - l\beta')\,\frac{dq}{dt} + (r - l\gamma')\frac{dr}{dt} \equiv w\,\frac{dw}{dt} - l\,\frac{dl}{dt}$$

ist, so verwandelt die Substitution der Werthe von $\alpha''\beta''\gamma''$ aus (14) diese Gleichung in die Differentialgleichung 1. O. zwischen λ und t:

$$(15)\qquad \frac{d\lambda}{dt} - \frac{w\dfrac{dw}{dt} - l\dfrac{dl}{dt}}{w^2 - l^2} - \frac{1}{w^2 - l^2}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\frac{dp}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\frac{dq}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt}\frac{dr}{dt}\right)\sqrt{w^2 - l^2 - \lambda^2} = 0.$$

Weiter ist $M = 1$ ein JACOBI'scher Multiplicator des Systems (1) und:

$$2A \equiv 2 \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

die Functionaldeterminante der Gleichungen (10) in Bezug auf ihre Unbekannten $\alpha''\beta''\gamma''$. Durch (10) und (11) aber wird:

$$A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & l \\ \lambda & l & w^2 \end{vmatrix} \equiv w^2 - l^2 - \lambda^2.$$

Nach dem Princip des letzten Multiplicators muss also die Gleichung (15) den EULER'schen Multiplicator besitzen:

$$\frac{1}{\sqrt{w^2 - l^2 - \lambda^2}}.$$

In der That ist die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{w^2 - l^2 - \lambda^2}} \left(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{w\frac{dw}{dt} - l\frac{dl}{dt}}{w^2 - l^2} \right) - \frac{1}{w^2 - l^2} \left(\frac{d\alpha'}{dt}\frac{dp}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\frac{dq}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt}\frac{dr}{dt} \right) = 0$$

nichts anderes als die vollständige Ableitung der Gleichung:

$$\arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{w^2 - l^2}} - \int \frac{1}{w^2 - l^2} \left(\frac{d\alpha'}{dt}\frac{dp}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\frac{dq}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt}\frac{dr}{dt} \right) dt = \text{const.}$$

Setzt man also:

$$(16) \qquad \int \frac{1}{w^2 - l^2} \left(\frac{d\alpha'}{dt}\frac{dp}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\frac{dq}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt}\frac{dr}{dt} \right) dt \equiv \vartheta,$$

und lässt, da es sich ja nur darum handelt, irgend ein den Bedingungen (8) genügendes System Lösungen $\alpha''\beta''\gamma''$ der Gleichungen (1) zu finden, die willkürliche Constante weg, so erhält man:

$$\lambda = \sqrt{w^2 - l^2} \sin \vartheta$$

als particuläre Lösung der Gleichung (15), und durch Einsetzung dieses Werthes in die Gleichungen (14) für diese Lösungen selbst die Werthe:

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha'' = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - l^2}} \left\{ \dfrac{d\alpha'}{dt} \cos\vartheta + (p - l\alpha') \sin\vartheta \right\}, \\ \beta'' = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - l^2}} \left\{ \dfrac{d\beta'}{dt} \cos\vartheta + (q - l\beta') \sin\vartheta \right\}, \\ \gamma'' = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - l^2}} \left\{ \dfrac{d\gamma'}{dt} \cos\vartheta + (r - l\gamma') \sin\vartheta \right\}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man endlich noch, dass nach (1), (11) und (7):

$$\beta' \frac{d\gamma'}{dt} - \gamma' \frac{d\beta'}{dt} \equiv \alpha' (q\beta' + r\gamma') - p(\beta'^2 + \gamma'^2) \equiv l\alpha' - p,$$

$$\beta' (r - l\gamma') - \gamma' (q - l\beta') \equiv \beta' r - \gamma' q \equiv \frac{d\alpha'}{dt}$$

ist u. s. w., so ergiebt sich aus (6) und (17) sofort:

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha''' = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - l^2}} \left\{ \dfrac{d\alpha'}{dt} \sin\vartheta - (p - l\alpha') \cos\vartheta \right\}, \\ \beta''' = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - l^2}} \left\{ \dfrac{d\beta'}{dt} \sin\vartheta - (q - l\beta') \cos\vartheta \right\}, \\ \gamma''' = \dfrac{1}{\sqrt{w^2 - l^2}} \left\{ \dfrac{d\gamma'}{dt} \sin\vartheta - (r - l\gamma') \cos\vartheta \right\}. \end{cases}$$

Damit haben wir aus den bekannten, der Bedingung (7) genügenden Lösungen $\alpha'\beta'\gamma'$ der Gleichungen (1) eben drei solche Lösungensysteme dieser Gleichungen gewonnen, welche die sechs Bedingungen (3) erfüllen, und können daher aus diesen Lösungen nach Vorschrift der Gleichungen (4) und (5) unmittelbar die Werthe der neun Richtungscosinus $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ bilden.

Nach (12) wird diese Lösung unserer Aufgabe nur in dem einen Falle illusorisch, wo die bekannten Lösungen $\alpha'\beta'\gamma'$ blosse Constanten sind. Die Gleichungen (1) zeigen aber, dass dieser Fall nur eintreten kann, wenn auch die Verhältnisse der drei Winkelgeschwindigkeiten p, q, r constante Werthe besitzen, also der Körper um eine in ihm und im Raume feste Axe rotirt, und dann wird die ganze Aufgabe trivial. Will man übrigens eine symmetrische Lösung erhalten, die auch diesen Ausnahmefall umfasst, so braucht man nur unsere Definitionsgleichung (9) von λ durch die allgemeinere zu ersetzen:

$$\lambda = \mu\alpha'' + \nu\beta'' + \varrho\gamma'',$$

und hierin unter μ, ν, ϱ drei gegebene, aber zunächst unbestimmt zu lassende Functionen von t zu verstehen. Wendet man dann

dasselbe Verfahren wie oben an, so wird nur die Ableitung der Differentialgleichung für λ umständlicher und an die Stelle des Integrales (16) tritt ein complicirteres Integral, dessen Berechnung dafür allerdings durch passende nachträgliche Verfügung über die Functionen μ, ν, ϱ unter Umständen recht wohl sich wesentlich dürfte erleichtern lassen. Die Wahl dieser Functionen aber steht ganz frei bis auf die eine Beschränkung, dass sie nicht die Form

$$\mu \equiv \sigma\alpha', \quad \nu \equiv \sigma\beta', \quad \varrho \equiv \sigma\gamma'$$

besitzen dürfen.

Druckfertig erklärt 25. III. 1902.]

Karl Boehm: *Zur Integration partieller Differentialgleichungen.*

Methoden, welche uns in den Stand setzen, zu entscheiden, ob ein vorgelegtes partielles Differentialsystem reguläre Integrale besitzt, und, wenn diese Frage bejaht werden kann, die willkürlichen — durch das Differentialsystem nicht bestimmten — Elemente jener Integrale zu bezeichnen, sind in neuerer Zeit mit wünschenswerther Vollständigkeit entwickelt worden. Der Umstand aber, dass nicht nur die allgemeine Darstellung eines jeden derartigen Verfahrens, sondern auch dessen Anwendung auf den einzelnen Fall der Natur der Sache nach einigermaassen umständliche Operationen erfordert, lässt neben jenen allgemeinen Methoden auch solche Kriterien werthvoll erscheinen, welche für besondere Classen von partiellen Differentialgleichungen und Differentialsystemen die Existenz und den Charakter der Integrale unmittelbar erkennen lassen.

Die berühmtesten unter diesen Kriterien sind diejenigen, welche — im Anschluss an CAUCHY — Frau VON KOWALEVSKY im 80. Bande des CRELLE'schen Journals entwickelt hat. Hier wird die Existenz regulärer Integrale für Differentialsysteme, welche ebensoviele Differentialgleichungen als unbekannte Funktionen enthalten, zunächst unter zwei Voraussetzungen nachgewiesen: 1. es müssen gewisse Differentialquotienten höchster Ordnung in dem System thatsächlich vorkommen; 2. das Differentialsystem muss sich nach jenen Differentialquotienten auflösen lassen. Die erste Annahme betrifft lediglich die Eigenart der Differentialgleichungen, die zweite beschränkt auch die Wahl der Anfangswerthe. Die Gültigkeit der unter diesen Voraussetzungen gewonnenen Resultate wird alsdann auf allgemeinere Classen von Differentialsystemen ausgedehnt, welchen durch lineare Transformation der unabhängigen Variablen die oben charakterisirte „normale Form" ertheilt werden kann.

Bei dieser Behandlungsweise erscheinen die in den Integralen auftretenden willkürlichen Functionen als Functionen linearer

Combinationen der unabhängigen Variablen; die Frage, welche Bestimmungsstücke der Integrale als Functionen der unabhängigen Variablen selbst willkürlich gegeben werden dürfen, bleibt ungelöst; und doch ist gerade ihre Beantwortung interessant und für die Anwendungen wichtig. Ein Verfahren, welches, ohne die Untersuchung zu compliciren, jene Transformation der unabhängigen Variablen vermeidet, wird also nicht nur methodisch als Verbesserung bezeichnet werden dürfen, sondern auch einen tieferen Einblick in die Natur der Integrale gestatten.

Mit dem formalen Theil einer auf dieses Ziel gerichteten Untersuchung hat sich meine im Jahre 1900 bei Teubner gedruckte Schrift „Zur Integration partieller Differentialsysteme" beschäftigt; die Beweise für die Convergenz der dort hypothetisch angesetzten Reihen sollen demnächst ausführlich publicirt werden. An dieser Stelle mögen die Resultate beider Untersuchungen, soweit sich dieselben auf eine einzige partielle Differentialgleichung beziehen, in Kürze zusammengestellt werden.

Es sei

$$(1)\qquad f(x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0, z - z_0, \cdots, p^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n} - \pi^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots) = 0$$
$$(\beta_1 + \cdots + \beta_n = \beta;\ \beta = 1, 2, \cdots, \infty)$$

die partielle Differentialgleichung, welche uns vorgelegt wird, um die Function z der unabhängigen Variablen $x_1, \cdots, x_n$ als Potenzreihe in der Umgebung der Anfangswerthe $x_1^0, \cdots, x_n^0$ zu bestimmen. Die linke Seite von (1) sei selbst eine Potenzreihe der durch die Bezeichnung angedeuteten Argumente, ohne constantes Glied, convergent in einem System von Kreisen mit den Mittelpunkten

$$(2)\qquad x_1^0, \cdots, x_n^0, z_0, \cdots, \pi^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots;$$

dabei ist allgemein

$$(3)\qquad \frac{\partial^{\beta} z}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} = p^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n};\quad \left(\frac{\partial^{\beta} z}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}\right)_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ \cdots \\ x_n = x_n^0}} = \pi^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}$$

gesetzt worden. Für die Differentialquotienten νter und höherer Ordnung werden wir vielfach noch eine zweite Art der Bezeichnung anwenden, indem wir setzen:

$$(4)\qquad \frac{\partial^{\varrho} z}{\partial x_1^{\varrho_1} \cdots \partial x_n^{\varrho_n}} = p^{\varrho}_{\varrho_1, \cdots, \varrho_n} = [\varrho_1, \cdots, \varrho_n].$$

Die in (1) auftretenden Differentialquotienten höchster, also νter Ordnung theilen wir in zwei Classen ein, deren Repräsentanten typisch mit

$$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \quad \text{oder} \quad [\tau_1, \cdots, \tau_n]$$

bezeichnet werden sollen, je nachdem für das zu Grunde gelegte System der Anfangswerthe (2)

$$\frac{\partial f}{\partial [\sigma_1, \ldots, \sigma_n]} \neq 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial [\tau_1, \ldots, \tau_n]} = 0$$

ist. Wir nehmen an, dass die Anfangswerthe (2) keinen „schlechthin singulären Punkt" der Differentialgleichung (1) definiren, für welchen sämtliche Differentialquotienten νter Ordnung dem zweiten Typus angehören. Unter den nach dieser Annahme existirenden Differentialquotienten vom Typus $[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ ist $[\bar{\sigma}_1, \ldots \bar{\sigma}_n]$ „ausgezeichnet" durch die Forderung, dass in der Reihe der Differenzen

$$\bar{\sigma}_1 - \sigma_1', \quad \bar{\sigma}_2 - \sigma_2', \cdots, \bar{\sigma}_n - \sigma_n'$$

die erste nicht verschwindende stets eine positive Zahl sei, wenn $[\sigma_1', \cdots, \sigma_n']$ jeden beliebigen unter den übrigen Differentialquotienten $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ bezeichnet. Der Index dieser ersten nicht verschwindenden Differenz sei für keinen der Differentialquotienten $[\sigma_1', \cdots, \sigma_n']$ grösser als eine gewisse Zahl $k \leqq n$.

Alsdann mögen $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \cdots + \bar{\sigma}_n = \nu$ Potenzreihen von je $n - 1$ Variablen vorgeschrieben werden, und zwar

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_1 \text{ Entwicklungen } \mathfrak{P}_0^{(1)}, \mathfrak{P}_1^{(1)}, \cdots, \mathfrak{P}_{\bar{\sigma}_1 - 1}^{(1)} \\ \text{nach Potenzen von } x_2 - x_2^0, \; x_3 - x_3^0, \cdots, \; x_n - x_n^0; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_2 \text{ Entwicklungen } \mathfrak{P}_0^{(2)}, \mathfrak{P}_1^{(2)}, \cdots, \mathfrak{P}_{\bar{\sigma}_2 - 1}^{(2)} \\ \text{nach Potenzen von } x_1 - x_1^0, \; x_3 - x_3^0, \cdots, \; x_n - x_n^0; \end{gathered}$$

allgemein:

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_i \text{ Entwicklungen } \mathfrak{P}_0^{(i)}, \mathfrak{P}_1^{(i)}, \cdots, \mathfrak{P}_{\bar{\sigma}_i - 1}^{(i)} \\ \text{nach Potenzen von } x_1 - x_1^0, \cdots, x_{i-1} - x_{i-1}^0, \\ x_{i+1} - x_{i+1}^0, \cdots, x_n - x_n^0. \end{gathered}$$

Verlangen wir nun, dass für $i = 1, 2, \cdots, n$ die Functionen

$$(5)\quad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}}\right)_{x_i=x_i^0},\quad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+1} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i}\right)_{x_i=x_i^0},\quad \cdots,$$

$$\left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+\bar\sigma_i-1} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i^{\bar\sigma_i-1}}\right)_{x_i=x_i^0}$$

beziehungsweise den Potenzreihen

$$(6)\qquad \mathfrak{P}_0^{(i)},\quad \mathfrak{P}_1^{(i)},\quad \cdots,\quad \mathfrak{P}_{\bar\sigma_i-1}^{(i)}$$

gleich werden, so definirt diese Forderung zusammen mit der Differentialgleichung (1) eine Entwicklung

$$(7)\quad z=\sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_n} A_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots;\,\alpha_n}\frac{(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdot\frac{(x_2-x_2^0)^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\cdots\frac{(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}}{\alpha_n!},$$

in welcher sämmtliche Coefficienten eindeutig bestimmt sind.

Die ν Potenzreihen (6) dürfen willkürlich angenommen werden, mit einer einzigen Einschränkung, welche sich auf eine endliche Anzahl von Coefficienten bezieht. Es muss nämlich jeder Coefficient, welcher bei der festgesetzten Correspondenz zwischen (5) und (6) den Anfangswerth eines in (1) auftretenden Differentialquotienten $p^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ darstellt, den entsprechenden Werth $\pi^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ erhalten, so dass also in der Reihe (7)

$$A_{0,\,0,\,\cdots,\,0}=z_0;\quad\cdots,\quad A_{\beta_1,\,\cdots,\,\beta_n}=\pi^{\beta}_{\beta_1,\,\cdots,\,\beta_n},\quad\cdots$$

wird.

Wir werden nun zu beweisen haben, dass die Reihe (7) stets einen gewissen Convergenzbereich in der Umgebung der Werthe $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ besitzt, wenn ein solcher für die ν Potenzreihen (6) existirt. Es genügt offenbar, diesen Beweis unter der Annahme zu führen, dass für alle Differentialquotienten, deren Ordnung gleich oder kleiner als ν ist, der Anfangswerth Null vorgeschrieben sei. Denn es convergirt oder divergirt zugleich mit der Reihe (7) auch die Reihe

$$\zeta=z-\sum_{\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_n'\leq\nu} A_{\alpha_1',\,\alpha_2',\,\cdots,\,\alpha_n'}\cdot\frac{(x_1-x_1^0)^{\alpha_1'}}{\alpha_1'!}\cdot\frac{(x_2-x_2^0)^{\alpha_2'}}{\alpha_2'!}\cdot\ldots\cdot\frac{(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}}{\alpha_n'!}$$

Ist nun z das formaliter construirte Integral der Differentialgleichung (1), so ist ζ das mit denselben willkürlichen Elementen[1]) construirte Integral einer Differentialgleichung

$$(9)\quad \varphi\left(x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0, \zeta, \cdots, \frac{\partial^\beta \zeta}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}}, \cdots\right) = 0,$$

deren linke Seite in der Umgebung der Anfangswerthe Null der Argumente $\zeta, \cdots, \frac{\partial^\beta \zeta}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}, \cdots$ genau denselben functionentheoretischen Charakter besitzt wie die linke Seite von (1) in der Umgebung der Anfangswertbe $z_0, \cdots, \pi^\beta_{\beta_1, \cdots, \beta_n} \cdots$ der Argumente $z, \cdots, \frac{\partial^\beta z}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\gamma_n}}, \cdots$. —

Es möge also im Folgenden die Differentialgleichung (1) unter der Annahme

$$(10)\qquad z_0 = 0, \cdots, \quad \pi^\beta_{\beta_1, \cdots, \beta_n} = 0, \cdots$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, \nu)$$

behandelt werden; in den sonst willkürlich vorgeschriebenen Potenzreihen (6) sind dann die entsprechenden, in endlicher Anzahl auftretenden, Coefficienten gleich Null anzunehmen.

Wir betrachten nun die Reihe (7) als hypothetisches Integral des aus n Differentialgleichungen $(\nu+1)$ter Ordnung bestehenden partiellen Differentialsystems, welches wir erhalten, indem wir die Differentialgleichung (1) nach jeder der unabhängigen Variablen einmal differentiiren:

$$(11)\qquad \begin{aligned}[\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma^i + 1, \cdots, \bar\sigma_n] &= \omega^i + \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \nu} \omega_{\sigma_1, \cdots, \sigma_n} \cdot [\sigma_1, \cdots, \sigma_i + 1, \cdots, \sigma_n] \\ &+ \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_n = \nu} \omega_{\tau_1, \cdots, \tau_n} [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots, \tau_n]\end{aligned}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

Die beiden Summen in (11) sind über diejenigen Werthe der Indices $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ bezw. $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ zu erstrecken, welche einen der in (1) auftretenden Differentialquotienten νter Ordnung von dem einen oder dem anderen Typus repräsentiren.

---

1) Die Anfangswerthe der Differentialquotienten νter und niedrigerer Ordnung sind unserer Darstellung gemäss hier nicht zu den willkürlichen Elementen gezählt.

Die Coefficienten ω^i, $\omega_{\sigma_1, \cdots, \sigma_n}$, $\omega_{\tau_1, \cdots, \tau_n}$ sind, unter der Annahme (10), Potenzreihen der Argumente

$$(12) \qquad x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0, \varepsilon, \cdots, p^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots; \quad (\beta = 1, 2 \cdots, \nu)$$

die Coefficienten der dritten Kategorie müssen für die Anfangswerthe ihrer Argumente verschwinden, d. h. die Potenzreihen $\omega_{\tau_1, \cdots, \tau_n}$ dürfen keine constanten Glieder besitzen. Das Differentialsystem (11) ersetzt uns die Differentialgleichung (1) vollständig, da wir für die in der letzteren auftretenden variablen Grössen die Anfangswerthe von vornherein fixirt haben.

Als Hülfsmittel zur Lösung unserer Aufgabe dient uns die gewöhnliche Differentialgleichung $(\nu + 1)$ter Ordnung

$$(13) \qquad v^{(\nu+1)} = \frac{M \cdot \varepsilon \cdot c}{P - Q \frac{t + v + v' + \cdots + v^{(\nu)}}{r}}$$

mit der unabhängigen Variablen t und der unbekannten Function v, deren Ableitungen wir in bekannter Weise durch $v^{(i)} = \frac{d^i v}{dt^i}$ bebezeichnen. Zur Abkürzung ist

$$(14) \quad P = a_1^{\bar{\sigma}_1} \cdot \cdots \cdot a_i^{\bar{\sigma}_i} \cdot \cdots \cdot a_n^{\bar{\sigma}_n} - M \cdot \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_i + \cdots + \sigma_n = \nu} a_1^{\sigma_1} \cdot \cdots a_i^{\sigma_i} \cdot \cdots \cdot a_n^{\sigma_n}$$

$$(15) \quad Q = a_1^{\bar{\sigma}_1} \cdot \cdots \cdot a_i^{\bar{\sigma}_i} \cdot \cdots \cdot a_n^{\bar{\sigma}_n} + M \cdot \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_i + \cdots + \tau_n = \nu} a_1^{\tau_1} \cdots a_i^{\tau_i} \cdot \cdots \cdot a_n^{\tau_n}$$

gesetzt worden. Die Grössen

$$(16) \qquad M, r, \varepsilon, c, a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n$$

sind bis jetzt beliebige Constanten, deren Werthe im Folgenden näher bestimmt werden sollen. $\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n$ sind wie bisher die partiellen Ordnungszahlen des „ausgezeichneten Differentialquotienten" unserer Differentialgleichung (1), während die beiden in P und Q auftretenden Summen über diejenigen Indices auszudehnen sind, welche als partielle Ordnungszahlen einem der übrigen in (1) vorkommenden Differentialquotienten νter Ordnung vom ersten, bezw. zweiten Typus angehören.

Die Differentialgleichung (13) besitzt, wenn nur die Constante P von Null verschieden ist, ein in der Umgebung des Anfangswerthes $t = 0$ convergentes Integral, welches zugleich mit

seinen ν ersten Ableitungen im Punkte $t = 0$ verschwindet; diese Function möge künftig mit $v(t)$ bezeichnet werden.

Alsdann ist

$$(17) \quad Z = \frac{1}{\varepsilon} v\left(a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_i(x_i - x_i^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0)\right)$$

eine Potenzreihe der Argumente $x_1 - x_1^0, \cdots, x_i - x_i^0, \cdots, x_n - x_n^0$, welche in einem System von Kreisen mit den Anfangswerthen $x_1^0, \cdots, x_i^0, \cdots, x_n^0$ convergirt; sie beginnt wie die hypothetisch angesetzte Reihe (7) mit einem Gliede

$$\text{const.}\ (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (x_i - x_i^0)^{\alpha_i} \cdot \cdots \cdot (x_n - x_n^0)^{\alpha_n},$$

dessen Exponentensumme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i + \cdots + \alpha_n$ mindestens gleich $\nu + 1$ ist.

Die Function (17) genügt als Function der n Variablen $x_1, \cdots x_n$ einem partiellen Differentialsystem

$$(18) \quad [\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_i + 1, \cdots, \bar{\sigma}_n] =$$

$$\Omega \cdot \Big\{ c \cdot a_i + \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \nu} [\sigma_1, \cdots, \sigma_i + 1, \cdots, \sigma_n] + \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_n = \nu} [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots \tau_n] \Big\}$$

$$- M \cdot \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_n = \nu} [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots, \tau_n]$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

worin

$$\Omega \equiv$$

$$M \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{r} \left[a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0) + \varepsilon z + \varepsilon \sum_{(\beta_1 + \cdots + \beta_n = \beta = 1, 2, \cdots, \nu)} \frac{1}{n_\beta} \frac{1}{a_1^{\beta_1} \ldots a_n^{\beta_n}} p^{\beta}_{\beta_1, \ldots, \beta_n} \right] \right\}^{-1},$$

$$n_\beta = \frac{n(n+1)\cdots(n+\beta-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot \beta}$$

gesetzt ist, welches sich folglich von dem System (11) nur dadurch unterscheidet, dass

die Function Ω an die Stelle sämmtlicher Coefficienten $\omega_{\sigma_1, \cdots, \sigma_n}$,

die Function $\Omega - M$ an die Stelle sämmtlicher Coefficienten $\omega_{\tau_1, \cdots, \tau_n}$,

die Functionen $c \cdot a_i \cdot \Omega$ an die Stelle der entsprechenden Coefficienten ω^i

getreten sind. Die Function Ω, welche den wesentlichen Bestandtheil der Coefficienten von (18) ausmacht, ist eine Function

sämmtlicher Argumente, welche in den Coefficienten ω^i, $\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ des Differentialsystems (11) auftreten können.

Wir werden nun über die Constanten (16) in solcher Weise verfügen, dass

1. die Potenzreihen $c \cdot a_i \cdot \Omega$, Ω, $\Omega - M$ bezw. Majoranten[1]) der Potenzreihen ω^i, $\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ werden,

und dass

2. die ν aus der Function (17) abgeleiteten Functionen von je $n-1$ Variablen

$$(19)\quad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}}Z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}}\right)_{x_i=x_i^0},\quad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+1}Z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i}\right)_{x_i=x_i^0},\quad\cdots,$$

$$\left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+\bar\sigma_i-1}Z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i^{\bar\sigma_i-1}}\right)_{x_i=x_i^0}$$

zu Majoranten der entsprechenden Potenzreihen (6) werden, welche für die mit dem hypothetischen Integral (7) zu bildenden Functionen (5) willkürlich vorgeschrieben sind.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so erkennt man leicht, dass alsdann auch die übrigen (in den Potenzreihen (19) nicht auftretenden) Coefficienten der Potenzreihe (17) nicht nur sämmtlich positiv, sondern auch grösser ausfallen müssen als die entsprechenden, mit Hülfe des Differentialsystems (11) zu berechnenden Coefficienten des hypothetischen Integrals (7); mit anderen Worten: die Potenzreihe (17) ist alsdann eine Majorante der Potenzreihe (7), so dass diese letztere mindestens für alle diejenigen Werthe der unabhängigen Variablen convergirt, welche dem Convergenzbereich der Reihe (17) angehören. Die zu dem letzten Schluss führende Ueberlegung, welche hier nicht wieder-

1) „Mit diesem Namen, Majorante einer Function, der wegen der Wichtigkeit des Begriffes allgemeine Einführung verdiente, bezeichnet Herr RIQUIER nach dem Vorgange des Herrn MÉRAY eine Potenzreihe mit lauter positiven Coefficienten, die alle nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Coefficienten in der ursprünglichen Potenzreihe." Die französische Bezeichnung „fonction majorante" wurde in der germanisirten Form „Majorante" von Herrn STÄCKEL für unsere Terminologie gewonnen; die soeben angeführte Stelle findet sich im 25. Bande des Jahrbuchs über d. Fortschr. d. Math. (S. 593) in einem von Herrn STÄCKEL erstatteten Referat.

gegeben werden kann, stützt sich auf das in meiner oben citirten Abhandlung auf S. 15—17 entworfene Auflösungsschema, welches das Verfahren angiebt, nach welchem aus unseren Differentialsystemen (11) bezw. (18) die Anfangswerthe sämmtlicher Differentialquotienten

$$\frac{\partial^{\bar{\sigma}_1+\lambda_1+\cdots+\bar{\sigma}_n+\lambda_n} z}{\partial x_1^{\bar{\sigma}_1+\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\bar{\sigma}_n+\lambda_n}}, \text{ beziehungsweise } \frac{\partial^{\bar{\sigma}_1+\lambda_1+\cdots+\bar{\sigma}_n+\lambda_n} Z}{\partial x^{\bar{\sigma}_1+\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\bar{\sigma}_n+\lambda_n}}$$

zu berechnen sind.

Um nun zunächst die erste der beiden oben genannten Bedingungen zu erfüllen, genügt es, folgende Annahmen zu machen:

Die Werthe der Constanten $a_1, \ldots, a_n, \varepsilon, c$ seien positiv und nicht kleiner als die positive Einheit;

ε sei überdies grösser als die grösste der Zahlen $n_\beta \cdot a_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot a_n^{\beta_n}$; $(\beta_1+\cdots+\beta_n=\beta\leq\nu)$

r sei positiv und kleiner als der kleinste Convergenzradius aller Potenzreihen ω^i, $\omega_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ in Beziehung auf irgend eine der unabhängigen Variablen.

M sei positiv und grösser als der grösste Werth, welchen der absolute Betrag derselben Potenzreihen innerhalb der Convergenzbereiche annehmen kann.

Die zweite unserer Bedingungen erheischt auf jeden Fall, dass die in (13) auftretende Grösse P eine positive Zahl sei, dass also durch geeignete Wahl der Constanten a_i die Ungleichheit

$$a_1^{\bar{\sigma}_1}\cdot\cdots\cdot a_i^{\bar{\sigma}_i}\cdot\cdots\cdot a_n^{\bar{\sigma}_n} > M\sum_{\sigma_1+\cdots+\sigma_i+\cdots+\sigma_n=\nu} a_1^{\sigma_1}\cdot\cdots\cdot a_i^{\sigma_i}\cdot\cdots\cdot a_n^{\sigma_n}$$

realisirt werden könne; dies letztere geschieht durch folgende Festsetzung:

$$a_1 > a_2^{\nu},\ a_2 > a_3^{\nu},\ \cdots,\ a_{k-1} > a_k^{\nu};\quad a_k > M(n_\nu - 1);$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 1;$$

dabei ist k wieder die Anzahl der unabhängigen Variablen, deren Reihenfolge bei der Bestimmung des „ausgezeichneten Differentialquotienten" $[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]$ fixirt werden musste. Nehmen wir nun ferner an, dass die positive Zahl r (für welche ja nur eine obere Grenze angegeben war), auch kleiner sei als der kleinste unter den Convergenzradien der Potenzreihen (6), und dass die positive Zahl M (für welche ja nur eine untere Grenze fixirt ist), zu-

gleich auch grösser sei, als der grösste absolute Betrag, welchen die Potenzreihen (6) und deren Ableitungen bis zur $(\nu+1)$-ten Ordnung innerhalb ihrer Convergenzbereiche annehmen können, so genügt es, die Constante c grösser als P zu wählen, um auch die zweite unserer Bedingungen zu erfüllen.

Durch diese Constanten-Bestimmung ist alsdann unser Ziel erreicht: die jedenfalls convergente Potenzreihe (17) ist zur Majorante der Potenzreihe (7) geworden, durch welche die Differentialgleichung (1) formal integrirt wird.

Unser Convergenzbeweis, welcher hiermit zum Abschluss gebracht ist, schliesst sich den fundamentalen Untersuchungen des Herrn RIQUIER (Ann. éc. norm. 1893) auf das engste an. Sehen wir von denjenigen Modificationen ab, welche mehr die Darstellung als den Gedankengang berühren, so lässt sich nur ein Punkt bezeichnen, in welchem sich die oben skizzirte Untersuchung von der des Herrn RIQUIER wesentlich unterscheidet: Wären die Differentialquotienten vom Typus $[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ in der Differentialgleichung (1) nicht vorhanden, so würde diese nur als das allereinfachste der von Herrn RIQUIER behandelten Differentialprobleme anzusehen sein; durch die Berücksichtigung jener Differentialquotienten aber ist es möglich geworden, das Existenztheorem etwas weiter zu fassen als bisher geschehen ist.

Ein Beispiel möge diese Thatsache völlig ans Licht setzen; die vorgelegte Differentialgleichung sei zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen x und y:

$$(20) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Wenn einer der beiden Differentialquotienten $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ überhaupt nicht vorkommt, und überdies die Differentialgleichung für das gewählte System der Anfangswerthe nach $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ auflösbar ist, so wird uns durch die Theoreme des Herrn RIQUIER die Existenz eines Integrales verbürgt, welches für $x = x^0$ in eine beliebige Function von y, für $y = y^0$ in eine beliebige Function von x übergeht. Aber erst die oben durchgeführte Untersuchung lehrt, dass ein solches Integral auch dann existirt, wenn unsere Differentialgleichung die beiden Differentialquotienten $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ zwar enthält, aber nach mindestens einem derselben für die gewählten

Anfangswerthe nicht aufgelöst werden kann. In meiner schon wiederholt citirten Schrift habe ich die Differentialgleichung

$$(1-xy)\,x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1-xy)\,(1+xy)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(1-xy)\,y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+(1-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

als Beispiel gewählt, deren allgemeines Integral

$$z=\omega_1(x\cdot e^y)+\omega_2(y\cdot e^x)$$

unsere Existenztheoreme in lehrreicher Weise verificirt.

Die Ausarbeitung der Convergenzbeweise für die Differentialsysteme, welchen der dritte Abschnitt meiner früheren Arbeit gewidmet ist, und für noch allgemeinere Classen von Differentialsystemen wird der Theorie keine neuen Gesichtspunkte bieten, weshalb ich mich in dieser Notiz auf die Behandlung einer einzigen Differentialgleichung beschränken durfte.

Dagegen möchte ich zum Schlusse mit wenigen Worten eine andere Richtung andeuten, nach welcher ich diese Betrachtungen fortzusetzen beabsichtige. Es wurde im Vorhergehenden gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen die zwischen den Coefficienten des hypothetischen Integrals bestehenden Relationen in bestimmter Weise aufgelöst werden können; aber das mitgetheilte Schema der Auflösung ist nicht das einzig mögliche. So kann, um bei dem Beispiel zu bleiben, die Differentialgleichung (20) für ein bestimmtes System von Anfangswerthen sehr wohl nach allen drei Differentialquotienten zweiter Ordnung auflösbar sein und trotzdem ein reguläres Integral besitzen, welches sich für $x=x^0$ auf eine willkürliche Function von y, für $y=y^0$ auf eine willkürliche Function von x reducirt. Derartige Möglichkeiten lassen sich aber bis zu einem gewissen Grade der Allgemeinheit discutiren und stellen uns somit vor neue, für Theorie und Anwendung gleich wichtige Probleme, zu deren Behandlung wir nothwendig fortschreiten müssen.

Druckfertig erklärt 28. III. 1902.]

Hermann Credner: *Die vogtländischen Erderschütterungen in dem Zeitraume vom September 1900 bis zum März 1902, insbesondere die Erdbebenschwärme im Frühjahr und Sommer 1901.* (Mit 2 Kartenskizzen im Texte).

Seitdem im Jahre 1875 zuerst unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen seismischen Erscheinungen gelenkt wurde, welche sich innerhalb des Königreichs Sachsen und in den angrenzenden Landstrichen abspielen, hat sich das sächsische Vogtland und dessen unmittelbares, ihm geologisch noch zugehöriges böhmisches Nachbarareal als chronisches Schüttergebiet gekennzeichnet. Als solches bewährte es sich auch in dem auf die Erdbebenschwärme des Juli und August 1900[1]) folgenden Zeitabschnitte, über dessen seismische Ereignisse in Nachstehendem berichtet werden soll. Zu dieser Berichterstattung wurde der augenblickliche Zeitpunkt deshalb gewählt, weil er einerseits die Periode der ausschliesslich auf makroseismischen Wahrnehmungen der Bewohnerschaft beruhenden Beobachtungen und Schätzungen abschliesst, anderseits aber von nun an, nach soeben erfolgter Aufstellung eines *selbstregistrirenden Wiechert'schen Pendelseismometers* in *Leipzig* eine Aera exacterer seismischer Studien für Sachsen zu erhoffen ist.

1900.

1. Am 19. September.

In den ostnordöstlich von Oelsnitz im Contakthofe des Granitstockes von Bergen gelegenen Orten *Tirpersdorf, Brotenfeld, Kottengrün* und *Pillmannsgrün* äusserte sich am 19. September Nachmittags h. 1 ein heftiger, vertikal nach oben gerichteter Erdstoss, dem eine mehrere Secunden andauernde zitternde Bewegung und 10 Minuten später ein zweiter Stoss folgte. Beide wurden nicht nur in den Häusern, sondern auch von Personen verspürt, welche

1) Diese Berichte, B. 52, 1900, S. 153—177 nebst Tafel I—IV.

im Freien der Arbeit oblagen. Unterirdisches Donnerrollen begleitete diese Stösse und wurde auch deutlich in dem östlich vorliegenden Dorfe *Werda* wahrgenommen, ohne dass hier eine Erderschütterung zur Beobachtung gelangt wäre (Referenten die Herren Pfarrer Langer in Tirpersdorf und Oberlehrer Schmidt in Oelsnitz).

Die oben genannten Orte decken einen etwa 3,5 km langen Streifen von erzgebirgischer Richtung.

2. Am 20. September.

Früh h. 3.50 ereignen sich in der Gegend von *Falkenstein* drei rasch aufeinander folgende Erdstösse, auf welche etwa h. 5.30 noch einige schwächere Erschütterungen folgten.

Falkenstein liegt in der nordöstlichen Fortsetzung der Schütterzone des Bebens vom vorhergehenden Tage und mit dieser ausserhalb des Bereiches der beiden südvogtländisch-egerländischen Epicentralgebiete. Die Erschütterungen dieses Streifens entspringen demnach einem selbständigen Herde und markiren eine seismogenetische Linie von erzgebirgischem Streichen.

3. Am 24. December.

In der Gegend von *Weissbach* bei Wiesenburg südöstlich von Zwickau vollzieht sich früh h. 3.30 eine wellenförmige, stossartig endende, mit donnerndem Geräusch verknüpfte Erderschütterung, durch welche Schlafende geweckt und Fenster in klirrende Bewegung versetzt werden (Ref. Herr Lehrer Trenkler in Weissbach).

4. Am 28. December.

Vormittags h. 11.35 wird in *Graslitz* ziemlich allgemein ein recht kräftiger, in *Brambach* nur in den direct auf dem Felsuntergrunde stehenden Häusern ein schwächerer Erdstoss verspürt, nachdem sich in erst genannter Stadt bereits in der Frühe gegen 5 Uhr einige geringfügigere Erschütterungen bemerklich gemacht hatten (Ref. die Herren Dr. med. Bäuml in Graslitz und Postverwalter Renz in Brambach).

Augenscheinlich war Graslitz der Ausgangspunkt dieser Erschütterungen, deren stärkste in dem stets zu seismischer Erregung disponirten Brambacher Herde einen schwachen Stoss ausgelöst hat, während das zwischenliegende Gebiet in makroseismischer Ruhe verharrte. Auf derartige Wechselbeziehungen

zwischen dem Graslitzer und dem Brambacher Erdbebenherd hat bereits UHLIG[1]) aufmerksam gemacht und die in einem dieser Herde von Seiten des anderen erzeugten Simultanstösse als *Relais-Herdstösse* bezeichnet.

1901.

5. Am 11. Februar.

In *Brambach* werden in der Frühe des 11. Februar zwischen 3 und 4 Uhr mehrere schwache Erdstösse wahrgenommen.

6. Am 13. Februar.

Wiederum machen sich in *Brambach* und zwar Nachmittags h. 5.45 und Abends h. 7.15 schwache Erschütterungen bemerklich (Ref. Herr Postverwalter RENZ).

7. Der südvogtländische Erdbebenschwarm vom 8. Mai bis zum 28. Juni.

Im Mai und Juni 1901 wurde das Vogtland zum dritten Male innerhalb eines fünfjährigen Zeitraumes zum Schauplatz einer sich über mehrere Wochen erstreckenden seismischen Unruhe und wiederum lag deren Epicentrum in der als Ausgangspunkt der meisten vogtländischen Erdstösse bewährten Gegend von *Brambach*. Hier bethätigte sich, wie seit langer Zeit, so auch diesmal, Herr Postverwalter RENZ als gewissenhafter Berichterstatter. Ausserdem trugen die regelmässigen telegraphischen Meldungen von Seiten des Vorstandes der Bahnstation Brambach an die Generaldirektion der Königl. Staatseisenbahnen über die dort wahrgenommenen Erdstösse wesentlich dazu bei, deren Eintritt nach mitteleuropäischer Zeit zu fixiren. Ueber die zahlreichen Erschütterungen, die sich in dem nahe gelegenen, gleichfalls dem Epicentralgebiete dieses Erdbebenschwarmes angehörigen Orte *Schönberg* abspielten, wurde von Herrn Kirchschullehrer WERNER, sowie von Herrn H. LEONHARDT in gewohnter Ausführlichkeit Bericht erstattet. Von den übrigen Herren Erdbebenreferenten des Vogtlandes sind bei dem geringen Umfange des diesmaligen Schüttergebietes nur wenige in Mitleidenschaft gezogen worden. Des Referates über die im äusseren Bereiche des letzteren gemachten seismischen Beobachtungen befleissigten sich die Herren Schuldirektor ALBERTI in Asch, Bürgerschullehrer KAISER in Adorf,

---

1) V. UHLIG, Mitth. d. Erdbebencommission d. k. k. Akad. d. Wiss. Neue Folge III. Wien 1901. S. 42.

Pastor Langer in Tirpersdorf, Oberlehrer Vogel in Markneukirchen und Oberlehrer Wölfel in Rossbach. Der umsichtigen Mühewaltung aller genannter Herren gebührt dankbare Anerkennung.

Durch das Entgegenkommen des Referenten der Erdbebencommission der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien, des Herrn Stadtgeologen Knett in Carlsbad, dem aus dem böhmischen Nachbargebiete des Brambach-Schönberger Epicentrums eine grössere Zahl von Berichten über dortige Erdbebenbeobachtungen zugegangen waren, wurde ein Austausch der beiderseitigen seismischen Zeit- und Ortsliste ermöglicht, welcher zur Vervollständigung der von uns gegebenen Darstellung dieses Erdbebenschwarmes wesentlich beitrug, — ein Verfahren, das sich seitdem bewährt hat und auch in Zukunft bezüglich aller die sächsisch-böhmischen Nachbargebiete betreffenden Beben in Aussicht genommen ist, um deren volles Bild nicht nach der jenes Gebirgsland durchquerenden politischen Grenze in störender Weise zu zerschneiden.

Die seismische Thätigkeit, welche sich in dem vogtländischen Erdbebenschwarme des Frühjahres 1901 äusserte, hob am 8. Mai an und erlosch am 28. Juni, erstreckte sich demgemäss mit Einschluss einer achttägigen, vom 12. bis 19. Mai währenden makroseismischen Ruhepause über einen Zeitraum von 53 Tagen.

8. Mai.

am. h. 8.5 in *Brambach* ziemlich starker Stoss, ebenso in dem etwa 1.5 km südlich davon gelegenen *Hohendorf*, wo leichte Geräthe und Geschirre erzittern. In *Markneukirchen* wird ein schwacher Stoss verspürt.

9. Mai.

am. h. 3.16 und
h. 3.25 ziemlich starke Stösse in *Brambach*,
h. 9.5 stärkere stossförmige Erschütterung mit Nachzittern in *Brambach* und *Schönberg*,
pm. h. 5.3 etwas schwächerer Stoss mit Nachzittern in *Brambach* und *Schönberg*,
h. 8 schwacher Stoss in *Markneukirchen*,
h. 9-11 mehrere schwache Stösse in *Markneukirchen*.

10. Mai.

am. h. 0.56 in *Brambach* und *Schönberg* ein ziemlich kräftiger Stoss, dem zwei schwächere folgen,
h. 5 schwache Erschütterung in *Markneukirchen*,
pm. h. 9.30 wellenförmige von Donnerrollen begleitete Erschütterung in *Asch* und Umgebung.

11. Mai.

am. h. 3.6 kräftiger Stoss in *Brambach*, wo er viele Schläfer erweckt, sowie in *Schönberg*, schwacher Stoss in *Asch*,
h. 7.30 schwache Erzitterungen in *Brambach*,
h. 8.30 stärkerer, ziemlich allgemein bemerkter Stoss in *Schönberg*.

20. Mai.

am. h. 4.52 stärkerer Stoss in *Brambach* und *Schönberg*, leichte Geräthe erklirren; Erschütterung in *Fleissen* (etwa 2 km östlich von Brambach); schwacher Stoss in *Asch* und *Hirschfeld*,
h. 5.35 und
5.37 schwache Erschütterungen in *Brambach*, sowie in dem nahen *Fleissen* und *Grossloh*,
pm. h. 4.39 schwache Stösse in *Brambach* und *Schönberg*,
h. 6.30 schwacher Stoss in *Brambach*,
h. 10.30 ziemlich kräftiger Stoss in *Brambach*,
h. 10.57 schwache Erschütterung in *Brambach*.

21. Mai.

am. h. 1.25 mehrere rasch aufeinander folgende, recht kräftige Stösse in *Brambach*.

24. Mai.

am. h. 0.51 stärkerer Stoss in *Brambach*,
am. h. 2.19 ziemlich starker Stoss in *Brambach*,
h. 2.27 schwacher Stoss,
h. 2.35 stärkerer Stoss in *Brambach*.

25. Mai.

am. h. 3.30 Erschütterung in *Schildern* (3,5 km nw. von Asch).

26. Mai.

pm. h. 0.30 stossförmige Erschütterung in *Asch*,
h. 4.05 schwacher Stoss in *Markneukirchen*.

28. Mai.

pm. h. 1.45 schwacher Stoss in *Markneukirchen.*

29. Mai.

pm. h. 5 schwache Erschütterung in *Markneukirchen.*

30. Mai.

pm. h. 4.35 wellenförmig schaukelnde Erschütterung in *Markneukirchen.*

31. Mai.

pm. h. 8.55 unterirdisches Donnerrollen,
h. 11.35,
h. 11.40,
h. 11.58 Stösse in *Brambach*, *Schönberg* und *Fleissen.*

1. Juni.

am. h. 0.9 schwache Erschütterung in *Brambach*,
h. 1.5 stärkerer, dann schwacher Stoss in *Brambach*, schwacher Stoss in *Fleissen* und *Asch*,
h. 2.5 drei schwache Stösse in *Brambach* und in *Schönberg*, in der dortigen Gegend auch im Freien bemerkt,
h. 2.43 ziemlich kräftiger Stoss in *Brambach*,
h. 6.30,
h. 6.35,
h. 6.40 schwache Erzitterungen mit Rollen in *Brambach*,
pm. h. 2 schwacher Stoss in *Markneukirchen*,
h. 9.50,
h. 11.30,
h. 11.40 und
h. 11.55 schwache Erschütterungen in *Brambach*, *Fleissen*, *Asch* und *Schildern.*

2. Juni.

pm. h. 0.37 kräftigster Stoss dieses Erdbebenschwarmes in *Brambach* und *Schönberg* (der Erdboden schien sich zu heben und senken, Fenster klirren, nistende Vögel verlassen erschreckt die Brutkästen, das begleitende Geräusch tönt donnerartig). Aus dem Osten und Süden des sich dem Epicentrum anschliessenden Schüttergebietes liegen über diesen Erdstoss Meldungen vor aus *Fleissen, Wildstein, Altenteich,*

Voitersreuth und *Hirschfeld* bei Haslau, ferner aus folgenden im Westen und Norden gelegenen Orten: *Asch*, *Schildern*, *Neuberg*, *Thonbrunn*, *Bad Elster*, *Rossbach*, *Eichigt*, *Adorf* und *Markneukirchen*. Hier überall besass die Erschütterung nur einen geringen

Schüttergebiet des Erdbebenschwarmes im Mai und Juni 1901.

Stärkegrad, doch erzitterten noch in Rossbach die Möbel und erklirrten in Bad Elster Fenster, während gleichzeitig ein dumpfes Donnern ertönte.

h. 1 und

h. 2 je eine schwache stossförmige Erschütterung in *Markneukirchen*,

h. 5.25 und

h. 10.24 schwache Erschütterungen in *Brambach* und *Schönberg*.

h. 10.59 kräftigerer Stoss in *Brambach* und *Schönberg*, der sich auch in *Fleissen*, *Schnecken*, *Grossloh*, *Oberreuth* und *Asch* fühlbar macht.

3. Juni.

am. h. 1.34 Erschütterung in *Brambach*, *Schönberg*, *Fleissen*, *Asch*, *Schildern*, und *Thonbrunn*,

h. 3.52 und

h. 4.56 schwacher Stoss in *Brambach* und *Schönberg*.

6. Juni.

am. h. 3.43 und

h. 3.47 zwei kräftige Stösse in *Brambach* und *Schönberg*, von denen der erste der stärkere ist und denen in Zwischenräumen von je einigen Minuten noch zwei schwächere Stösse folgen. Die beiden Hauptstösse äussern sich auch in *Fleissen* und *Markneukirchen*. In *Rossbach* und *Thonbrunn* wird nur ein Stoss und nach 2—3 Minuten eine dreimalige schwache Erschütterung, in *Asch* nur ein Stoss und später unterirdisches Donnerrollen wahrgenommen. Auch aus *Wildstein*, *Voitersreuth* und *Adorf* liegen Meldungen über diese Erschütterungen vor.

h. 4.01 in *Brambach* stärkerer, in *Fleissen* schwacher Stoss, in *Asch* unterirdisches Rollen.

h. 4.05,

h. 4.33 und

h. 4.53 in *Brambach* schwache Stösse, in *Asch* langanhaltender Donner.

h. 6.45 in *Schönberg* längeres unterirdisches Rollen.

pm. h. 3.30 schwacher Stoss in *Asch*,

h. 6.55 und

h. 10.02 schwache Erschütterungen in *Brambach*.

7. Juni.

am. h. 4.15 in *Schönberg* ein kräftiger Stoss mit kanonenschussartigem Donnern.

8. Juni.

am. h. 3.30 und
h. 4.45 kräftige Stösse in *Schildern* und *Asch*,
h. 8.04 ziemlich starker Stoss in *Brambach*,
h. 8.52 schwache Erschütterung in *Fleissen*.

9. Juni.

am. h. 9.05 und
pm. h. 5 etwas stärkere Stösse in *Brambach*, jeder gefolgt von mehreren kurzen Erzitterungen.

10. Juni.

am. h. 0.55 in *Brambach* ziemlich starker Stoss, darauf zwei schwache, ferner im Laufe des Vormittags noch mehrere leichte Erschütterungen.
h. 4 und
pm. h. 0.30 schwache Stösse in *Krugsreuth*.

11. Juni.

am. h. 3.05 kräftiger Stoss, der in *Brambach* viele Schläfer weckt; wird in *Markneukirchen* schwach verspürt.
h. 7.30 in *Brambach* und *Fleissen* einige leichte Erzitterungen.

12. Juni.

pm. h. 7.30 in *Brambach* und *Schönberg* zwei schwache Stösse, ein solcher in *Markneukirchen*.

13. Juni.

am. h. 7.30 in *Schönberg* starker Stoss, Fenster klirren, Hängelampen schwanken, dann lautes Donnerrollen.
pm. h. 5.48 erfolgt in *Brambach* ein so kräftiger Stoss, dass Geräthe klirren, Fenster klappern und der Boden erzittert. Auch in *Schönberg* wird derselbe von fast jedermann bemerkt und in *Fleissen*, *Voitersreuth*, *Asch*, *Schildern*, *Neuberg* und *Adorf* als schwächere Erschütterung verspürt.

15. Juni.

am. h. 6.05 in *Brambach* zwei leichte rasch aufeinander folgende Stösse,

am. h. 11.50 sich in kurzen Zwischenräumen wiederholendes, etwa zehnmaliges kurzes, dröhnendes Donnerrollen in *Brambach.*

17. Juni.

pm. h. 0.10,
h. 0.11,
h. 0.23,
h. 3.30 und
h. 3.40 schwächere Erschütterungen in *Brambach*,
h. 5.45 ebenso in *Schildern.*

18. Juni.

pm. h. 10.10 zwei kräftige Stösse in *Konstadt* (4 km südlich von Graslitz).

19. Juni.

pm. h. 5-6 zwei mit Erzittern verbundene Stösse in *Markneukirchen.*
h. 7.30,
h. 7.35,
h. 7.45 und
h. 8.45 leichte Stösse in *Schönberg.*

22. Juni.

am. h. 3.39 und
3.54 je ein schwacher, aber ziemlich allgemein bemerkter Stoss in *Brambach*,
h. 4.14 und
h. 4.34 sehr leichte Erschütterung in *Brambach.*
pm. h. 5.30 zwei schwache Stösse in *Markneukirchen.*

24. Juni.

pm. h. 8.5 wellenförmige, mehrere Secunden andauernde Erschütterung in *Eichigt.*

28. Juni.

pm. h. 1.20 mehrere, ebenfalls mit Donnerrollen verbundene Erschütterungen in *Brambach*; werden auch in *Oelsnitz* verspürt. In *Tirpersdorf* ertönt unterirdisches Donnern, Möbel erzittern fühlbar.

In hohem Grade charakteristisch für die seismischen Erscheinungen, welche sich in neuerer Zeit im Vogtlande abgespielt haben, sind die Thatsachen:

1. dass sie sich, abgesehen von ziemlich häufigen Einzelstössen, in Form von *Erdbebenschwärmen* kundgaben, zu denen sich Hunderte von Stössen aneinander reihten und zwar im Herbste 1897 in 37tägiger, im Sommer 1900 in 52tägiger und endlich im Mai und Juni 1901 in 53tägiger Periode;

2. dass die Epicentren dieser Erdbebenschwärme nicht in dem durch die complicirtesten tektonischen Störungen zerstückelten mittleren und nördlichen Vogtlande, sondern in dem von solchen nur wenig berührten *südlichen* Vogtlande zu suchen sind;

3. dass dieses letztere zwei selbständige Erdbebenherde birgt, deren einer der Gegend von *Brambach-Schönberg*, deren zweiter derjenigen von *Graslitz-Untersachsenberg* angehört, und deren erster in dem westlichen, deren zweiter in dem östlichen Systeme von seismogenetischen Transversallinien gelegen ist, welche BECKE innerhalb des vogtländisch-egerländischen chronischen Schüttergebietes erkennt[1]);

4. dass die Epicentra beider Herde auf *Granit oder auf dessen Grenze gegen die an ihm abstossenden Schiefer liegen*, wo Bruchlinien oder sonstige Lagerungsstörungen jüngeren Ursprunges nicht vorhanden sind.

Während nun in den Erdbebenperioden der Jahre 1897 und 1900 beide Herde, wenigstens zeitweilig, gemeinsam in Thätigkeit getreten sind, wobei derjenige des Graslitzer Epicentrums die meisten und kräftigsten Stösse erzeugte, ging der Erdbebenschwarm im Mai und Juni des Jahres 1901 ausschliesslich von dem *Brambach-Schönberger Centrum* aus.

Die Reihe der diesen Schwarm bildenden Erschütterungen gliedert sich, ähnlich wie dies bei der Erdbebenperiode 1900 der Fall war, durch eine mehrtägige makroseismische Ruhepause in zwei Abschnitte, deren erster, kürzerer sich vom 8. bis 11. Mai abspielte, während der zweite am 20. Mai begann, in den verhältnissmässig starken Stössen vom 2., 6. und 13. Juni seine grösste Intensität entwickelte, um dann in den Tagen bis zum 28. Juni allmählich zu erlöschen. Selbst die kräftigsten dieser

1) F. BECKE, Das Graslitzer Erdbeben 1897. Mitth. d. Erdbebencommission. Wien, 1898, VIII. S. 165.

Stösse besassen jedoch bei Weitem nicht die Stärke derjenigen des October und November 1897 oder des 25. Juli 1900, dürften vielmehr nur den Grad 4—5 der seismischen Scala erreicht haben, während sich die übrigen, soweit sie überhaupt zur Fühlbarkeit gelangten, mit dem Stärkegrad 3 bis 3.5 äusserten.

Dem entsprechend ist auch der Erschütterungskreis selbst der relativ stärksten Erbebungen dieser Periode ein im Vergleiche mit den mehrfach genannten Erdbeben verhältnissmässig geringer und deckt bloss das südliche Vogtland zwischen Voitersreuth im Süden und Eichigt-Adorf-Markneukirchen im Norden, nebst den ihm direkt angrenzenden böhmischen Nachbarstreifen zwischen Fleissen-Grossloh im Osten und Hirschfeld-Asch-Rossbach im Südwesten und Westen, besitzt also einen nordsüdlichen Durchmesser von nur 17 km.

Von jenseits des Umkreises dieser Fläche liefen noch Meldungen über schwache Erschütterungen aus einigen wenigen isolirten und zum Theil ziemlich weit vorgeschobenen Orten ein, welche der äussersten Zone des peripherisch verklingenden Bebens angehören (so aus *Mähring* im W., aus *Tirpersdorf* im N. und *Konstadt* im O.).

Auffällig ist auch diesmal ebenso wie bei den früheren Schwarmbeben des Vogtlandes[1]) die *excentrische Lage* des Epicentrums innerhalb der Schütterfläche, in welcher es fast an deren südliche Grenze gerückt erscheint, so dass sich die intensiveren Stösse hauptsächlich nach NW und NNW, also in der Richtung der westlichen der beiden Transversallinien-Systeme Becke's, fortgepflanzt haben müssen, — eine Erscheinung, für welche in der Tektonik des dortigen Geländes keinerlei Erklärung zu finden ist.

Wie bei allen grösseren, von uns beschriebenen vogtländischen Erdbeben wiederholt sich auch bei deren neuestem die Erscheinung, dass sich an innerhalb des Schütterareales der Hauptstösse zerstreuten Orten local beschränkte, stossförmige Erbebungen bemerklich machen, welche zeitlich ganz unabhängig von jenen sind und Uhlig's Gruppe der *localen Distalbeben* (l. c. S. 45) zuzurechnen sein würden. Dieselben dürften aber doch wohl als

1) V. Uhlig, Seismische Ereignisse des Jahres 1900 in Deutsch-Böhmen. Mittheil. d. Erdbeben-Commission d. k. k. Akad. d. Wiss. Wien, 1901, Nr. III, S. 49.

Relaisbeben zu deuten sein und ihren Anstoss von diffusen Stössen des Hauptherdes erhalten haben, deren Wirkung auf tektonisch disponirte Punkte sich nicht unmittelbar eingestellt hat. Die grösste derartige Selbständigkeit offenbaren die von Herrn Oberlehrer VOGEL in *Markneukirchen* registrirten Stösse am 9., 10., 26., 28., 29. und 30. Mai, sowie am 1., 2., 19. und 22. Juni, die zeitlich ganz allein stehen. Aehnliches gilt auch von verschiedenen der Erschütterungen, welche die Orte *Asch*, *Schildern*, *Krugsreuth*, *Eichigt* und *Konstadt* betroffen haben.

8. Die vogtländisch-egerländische Erdbebenperiode vom 25. Juli bis zum 31. August.

Schon nach wenig Wochen makroseismischer Ruhe des südlichen Vogtlandes und des Egerlandes wird diese am 25. Juli durch ein neues, aber durchaus anders geartetes Erdbeben gestört. Im Gegensatze zu dem sich auf fast die ganzen beiden letzt vergangenen Monate ziemlich gleichmässig vertheilenden Schwarme leichter Erschütterungen setzt diesmal die seismische Thätigkeit mit einem kräftigen kurzen Stoss von grösserer Stärke ein, als der kräftigste der vorhergegangenen Periode war. Ihm folgt eine Anzahl weit schwächerer, zum Teil sehr schwacher Erschütterungen, die sich in ungleichmässiger zeitlicher Vertheilung, in bald kürzeren, bald längeren Intervallen bis zum 31. August wiederholen.

25. Juli.

Der diese Periode einleitende Hauptstoss verbreitet sich über eine Fläche, die im Westen zwar ebenfalls die Orte Asch, Brambach, Schönberg und Fleissen deckt, aber von hier aus noch weit nach Osten über Bleistadt und Graslitz bis nach Neudeck reicht und sich zu einer schmalen, von WSW nach ONO verlaufenden Schütterzone gestaltet, deren 45 km lange Axe in rechtem Winkel auf derjenigen des neulichen Schütterareales steht. Als Zeitpunkt dieses von Donnerrollen eingeleiteten und gefolgten Bebens wird allgemein h. 1.50 Nachmittags gemeldet.

Um diese Zeit wurde *Brambach* durch einen kurzen, scharfen Stoss von grosser Stärke erschüttert. Nicht nur, dass unter ihm sämmtliche Häuser des Ortes erzitterten und deren Fenster klapperten, sondern es wurden auch leichte Gegenstände von ihrem Platze gerückt und aneinander gestossen, und im Freien beschäftigte Arbeiter fühlten die Erdbewegung unter ihren Füssen. Der

Stärkegrad dieses Stosses muss mindestens den seismischen Grad 5 besessen haben. Als seine Himmelsrichtung wird allgemein NW-SO angegeben (Referent Herr Renz in Brambach).

In der nämlichen Stärke äussert sich dieser Erdstoss in *Schönberg* und wird hier ebenfalls im Freien und in gleicher

Schüttergebiet des Erdbebens vom 25. Juli 1901. *pm.* h. 1.50.

Richtung wie in Brambach verspürt (Referent Herr Leonhardt in Schönberg). Aus dem etwa 5 km südöstlich von Brambach gelegenen Dorfe *Steingrub* wird berichtet, dass sich der Stoss in solcher Heftigkeit geäussert habe, dass bei der gerade celebrirten Communion der Kelch vom Altare gefallen oder wohl von dem erschreckten Priester umgeworfen worden sei und dass sich der in der Kirche Versammelten grosse Angst bemächtigt habe (Ref.

Herr RENZ). Auch von den Bewohnern des zwischen den beiden letztgenannten Orten liegenden Dorfes *Fleissen* wird der Stoss allgemein empfunden, fast ebenso weiter im Süden in *Wildstein* (Referent Herr Renz). Aus den sich weiter östlich anschliessenden Landstrichen liegen Berichte über den Vollzug dieses Bebens vor aus *Bleistadt*, wo der Stoss ebenfalls sehr kräftig war und gleichfalls NW-SO Richtung besass (Referent Herr Distriktsarzt Dr. FUCHS in Bleistadt), ferner aus *Neukirchen*, *Gossengrün* und *Neudeck* (Referent Herr Stadtgeolog KNETT in Karlsbad).

Fast die gleiche Intensität muss der Stoss in *Graslitz* gehabt haben, indem er Fenster, Thüren und Gläser in klappernde und klirrende Bewegung versetzte und ziemlich allgemein bemerkt wurde (Referent Herr Stadtarzt Dr. BÄUML in Graslitz). In einem anderen der nördlichsten Beobachtungsorte, in der Stadt *Markneukirchen* machte sich derselbe als eine intensive, von unterirdischem dumpfem Getöse begleitete wellenförmige Bewegung des Bodens und zwar auch im Freien bemerklich (Zwickauer Wochenblatt). Aus dem Westen von Brambach-Schönberg wird nur aus *Asch* über einen starken vertikalen Stoss mit vorhergehendem und nachfolgendem Donner berichtet (Referent Herr Schuldirektor ALBERTI in Asch).

Da aus den Orten Haslau, Mühlessen und Doglasgrün im Süden dieses Schüttergebietes dem Referenten der österreichischen Erdbeben-Commission, Herrn Stadtgeolog KNETT in Karlsbad, bestimmte negative Meldungen zugegangen sind, so muss sich die Südgrenze des von der Erderschütterung betroffenen Geländes direkt südlich von Schönberg, Wildstein und Gossengrün vorbei auf Neudeck zu erstrecken. Ebenso kann sich die Erschütterung des 25. Juli nach Norden nur wenig über Markneukirchen und Klingenthal hinaus fortgepflanzt haben, da weder von den sächsischen Referenten in den nördlich vorliegenden Orten Schöneck, Adorf und Rossbach, noch von den zahlreichen Stationen der dortigen Eisenbahnen irgend eine Meldung eingelaufen ist.

Hieraus ergiebt es sich, dass das Schüttergebiet des Stosses vom 25. Juli Mittags h. 1.50 die Gestalt einer nur bis 17 km breiten Zone besessen hat, deren Längsaxe die Orte Asch und Neudeck verbindet, vom WSW nach ONO verläuft und 45 km misst.

Da der Stärkegrad der Erschütterung im Osten dieses Streifens (Graslitz) beinahe der gleiche gewesen zu sein scheint, wie im Westen (Brambach, Schönberg, Asch), auch an ziemlich entfernt von einander, ungefähr auf der Längsaxe des Schütter-

gebietes gelegenen Punkten (Brambach-Schönberg und Bleistadt) die nämliche, rechtwinklig zu dieser Axe verlaufende Stossrichtung beobachtet wurde, so dürfte der Ausgangsort dieses Bebens in einer dem erzgebirgischen Absturze parallelen Discontinuität zu suchen sein, die sich freilich in der Tektonik jener Gegend oberflächlich nicht verräth. Dieselbe entspricht voraussichtlich einer jener seismogenetischen Longitudinallinien, die Becke bei Erörterung des sächsisch-böhmischen Bebens vom October und November 1897 zu erkennen glaubt[1]) und „welche das Ostende des Fichtelgebirgsgranits mit dem Südwestrande des Neudecker Granitstockes verbinden, ... dem Abbruche des Erzgebirges parallel gehen, aber nicht mit demselben zusammenfallen."

Auf den Hauptstoss vom 25. Juli und innerhalb dessen Schüttergebietes folgt im Verlaufe der nächsten Wochen ein weitläufiger Schwarm von durch zum Theil längere Zeitzwischenräume getrennten, meist schwachen Erschütterungen, so dass erst mit dem Schlusse des Monats August dauernde seismische Ruhe eintritt. Diese Stösse machen sich entweder ganz local an in der Randzone des Schütterareales zerstreuten Orten (Markneukirchen, Klingenthal, Neudeck, Rossbach) bemerklich und mögen dann noch auf Auslösungen durch den Hauptstoss zurückzuführen sein, oder sie vollziehen sich im südwestlichen epicentralen Abschnitte des letzten Schüttergebietes und dürften in diesem Falle als neue schwache Herdstösse zu erklären sein.

26. Juli.

pm. h. 4.30 schwacher Stoss in *Markneukirchen* (Ref. Herr Oberlehrer Vogel).

30. Juli.

pm. h. 7.45 ein ziemlich starker Stoss in *Asch*, *Gürth*, *Oberreuth*, *Wernersreuth*, *Brambach*, *Schönberg* und *Neukirchen* (Ref. Herr Stadtgeolog Knett in Karlsbad und Herr Postverwalter Renz in Brambach).

31. Juli.

am. h. 4.50, sowie
h. 8.15 an denselben Orten wie am Tage vorher machen sich schwache Erschütterungen bemerklich.

1) F. Becke, Das Graslitzer Erdbeben 1897. Mitth. der Erdbeben-Commission. Wien, 1898. VIII. S. 165 und 169.

Diese sämmtlichen Beobachtungspunkte liegen in einem westöstlich verlaufenden Streifen auf oder in nächster Nähe der Längsaxe des Schüttergebietes vom 25. Juli.

1. August.

am. h. 3.45 in *Markneukirchen* ein kurzer, starker Stoss, der einzelne Schlafende weckt.

h. 3.50 und

h. 4 ebendort zwei schwächere und von dumpferem Rollen begleitete Erschütterungen (Zwickauer Wochenblatt).

10. August.

am. h. 10.45 Beben in *Neudeck* (Ref. Herr Knett in Karlsbad).

pm. h. 5.15 schwacher Stoss in *Rossbach*, *Asch*, *Oberreuth* und *Schönberg*.

11. August.

am. h. 4.30 Erschütterung der nämlichen Orte (Vogtländische Zeitung).

14. August.

pm. h. 9.09 schwache Erschütterung in *Klingenthal* (Telegraph. Mittheilung der Eisenbahnstation).

30. August.

pm. h. 10.10 und

31. August.

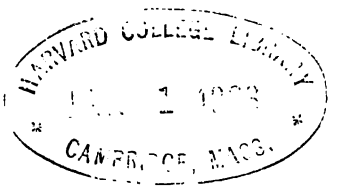
am. h. 4 je ein schwacher Erdstoss in *Brambach* (Ref. Herr Renz).

Mit diesen beiden schwachen Stössen im seismischen Hauptherde des südwestlichen Vogtlandes klang die Schütterperiode des Sommers 1901 aus, um während der ihm folgenden 6 Monate einer ungestörten Ruhe Platz zu machen, die nur einmal, nämlich

9. am 8. und 9. December

in der Gegend von *Markneukirchen* durch je einen recht kräftigen, mit Donnerrollen verbundenen Stoss unterbrochen wurde. Von diesen vollzog sich der erste am 8. December Nachts h. 10.45, der zweite am folgenden Morgen h. 5 (Ref. Herr Oberlehrer H. Vogel).

Druckfertig erklärt 26. III. 1902.]


HARVARD COLLEGE LIBRARY
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 5. MAI 1902.

Geschäftliches:

1. Gemäß den Anträgen einer aus Mitgliedern beider Klassen gebildeten Kommission wird beschlossen, die Anmerkungen der Berichte mit mehr Durchschuß zu drucken und für die Abhandlungen stärkeres Papier, für gewöhnlich unsatiniert, zu nehmen.
2. Aus der Mendestiftung wird Herrn Prof. Siegfried ein Beitrag zu den Kosten einer begonnenen physiologisch-chemischen Untersuchung bewilligt.
3. Die Traktanden des Göttinger Kartelltages und speziell die Anträge der k. k. Akademie in Wien (betr. eine chemische Krystallographie) und die der Münchner Akademie (betr. das Buitenzoogstipendium) werden besprochen, und es wird zum Delegierten am Kartelltag der Klassensekretär ernannt.
4. An die Kommission für luftelektrische Untersuchungen wird ein Beitrag von 220 Mk. bewilligt.
5. Ein Schreiben von Sir Michael Foster, dem Vorsitzenden der internationalen Association der Akademien teilte zwei vom „Marcy Comité" an die Association gestellte Anträge mit und knüpfte daran eine Reihe von prinzipiellen Fragen. Die Klasse tritt zunächst auf die Fragen und Vorschläge nicht ein und behält sich Verständigung mit den Akademien des Kartells vor.
6. Eine Einladung der Universität von Christiania zu der Gedenkfeier für den Mathematiker Abel wird vorgelegt und deren Beantwortung verschoben.

Vorträge hielten:

Herr A. Mayer, o. M.: Vorlegung von 3 Noten des Herrn Thomae: 1. Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte. 2. Projektiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. 3. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Herr C. Neumann: Vorlegung einer Arbeit von Herrn M. Krause: Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen.

Herr C. Neumann: Über Metallreflexion und über totale Reflexion.

Herr Engel: Vorlegung einer Arbeit von Herrn Paul Stäckel: 1. Beiträge zur Flächentheorie, 2. Darstellung der Minimalflächen.

Bemerkungen über Metallreflexion und über totale Reflexion.

Von

C. NEUMANN.

Zu verschiedenen Zeiten und von sehr verschiedenen Seiten her hat man die Phänomene der Metallreflexion und der totalen Reflexion zu erforschen, und die mathematischen Theorien dieser Phänomene zu entwickeln gesucht. Ohne hierauf näher einzugehen, möchte ich im Folgenden nur auf einige einfache *geometrische Regeln* aufmerksam machen, die wohl ganz allgemein gelten, und in Gültigkeit bleiben dürften, wie jene Theorien in Zukunft auch immer sich gestalten werden.

§ 1.

Ueber gewisse charakteristische Unterschiede zwischen der Metallreflexion und der totalen Reflexion.

Es sei O der Punkt, in welchem die Reflexion stattfindet; so dass also O den Endpunkt des einfallenden Strahles und zugleich auch den Anfangspunkt des reflectirten Strahles darstellt. Durch diesen Punkt O gehen hindurch drei aufeinander senkrechte Ebenen, nämlich die reflektirende ebene Fläche, ferner die Reflexionsebene, in welcher jene beiden Strahlen liegen, und endlich drittens diejenige Ebene E, welche zu diesen beiden Ebenen perpendicular ist.

Der einfallende Strahl mag *geradlinig polarisirt* sein, und mag zerlegt gedacht werden in zwei Componenten S und P, nach der Reflexionsebene, und perpendicular gegen dieselbe. Die beiden Componenten S und P sind, was ihre Vibrationen anbelangt, mit einander in Einklang bis zum Augenblick der Reflexion. Dieser Einklang geht aber verloren durch den Process der Reflexion; so dass kurz nach erfolgter Reflexion die eine Componente gegen die andere um eine gewisse Strecke δ verzögert sein wird.

Es liegt in der Natur der Dinge, dass diese relative Verzögerung δ an und für sich[1]) nur bestimmt sein kann bis auf irgend welche ganze Vielfache einer halben Wellenlänge. Diese Vieldeutigkeit kann indessen beseitigt werden durch die Anforderung der *Stetigkeit*. So z. B. dürfte bei der *Metallreflexion* die Verzögerung $\delta = 0$ zu setzen sein für $i = 0$ d. h. im Falle der senkrechten Incidenz. Und durch diesen Anfangswerth $\delta = 0$ für $i = 0$ werden alsdann nach dem Gesetz der Stetigkeit die Werthe von δ für alle übrigen Werthe des Incidenzwinkels i eindeutig bestimmt sein.

Bei der *totalen Reflexion* kann der Fall $i = 0$ überhaupt nicht vorkommen. Denn von $i = 0$ bis zu einem gewissen Werth $i = J$ findet partielle Reflexion statt, der Art, dass totale Reflexion nur stattfindet für die zwischen J und 90^0 liegenden Werthe des Incidenzwinkels i. Jedenfalls wird für $i = J$ der reflectirte Strahl geradlinig polarisirt sein. Und man wird daher, falls es beliebt, für $i = J$ jenes $\delta = 0$ setzen dürfen. Durch diesen Anfangswerth $\delta = 0$ für $i = J$ werden alsdann aber nach dem Gesetz der Stetigkeit die Werthe von δ für alle Incidenzwinkel der totalen Reflexion, d. i. für alle zwischen J und 90^0 liegenden Werthe von i, eindeutig bestimmt sein.

Diese eindeutige Bestimmung von δ vorausgesetzt, wird nun δ bei der Metallreflexion von 0 bis $\frac{\lambda}{2}$ wachsen, wenn man i successive von 0^0 bis 90^0 zunehmen läfst; dabei bezeichnet λ die Wellenlänge.[2]) Andererseits wird z. B. bei der im Innern des Glases stattfindenden totalen Reflexion (das Glas an Luft angrenzend gedacht), die Verzögerung δ, wenn man i von J aus bis 90^0 zunehmen lässt, von $\delta = 0$ zuvörderst wachsen bis ungefähr zum Werthe $\delta = \frac{\lambda}{8}$, und sodann wieder abnehmen bis zum Werthe $\delta = 0$ für $i = 90^0$.[3])

Diese Angaben beziehen sich auf die *absoluten* Werthe von δ. Ein charakteristischer Unterschied zwischen der Metallreflexion

---

1) d. h. so lange man (jedwede Theorie vermeidend) nur allein die Erscheinungen selber ins Auge fasst. Vgl. d. nachtr. Bem. Seite 100.

2) Was in Uebereinstimmung ist mit den Angaben von F. NEUMANN (Pogg. Annal., Bd. 40, Seite 513; 1837).

3) Was in Uebereinstimmung ist mit dem MEYER'schen Vorlesungsheft (vgl. weiter unten Seite 98).

und der totalen Reflexion besteht darin, dass die Werthe von δ bei der einen und bei der andern verschiedene Vorzeichen haben. Setzt man nämlich fest, es solle δ die Verzögerung der Componente P gegen die Componente S sein, so wird δ bei der Metallreflexion stets *positiv*, hingegen bei der totalen Reflexion stets *negativ* sein.

Im einen wie im andern Falle wird man bekanntlich die in Rede stehende relative Verzögerung δ, welche bei irgend einem Incidenzwinkel i zwischen den beiden Componenten des reflectirten Strahles stattfindet, dadurch aufheben, auf Null reduciren können, dass man den reflectirten Strahl durch ein Krystallblättchen von geeigneter Dicke, senkrecht hindurchgehen lässt bei passender Orientirung des Blättchens.[1]) Alsdann vereinigen sich die beiden Componenten des reflectirten Strahles von Neuem zu einem *geradlinig polarisirten* Strahl. Und es fragt sich nun, welche Beziehung die so entstehende neue Polarisationsebene zur ursprünglichen Polarisationsebene des einfallenden Strahles besitzt. Hierauf ist zu antworten:

Im Falle der totalen Reflexion ist die eine Polarisationsebene das Spiegelbild der andern in Bezug auf jene von uns mit E bezeichnete Ebene.

Andererseits aber wird man im Falle der Metallreflexion die Polarisationsebene des reflectirten Strahles durch zwei aufeinanderfolgende Spiegelungen erhalten, von denen die eine an der Ebene E, die andere aber an der Reflexionsebene stattzufinden hat. Allerdings gilt diese Regel für die Metallreflexion nur dann in voller Strenge, wenn man die sogenannten Schwächungskoefficienten s und p beide $= 1$ *sich denkt; was in Wirklichkeit niemals der Fall sein wird. Uebrigens sind die Coefficienten s und p stets positiv und* $\leqq 1$.

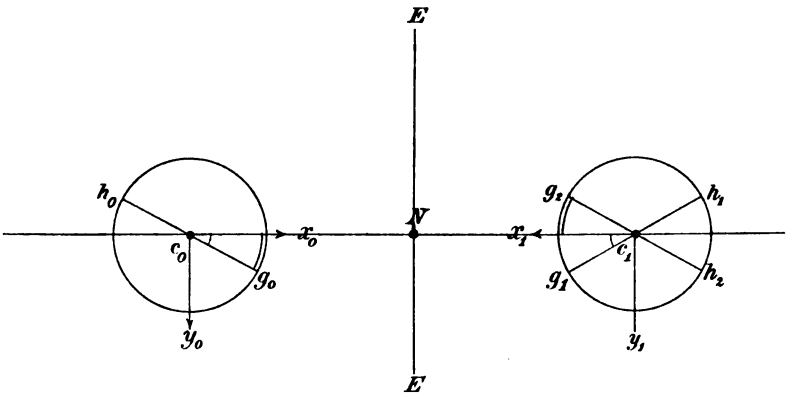
Die nachfolgende Figur ist gezeichnet zu denken auf einer um den Punkt O beschriebenen Kugelfläche. Der höchste Punkt N dieser Kugelfläche soll derjenige sein, in welchem die Kugelfläche

---

1) Das Blättchen ist so orientirt zu denken, dass seine beiden Hauptschnitte parallel und perpendicular zur Reflexionsebene sind. Auch versteht sich von selber, dass man, während i von 0, resp. von J aus, *stetig* wächst, Krystallblättchen in Anwendung zu bringen hat, deren Dicke, von Null aus, Schritt für Schritt in *stetiger* Weise sich ändert.

getroffen wird vom Lothe ON der reflectirenden ebenen Fläche. Ferner mögen die Reflexionsebene und die Ebene E angedeutet sein durch die auf der Kugelfläche gezeichneten und durch den Punkt N hindurchgehenden grössten Kreisbogen $c_0 N c_1$ und ENE. Dabei sollen die Punkte c_0 und c_1 gleich weit von N abstehen; und zwar soll der von c_0 nach dem Kugelmittelpunkt O gehende Kugelradius $c_0 O$ den *einfallenden Strahl* vorstellen; so dass also der *reflectirte Strahl* durch den Kugelradius $O c_1$ repräsentirt sein wird. Schliesslich sind noch auf der Kugelfläche um c_0 und c_1, als Mittelpunkte, zwei unendlich kleine Kreise beschrieben, beide von gleichem sphärischen Radius.

Es sei nun $g_0 h_0$ irgend ein Durchmesser des Kreises linker Hand. Dieser Durchmesser $g_0 h_0$ mag, durch Spiegelung an der



Ebene E, in die Linie $g_1 h_1$ sich verwandeln; und diese letztere Linie mag sodann ihrerseits, durch Spiegelung an der Reflexionsebene, in die Linie $g_2 h_2$ sich verwandeln. Repräsentirt nun $g_0 h_0$ die Polarisationsebene des einfallenden Strahles, so wird (zufolge der vorhin gemachten Angaben) die Polarisationsebene des reflectirten Strahles im Falle der *totalen Reflexion* durch $g_1 h_1$, andererseits aber im Falle der *Metallreflexion* (wenigstens ihrer ungefähren Lage nach) durch $g_2 h_2$ dargestellt sein.

In vorstehender Figur seien $c_0 x_0$ und $c_0 y_0$ zwei zu einander senkrechte Tangenten der Kugelfläche, die beide in c_0 ihren Berührungspunkt haben; ferner bezeichne $c_0 z_0$ die Richtung des einfallenden Strahles, d. i. die centripetale Richtung $c_0 O$. Des-

gleichen seien $c_1 x_1$ und $c_1 y_1$ zwei aufeinander senkrechte Tangenten der Kugel im Punkte c_1; und $c_1 z_1$ bezeichne die Richtung des reflectirten Strahles, d. i. die centrifugale Richtung Oc_1. Alsdann können die beiden Axensysteme $c_0(x_0 y_0 z_0)$ und $c_1(x_1 y_1 z_1)$ bezeichnet werden als zwei *einander analoge*, den beiden Strahlen entsprechende Axensysteme; denn für den Fall der streifenden Incidenz ($i = 90^0$) würden die Axenrichtungen des einen Systems völlig identisch werden mit denen des andern.

Demgemäss werden also *bei der Metallreflexion* die Polarisationsebenen $g_0 h_0$ und $g_2 h_2$ gelegen sein in einander *nicht* entsprechenden Quadranten; denn $g_0 h_0$ liegt im Quadranten $c_0(x_0 y_0)$, hingegen $g_2 h_2$ ausserhalb des Quadranten $c_1(x_1 y_1)$. Von den betreffenden Azimuthen $x_0 c_0 g_0$ und $x_1 c_1 g_2$ (die in der Figur doppelt gestrichen sind) wird daher das eine als *positiv*, das andere aber als *negativ* zu bezeichnen sein. Auch wird zu sagen sein, dass diese Azimuthe auf verschiedenen Seiten der Reflexionsebene gelegen sind. Diese für die Metallreflexion geltenden Regeln werden im Wesentlichen, nämlich was den *allgemeinen Charakter* der Lagen der Polarisationsebenen und die *Vorzeichen* ihrer Azimuthe anbelangt, offenbar auch dann noch in Kraft bleiben, wenn jene stets positiven Schwächungscoeffizienten s und p nicht $= 1$ sind, sondern beliebige Werthe haben. Nur die *Grössen* der Azimuthe werden alsdann andere werden, insofern, als jene Winkel $x_0 c_0 g_0$ und $x_1 c_1 g_2$ alsdann nicht mehr einander gleich sind.

Was andererseits die *totale Reflexion*, d. i. die Polarisationsebenen $g_0 h_0$ und $g_1 h_1$ betrifft, so gelten hier, wie man sofort übersieht, die entgegengesetzten Regeln. So z. B. liegen die Ebenen $g_0 h_0$ und $g_1 h_1$ in einander entsprechenden Quadranten, nämlich $g_0 h_0$ im Quadranten $c_0(x_0 y_0)$, und $g_1 h_1$ im Quadranten $c_1(x_1 y_1)$. U. s. w.

§ 2.

Ueber den Specialfall der streifenden Incidenz.

In diesem Falle werden in unserer Figur die grösten Kreisbogen Nc_0 und Nc_1 beide $= 90^0$ sein; so dass also die Punkte c_0 und c_1 auf der Kugelfläche einander diametral gegenüberliegen. Alsdann aber werden, wie leicht zu übersehen ist, bei der *Metallreflexion* die beiden Polarisationsebenen $g_0 h_0$ und $g_2 h_2$ zu einander *symmetrisch* liegen in Bezug auf die Reflexionsebene (die eine das Spiegelbild der andern in Bezug auf diese Ebene).

Selbstverständlich ist dabei (ebenso wie bisher) vorausgesetzt, dass jene durch die Reflexion hervorgerufene relative Verzögerung δ, die im gegenwärtigen Falle (wo $i = 90^0$ ist) den Werth $\frac{\lambda}{2}$ besitzt (vgl. Seite 93), wiederaufgehoben sei durch ein Krystallblättchen von geeigneter Dicke. Entfernen wir dieses Krystallblättchen, und lassen wir also jene Verzögerung $\delta = \frac{\lambda}{2}$, d. i. den betreffenden Phasenunterschied $\frac{\delta}{\lambda} 2\pi = \pi$ wirklich zur Geltung kommen, so erkennen wir sofort, dass die neue Polarisationsebene nicht die Lage $g_2 h_2$, sondern die zu $g_2 h_2$ in Bezug auf die Reflexionsebene symmetrische Lage besitzen wird, und dafs sie also *identisch* sein wird mit der ursprünglichen Polarisationsebene $g_0 h_0$. Endlich würden noch die Schwächungscoefficienten s und p in Rechnung zu bringen sein. Diese aber geben keinen weiteren Effect, weil im gegenwärtigen Falle (wo $i = 90^0$ ist) der Quotient $\frac{s}{p} = 1$ ist.

Was andererseits die *totale Reflexion* im Falle der streifenden Incidenz ($i = 90^0$) betrifft, so übersieht man sofort, dass in diesem Falle die beiden Polarisationsebenen $g_0 h_0$ und $g_1 h_1$ unter einander *identisch* sind. Und diese Identität wird durch Fortnahme des gedachten Krystallblättchens nicht geändert werden. Denn im gegenwärtigen Fall ($i = 90^0$) ist die durch die Reflexion erzeugte relative Verzögerung δ bekanntlich $= 0$ (vgl. Seite 93), mithin die Dicke jenes (zur Aufhebung dieser Verzögerung dienenden) Krystallblättchens ebenfalls $= 0$.

§ 3.

Die betreffenden analytischen Ausdrücke.

Das einfallende Licht sollte unter irgend welchem Azimuth *geradlinig polarisirt* sein; sodass also die Formeln für die Vibrationsbewegungen des einfallenden Lichtes von der Gestalt sind:

$$\text{(E.)} \qquad \begin{cases} x_0 = A \cos \frac{t}{T} 2\pi, \\ y_0 = B \cos \frac{t}{T} 2\pi, \end{cases}$$

wo A, B gegebene Constanten sind; während t die Zeit und T die Schwingungsdauer vorstellen. Für den reflectirten Strahl werden alsdann folgende Formeln gelten:

$$(\text{M.})\begin{cases} x_1 = (-s)\,A\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{\delta_s}{\lambda}\right)2\pi, \\ y_1 = p\,B\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{\delta_p}{\lambda}\right)2\pi, \end{cases} \qquad (\text{T.})\begin{cases} x_1 = A\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{\delta_s}{\lambda}\right)2\pi, \\ y_1 = B\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{\delta_p}{\lambda}\right)2\pi, \end{cases}$$

und zwar die Formeln (M.) für den Fall der *Metallreflexion*, andererseits die Formeln (T.) für den Fall der *totalen Reflexion*. Hier sind unter $c_0(x_0y_0z_0)$ in (E.), und unter $c_1(x_1y_1z_1)$ in (M.), (T.) jene schon früher von uns festgesetzten Axensysteme zu verstehen. Dabei wird alsdann die Differenz $\delta = \delta_p - \delta_s$ zu bezeichnen sein als die relative Verzögerung der perpendicular zur Einfallsebene polarisirten Componente gegen die nach dieser Ebene polarisirte Componente. Diese relative Verzögerung $\delta = \delta_p - \delta_s$ ist *positiv* bei der Metallreflexion, hingegen *negativ* bei der totalen Reflexion. Sie ist also *positiv* in den Formeln (M.), hingegen *negativ* in den Formeln (T.).

Im Grunde genommen enthalten die Formeln (E.), (M.), (T.) nichts Neues, sie repräsentiren nur den analytischen Ausdruck der schon im Vorhergehenden gemachten Angaben. Noch ist zu bemerken, dass nach jenen Angaben die Grössen s, p stets positiv sind, und stets $\leqq 1$. Auch sind die Werthe von s, p, ebenso wie der Werth von δ, nur allein abhängig vom Incidenzwinkel i.

Schliesslich möchte ich bemerken, dass die hier dargelegten einfachen Vorstellungen im Wesentlichen wohl schon in einer Abhandlung meines Vaters (Pogg. Ann. Bd. 26, Seite 89—122; 1832) sich vorfinden; wobei indessen eine spätere Correction dieser Abhandlung (in Pogg. Ann. Bd. 40, Seite 513, 514; 1837) mitzuberücksichtigen ist. Diese Correction ist, in Folge ihrer Kürze, nicht ganz leicht zu verstehen. Zum Beweise dafür, dass dieselbe von mir in richtiger Weise erfasst ist, mag mir gestattet sein, hinzuweisen auf die *Vorlesungen* meines Vaters in den Jahren 1857—1861. Es kommen dabei namentlich in Betracht ein Vorlesungsheft vom Wintersemester 1857/58, ausgearbeitet von O. E. MEYER (jetzt Professor in Breslau), und ein späteres Vorlesungsheft vom Winter 1860/61 und vom Sommersemester 1861, ausgearbeitet von K. ZÖPPRITZ († , zuletzt Professor in Königsberg in Pr.).

Im MEYER'schen Heft (daselbst Seite 172, 173) wird bemerkt, dass bei der *totalen Reflexion*, im Innern eines an Luft angrenzenden Glases, die relative Verzögerung $\delta = 0$ ist an den beiden

Grenzen der totalen Reflexion, d. i. für $i = J = 41^\circ 30'$ und für $i = 90^\circ$, dass ferner der absolute Werth dieser Verzögerung δ zwischen den genannten beiden Grenzen ungefähr bei $i = 51^\circ 20'$ ein Maximum erreicht, und dass dieser Maximalwerth ungefähr $= \frac{\lambda}{8}$ ist.

Sodann sind aus dem ZÖPPRITZ'schen Heft insbesondere vier Stellen (daselbst Seite 44, 45, 46) anzuführen. Dieselben lauten:

I. Wenn das einfallende Licht unter einem beliebigen Azimuth polarisirt ist, so würde, wenn keine relative Verzögerung der beiden Componenten gegeneinander erfolgte, nach der *totalen Reflexion* die Polarisationsebene in *demselben* Quadranten liegen, wie im einfallenden Licht [d. h. die eine im Quadranten $c_0\,(x_0\,y_0)$, die andere im Quadranten $c_1\,(x_1\,y_1)$; vgl. die Figur Seite 95].

II. In diesem Verhalten zeigt sich klar der Unterschied zwischen totaler Reflexion und Metallreflexion. Während nämlich bei der *totalen Reflexion* die Polarisationsebene auf *derselben* Seite der Reflexionsebene bleibt [die Punkte g_0 und g_1 in jener Figur liegen beide auf *derselben* Seite der Reflexionsebene], wird sie bei der *Metallreflexion* auf die *andere* Seite der Reflexionsebene geworfen [d. h. aus der Lage $g_1 h_1$ hinübergeworfen in die Lage $g_2 h_2$].

III. Hierdurch wird auch die Anwendbarkeit unserer für die *Metallreflexion* gefundenen Formeln auf die *totale Reflexion* ermöglicht. Das Wesentliche hierbei ist, dass man s mit $-s$ vertauschen muss, um den Fall der *totalen Reflexion* zu erhalten. Ausserdem aber werden hier, bei der totalen Reflexion, beide Componenten *vollständig* reflectirt; so dass man also [nachdem jene Vertauschung ausgeführt worden ist] nachträglich noch $s = p = 1$ zu machen hat.

IV. Ferner ist zu bemerken, dass bei der *totalen Reflexion* die relative Verzögerung $\delta = \delta_p - \delta_s$ der perpendicular zur Einfallsebene polarisirten Componente gegen die nach dieser Ebene polarisirte Componente *negativ* ist, folglich kommt der in der Einfallsebene schwingende Strahl aus grösserer Tiefe, — also umgekehrt wie bei der *Metallreflexion* [wo jenes δ *positiv* ist, und also der perpendicular zur Einfallsebene polarisirte Strahl aus grösserer Tiefe kommt].

Diese Stellen I., II., III., IV. sind hier aus dem ZÖPPRITZ'schen Heft fast wörtlich entnommen, abgesehen von den in eckigen Klammern beigefügten Notizen.

Aus all' diesen Citaten dürfte hervorgehen, dass die im vorliegenden Aufsatz enthaltenen Angaben und Regeln in der That in Einklang sind mit den Anschauungen meines Vaters, und dass

sie daher (weil jene Anschauungen ohne Zweifel den beobachteten Erscheinungen entsprechen) auch in Einklang sein werden mit der *Wirklichkeit.*

Nochmals möchte ich hervorheben (was schon zu Anfang dieses Aufsatzes angedeutet wurde), dass es sich hier nicht um irgend welche *Theorie*, sondern nur allein um die *Beschreibung der Thatsachen* handelt.

Nachträgliche Bemerkungen.

Was die Factoren der trigonometrischen Functionen [z. B. die Factoren der Cosinus in den Formeln Seite 97, 98] anbelangt, — so haben wir uns, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, in Betreff der *Vorzeichen* dieser Factoren keinerlei Beschränkungen auferlegt. Von dieser Freiheit Gebrauch machend, werden wir z. B., falls es uns beliebt, die auf Seite 93 für δ adoptirten Anfangswerthe:

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} \delta = 0 \text{ für } i = 0, \text{ bei der Metallreflexion,} \\ \delta = 0 \text{ für } i = J, \text{ bei der totalen Reflexion,} \end{cases}$$

durch folgende Anfangswerthe ersetzen dürfen:

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \delta = M\frac{\lambda}{2} \text{ für } i = 0, \text{ bei der Metallreflexion,} \\ \delta = N\frac{\lambda}{2} \text{ für } i = J, \text{ bei der totalen Reflexion,} \end{cases}$$

wo M und N willkürlich zu wählende (positive oder negative) ganze Zahlen sind; dementsprechend kann alsdann die Schreibweise der Formeln Seite 97, 98 etwas anders eingerichtet werden.

Welche Werthe wir nun aber auch diesen ganzen Zahlen M und N zuertheilen mögen, — stets werden die auf Seite 94, 95 angegebenen einfachen geometrischen Regeln Gültigkeit besitzen für die *anfängliche* Polarisationsebene des reflectirten Strahles bei $i = 0$, resp. $i = J$. Auch werden sie, wenn der Winkel i, von 0, resp. von J aus, allmählig wächst, Gültigkeit behalten für die *weiterfolgenden* Polarisationsebenen des reflectirten Strahls, falls man nur (durch Anwendung eines Krystallblättchens, dessen Dicke, von Null aus, Schritt für Schritt in *stetiger* Weise sich ändert) Sorge dafür trägt, dass diese weiterfolgenden Polarisationsebenen jener anfänglichen Polarisationsebene in *stetiger* Weise sich anschliessen.

Noch sei bemerkt, dass Alles, was hier über *totale* Reflexion gesagt ist, mit wirklicher Strenge nur für *ideal völlig durchsichtige* Medien gilt, nicht aber für mehr oder weniger absorbirende Medien.

Druckfertig erklärt 14. VII. 1902.]

Beiträge zur Flächentheorie.[1])

Von

Paul Stäckel in Kiel.

VII.

Darstellungen der Minimalcurven.

Wie Herr Scheffers mit Recht hervorgehoben hat, ist der Begriff der *Minimalflächen* älter als der Begriff der *Minimalcurven*, der in allen Arbeiten über Minimalflächen bis zu denen von Sophus Lie nur implicite auftritt.[2]) Erst Lie hat den Namen *Minimalcurven* eingeführt und mit diesen Curven geometrisch operirt.[3]) Implicite aber finden sich die Minimalcurven bereits bei Monge, den das Problem die Flächen zu finden, die in jedem Punkte gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien besitzen, im Jahre 1784 auf die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

geführt hat.[4]) Er erfüllt sie durch:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \Phi'(u), \\ y = \Phi(u) - u\Phi'(u), \\ z = i\int\sqrt{1+u^2}\,\Phi''(u)\,du. \end{cases}$$

---

1) Fortsetzung der Mittheilungen im Jahrgange 1896, S. 478—504 und im Jahrgange 1898, S. 3—20.

2) *Einführung in die Theorie der Flächen.* Leipzig 1902. S. 247; vgl. auch *Einführung in die Theorie der Curven.* Leipzig 1901. S. 340.

3) *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen I.* Archiv for Math. og Naturv. 2 (1877). S. 157—198. *Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I.* Math. Ann. 14 (1879). S. 331—416.

4) *Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles.* Mém. Paris 1784 (1787). S. 144 und *Application de l'analyse à la géométrie.* (1. Ausgabe 1795) § XX.

LEGENDRE hat dann gezeigt, dafs die Quadratur wegfällt, wenn

$$\Phi(u) = (1 + u^2)^{3/2} F'(u)$$

gesetzt wird.[1])

Von entscheidender Bedeutung für die Theorie der Minimalflächen wurde später die Darstellung, die ENNEPER[2]) und WEIERSTRASS[3]) für die nicht geradlinigen Minimalcurven gegeben haben, nämlich

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int (1 - \tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau, \\ y = \frac{i}{2}\int (1 + \tau^2)\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau, \\ z = \int \tau\,\mathfrak{F}(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Um die Quadraturen zu beseitigen, braucht man hier nur

$$\mathfrak{F}(\tau) = f'''(\tau)$$

zu setzen und erhält alsdann die Formeln:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - \tau^2) f''(\tau) + \tau f'(\tau) - f(\tau), \\ y = \frac{i}{2}(1 + \tau^2) f''(\tau) - i\tau f'(\tau) + i f(\tau), \\ z = \tau f''(\tau) - f'(\tau). \end{cases}$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Formeln (3) im Grunde schon sehr alt sind. Zunächst kann man sie auf Formeln von EULER zurückführen, der in einer 1776 verfassten Abhandlung[4]) bewiesen hat, dass die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

---

1) *Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles.* Mém. Paris 1787 (1789). S. 314.

2) *Analytisch-geometrische Untersuchungen.* Ztschrift f. Math. u. Phys. 9 (1864). S. 107.

3) *Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist.* Monatsberichte. Berlin 1866. S. 619.

4) *De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroidica quacunque geometrice ducendis.* Conv. exh. 4. Juli 1776. Nova Acta Petrop. t. III ad annum 1785 (1788). S. 58f. Mein Freund ENGEL hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass EULER auch in der unmittelbar vorhergehenden Abhandlung: „Specimen singulare analyseos infinitorum indeterminatae, S. 47–56 (Conv. exh. 18. März 1776) dasselbe Problem behandelt hat.

identisch erfüllt wird, indem man setzt:

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \cos\vartheta\, F''(\vartheta) + \sin\vartheta\, F'(\vartheta), \\ y = \sin\vartheta\, F''(\vartheta) - \cos\vartheta\, F'(\vartheta), \\ s = \quad F''(\vartheta) \qquad\qquad + F(\vartheta). \end{cases}$$ [1])

Wie man leicht erkennt, giebt die Darstellung (4) alle Curven der Ebene mit Ausnahme der geraden Linien, denn aus (4) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\vartheta.$$

Wird nun in (4)

$$(A)\quad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \tau, \qquad (B)\quad F(\vartheta) = \frac{2f(\tau)}{1+\tau^2}$$

gesetzt, so ergeben sich, wie eine einfache Rechnung zeigt, genau die Enneper-Weierstrass'schen Formeln für x, z und $-iy$.

Die Formeln (4) sind jedoch nur das Endergebniss einer Reihe von Untersuchungen, die Euler über die Gleichung $dx^2 + dy^2 = ds^2$ angestellt hat. Bereits im Jahre 1738 hatte er eine Lösung dieser Gleichung angegeben[2]), nämlich:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = P(u) + Q'(u)\,\dfrac{P'^2(u) - Q'^2(u)}{Q'(u)P''(u) - P'(u)Q''(u)}, \\ y = \qquad\qquad \dfrac{(P'^2(u) - Q'^2(u))^{3/2}}{Q'(u)P''(u) - P'(u)Q''(u)}, \\ s = Q(u) + P'(u)\,\dfrac{P'^2(u) - Q'^2(u)}{Q'(u)P''(u) - P'(u)Q''(u)}, \end{cases}$$

wo $P(u)$ und $Q(u)$ zwei willkürliche Functionen bedeuten, für die nur der Ausdruck

$$Q'(u)\,P''(u) - P'(u)\,Q''(u)$$

---

1) Bei Euler steht statt $F(\vartheta)$ allerdings

$$\int v(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Die Form des Textes findet sich wohl zuerst bei Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions,* Leçon XIX (1799) (Oeuvres, t. X. Paris 1884. S. 314—316) und ist wahrscheinlich durch dessen Vermittelung auf Liouville (Monge, Application de l'analyse à la géométrie. 5. Ausgabe. Paris 1850. Note I. S. 558) und Darboux (Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 = ds^2$, J. de Math. (2) 18 (1873). S. 236) übergegangen.

2) *De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis.* Comment. Petrop. ad annos 1730 et 1731 (1738). S. 169. Vergl. auch einen Brief Eulers an Joh. Bernoulli vom 26. April 1738 (Bibliotheca mathematica 1897, S. 53).

nicht identisch verschwinden darf. EULER benutzt die Formeln (5) um algebraische Curven herzustellen, die sich algebraisch rectificiren lassen. Wie er die Formeln (5) gefunden habe, giebt er nicht an, sondern bemerkt nur, dass man sich durch Ausführung der Rechnung, die nur Arbeit, aber keine Kunstgriffe erfordere, von ihrer Richtigkeit überzeugen werde.

Eine Herleitung und ausführliche Untersuchung der Formeln (5) enthält eine im Jahre 1760 erschienene Abhandlung.[1]) Wird $dy = n \cdot dx$ gesetzt, so ist $ds = \sqrt{1 + n^2} \cdot dx$, und es liegt der Ansatz nahe:

$$y = n \cdot x + p, \quad s = \sqrt{1 + n^2} \cdot x + q,$$

aus dem

$$n = \frac{dq}{\sqrt{dp^2 - dq^2}}$$

folgt. Wird also

$$q = \varphi(p)$$

angenommen, so erhält man:

$$(6) \qquad \begin{cases} x = & -\dfrac{(1 - \varphi'^2(p))^{3/2}}{\varphi''(p)}, \\ y = p - \varphi'(p) & \dfrac{1 - \varphi'^2(p)}{\varphi''(p)}, \\ s = \varphi(p) - & \dfrac{1 - \varphi'^2(p)}{\varphi''(p)}. \end{cases}$$

Diese Lösung lässt sich verallgemeinern, indem p als Function von u angesehen wird, und man wird so zu den Formeln (5) geführt.

Die Formeln (6) stehen in engem Zusammenhange mit den Formeln (4). Um sie zu vereinfachen, wird sich sofort die Substitution

$$(A') \quad \varphi'(p) = \sin\vartheta$$

darbieten, aus der sich ergiebt:

---

1) *De methodo Diophanteae analoga in analysi infinitorum.* Nov. Comment. Petrop. t. V ad annos 1754 et 1755 (1760). S. 84—144. Dieselben Betrachtungen finden sich auch in dem aus EULERS Nachlass herausgegebenen Fragmente: *Specimen methodi facilis analysin infinitorum indeterminatam tractandi* (Opera postuma, t. I. Petersburg 1862. S. 515).

$$x = -\cos^2\vartheta\frac{dp}{d\vartheta},$$

$$y = p - \sin\vartheta\cos\vartheta\frac{dp}{d\vartheta},$$

$$s = \int\sin\vartheta\,dp - \cos\vartheta\frac{dp}{d\vartheta}$$

$$= \sin\vartheta\cdot p - \int p\cos\vartheta\,d\vartheta - \cos\vartheta\frac{dp}{d\vartheta}.$$

Um die Quadratur zu beseitigen, hat man nur

$$\int p\cos\vartheta\,d\vartheta = -F(\vartheta)$$

setzen, sodass also

$$(B') \quad p = -\frac{F'(\vartheta)}{\cos\vartheta}$$

wird. Eine einfache Rechnung ergiebt alsdann genau die Formeln (4). Ob Euler mittels der eben angegebenen Transformationen zu den Formeln (4) gelangt ist oder ob er diese direct gefunden hat, muss unentschieden bleiben.[1])

Man kann jedoch noch weiter zurückgehen. Die Formeln (6) finden sich, wie ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn G. Enestrom entnehme, bereits in einer Abhandlung Joh. Bernoullis vom Jahre 1724.[2]) In der That heisst es dort, die Curve mit der Abscisse $\frac{(1-p^2)^{3/2}}{q}$ und der Ordinate $p\frac{(1-p^2)}{q} - x$, wo p eine Function von x und q deren Ableitung nach x bedeutet,

1) Für die zweite Möglichkeit könnte man anführen, dass Euler in der Abhandlung: *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet* (Nova Acta Petrop. t. V ad annum 1787 (1789). S. 60—61), die vom 3. Juni 1776 datirt ist, die Formeln (4) nicht benutzt, obwohl sie für seine Untersuchung sehr nützlich gewesen sein würden. Man würde so zu der Vermutung geführt werden, dass Euler die Formeln (4) erst nach dem 3. Juni 1776 gefunden habe.

2) *Methodus commoda et naturalis reducendi quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad longitudines curvarum algebraicarum.* Acta Eruditorum. 1724. S. 256 und Opera omnia. t. II. Lausanne und Genf 1742. S. 586. Die Veranlassung war eine von Jacob Hermann in der Acta Erudit. 1719 gestellte Aufgabe, mit der sich auch Nic. Bernoulli (A. E. 1720) beschäftigt hatte.

habe die Länge $L = \frac{1-p^2}{q} - \int p\,dx$. Freilich ist für JOH. BERNOULLI allein der Umstand von Wichtigkeit, dass

$$\int p\,dx = \frac{1-p^2}{q} - L$$

wird, dass also die Quadratur $\int p\,dx$ auf die Ermittelung von L zurückgeführt ist.

Wenn auch JOH. BERNOULLI als Entdecker der Formeln (6) bezeichnet werden muss, so wird sein Verdienst doch durch den Umstand vermindert, dass Formeln, die zu diesen in naher Beziehung standen, damals den Mathematikern, dem Wesen der Sache nach, bereits mehr als fünfzig Jahre bekannt waren, die Formeln nämlich, welche die Theorie der Evoluten liefert, die HUYGENS 1665 gefunden und 1673 veröffentlicht hatte.[1]) Die Evolute der Curve $\eta = \psi(\xi)$ wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = \xi - \psi'(\xi)\,\dfrac{1+\psi'^2(\xi)}{\psi''(\xi)}, \\ y_1 = \psi(\xi) \quad + \dfrac{1+\psi'^2(\xi)}{\psi''(\xi)}. \end{cases}$$

Sie hat als Bogenlänge s_1 den Krümmungsradius der ursprünglichen Curve $\eta = \psi(\xi)$, es ist also

$$s_1 = \frac{(1+\psi'^2(\xi))^{3/2}}{\psi''(\xi)}.$$

Wird hierin

$$\psi(\xi) = i\varphi(\xi)$$

gesetzt, so kommt:

$$x_1 = \xi - \varphi'(\xi)\,\frac{1-\varphi'^2(\xi)}{\varphi''(\xi)},$$

$$y_1 = i\varphi(\xi) - i\,\frac{1-\varphi'^2(\xi)}{\varphi''(\xi)},$$

$$s_1 = -i\,\frac{(1-\varphi'^2(\xi))^{3/2}}{\varphi''(\xi)},$$

---

1) *Horologium oscillatorium.* Paris 1673. Pars III: De evolutione et dimensione linearum curvarum. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass HUYGENS seine Theorie in geometrischer Form entwickelt hat und dass die Umsetzung seiner Sätze in analytische Form in voller Allgemeinheit erst nach Ausbildung der Methoden der Infinitesimalrechnung möglich geworden ist. Z. B. hat JOH. BERNOULLI diese Umsetzung in seinen *Lectiones mathematicae de methodo integralium* (1691—1692, veröffentlicht 1742) durchgeführt (Opera omnia, t. III. S. 436—437).

sodass $-is_1$, x_1, $-iy_1$ der Reihe nach die Ausdrücke (6) für x, y, s ergeben, für die deshalb $dx^2 + dy^2 = ds^2$ wird.

Joh. Bernoulli hat diese Beziehung, die allerdings durch das Imaginäre vermittelt wird, nicht erkannt, im Gegentheil erklärt er am Anfange seiner Abhandlung, es erscheine ihm als ein indirectes und wenig natürliches Verfahren für die Rectification zur Natur der Evoluten seine Zuflucht zu nehmen, dabei komme man zu mühevollen Rechnungen, während er jetzt die genuine Methode der Behandlung entdeckt habe, die alle Erwartungen übertreffe. Ebensowenig hat Euler, der doch sonst das Rechnen mit imaginären Gröfsen nicht vermied, den Weg von seinen Formeln (5) zur Evolutentheorie gefunden.

Von Interesse ist auch, dass Monge in einer Abhandlung, die aus dem Jahre 1784 stammt[1]), die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = dz^2$$

untersucht hat und zu einer Lösung gelangt ist, die mit der Huygens'schen identisch ist, ohne dass er das bemerkt hätte. Er sagt nämlich, dass jene Gleichung in allgemeinster Weise erfüllt werde, indem x, y, z aus den Gleichungen:

$$(8) \qquad \begin{cases} (x-\beta)^2 + (y-\varphi(\beta))^2 = z^2, \\ x - \beta + (y-\varphi(\beta))\,\varphi'(\beta) = 0, \\ -1 - \varphi'^2(\beta) + (y-\varphi(\beta))\,\varphi''(\beta) = 0 \end{cases}$$

bestimmt werden; dabei bedeutet $\varphi(\beta)$ eine willkürliche Function ihres Argumentes. Aus den Gleichungen (8) folgen aber, wenn β durch ξ, φ durch ψ ersetzt wird, die Gleichungen (7) der Evolutentheorie. Ebensowenig hat Monge die Gleichungen (8) dazu benutzt, um eine von Quadraturen freie Lösung der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

zu gewinnen, von der er in derselben Abhandlung sagt, dass sie weder durch Flächen noch durch Curven erfüllt werden könne,

1) *Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.* Mém. Paris 1787 (1789). S. 502—576. Monge betrachtet die Gleichung $a^2dz^2 = dx^2 + dy^2$ (a eine Constante) und erhält die Integralgleichungen nach einer für Gleichungen $H(dx, dy, dz) = 0$ gültigen allgemeinen Methode.

sondern einzig und allein für die Punkte des Raumes bestehe, was ja im reellen Gebiete richtig ist.

Es sei gestattet zum Schluss das Ergebniss der vorhergehenden Untersuchungen dahin zusammenzufassen, dass *eine Reihe einfacher Umformungen von der* ENNEPER-WEIERSTRASS*'schen Darstellung der Minimalcurven zu den Formeln der* HUYGENS*'schen Evolutentheorie führt.* Gleichzeitig hat sich aber auch herausgestellt, dass *der Zusammenhang des Problems der Rectification mit der Darstellung der Minimalcurven für die Entwicklung der Theorie der Minimalflächen unfruchtbar geblieben ist, weil man es nicht wagte, mit imaginären Gebilden zu operiren.*

VIII.

Ueber die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen.

1. In dem ersten dieser Beiträge: *Zur Theorie der Krümmungslinien* habe ich die Abänderungen untersucht, welche die klassische Krümmungstheorie erfährt, wenn man die Voraussetzung der Realität fallen lässt und auch complexe Gebilde zulässt. Die Krümmungslinien einer Fläche, deren Krümmungsmass von Null verschieden ist, bilden alsdann nur im Allgemeinen ein Orthogonalsystem, ausgenommen sind nämlich diejenigen geradlinigen Flächen, die aus Minimalgeraden bestehen. Bei diesen fallen die Krümmungslinien in eine Schar zusammen, die von den Minimalgeraden gebildet wird, es sei denn, dass die Fläche noch eine zweite Erzeugung durch Minimalgeraden zulässt; in diesem Falle ist sie eine Kugel, auf der jede Curve als Krümmungslinie angesehen werden darf.

Unter den Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen, giebt es eine, wie ich im Jahre 1896 annahm, noch nicht bemerkte Klasse von Flächen constanten Krümmungsmaasses; die Darstellung ihrer rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch zwei Parameter habe ich damals auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung zurückgeführt, deren Integration übrigens, wie aus den LIE'schen Theorien hervorgeht, ausser Quadraturen nur die Lösung einer RICCATI'schen Differentialgleichung erfordert.[1])

In seiner kürzlich erschienenen *Einleitung in die Theorie der Flächen* (Leipzig 1902) hat Herr SCHEFFERS auf diese Unter-

1) Vgl. z. B. ENGEL, Math. Ann. 27 (1886), S. 26.

suchungen Bezug genommen und sie insofern vervollständigt, als er die explicite Darstellung von x, y, z mittels dreier von einander unabhängiger Quadraturen angegeben hat. Hierdurch veranlasst erlaube ich mir im Folgenden einige Eigenschaften der Flächen zu entwickeln, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen; im Besonderen wird daraus eine Darstellung der Coordinaten x, y, z folgen, die von allen Quadraturen befreit ist und erkennen lässt, dass unter jener Klasse von Flächen sogar unendlich viele algebraische Flächen enthalten sind.

2. Um eine Fläche, die aus Minimalgeraden besteht, analytisch darzustellen, möge nach dem Vorgange von Herrn Scheffers[1]), indem die Kugel ausgeschlossen wird, als Leitcurve eine der krummen Minimalcurven der Fläche gewählt werden, also etwa, indem $\varphi(u)$ eine willkürliche Function von u bedeutet, die Curve

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}\int (1-u^2)\,\varphi(u)\,du, \qquad \mathfrak{y} = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\varphi(u)\,du, \qquad \mathfrak{z} = \int u\varphi(u)\,du.$$

Dann werden die Gleichungen der Fläche:

$$(2)\qquad x = \mathfrak{x} + \alpha v, \qquad y = \mathfrak{y} + \beta v, \qquad z = \mathfrak{z} + \gamma v,$$

wo die Functionen α, β, γ von u so zu wählen sind, dass

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

wird. Ohne die Allgemeinheit einzubüssen erreicht man das, indem α, β, γ proportional oder auch direct gleich

$$\tfrac{1}{2}(1-\omega^2), \quad \frac{i}{2}(1+\omega^2), \quad \omega$$

gesetzt werden, wo ω eine willkürliche Function von u bezeichnet, und erhält so die Darstellung:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}\int (1-u^2)\varphi(u)\,du + \tfrac{1}{2}(1-\omega^2)\cdot v, \\ y = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\varphi(u)\,du + \frac{i}{2}(1+\omega^2)\cdot v, \\ z = \int u\varphi(u)\,du + \omega\cdot v. \end{cases}$$

1) *Einleitung in die Theorie der Flächen*, S. 227—228.

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ist das GAUSS'sche Krümmungsmass

$$K = \frac{4\omega'^2}{(u-\omega)^4\varphi^2}; \tag{4}$$

ω darf daher keine Constante sein. Da K eine Function von u allein ist, so sind, wie Herr SCHEFFERS bemerkt, die Minimalgeraden gleichzeitig die Curven constanten Krümmungsmasses. Mit diesem Ergebnisse schliesst er seine Untersuchung.

3. Um zu neuen Eigenschaften der betrachteten Flächen zu gelangen, stelle ich mir die Aufgabe, ihre Centraflächen zu ermitteln. Solche Flächen giebt es, denn für die Krümmungslinien gilt, auch wenn sie in eine Schar zusammenfallen, der Satz, dass benachbarte Normalen, wenn man auf den Krümmungslinien fortwandert, einander schneiden.[1]) Durch das Schneiden der Normalen wird ein gewissermassen doppelt zählender Hauptkrümmungsradius R definirt, der mit dem Krümmungsmasse K durch die Gleichung

$$K = \frac{1}{R^2}$$

verbunden ist[2]); dass R ein Extremum der Krümmungsradien der Normalschnitte liefert, geht allerdings verloren.

Für die weiteren Rechnungen erweist es sich als vortheilhaft, die Darstellung (3) etwas umzugestalten, nämlich

$$\varphi(u) = \frac{\omega'(u)}{u-\omega}\cdot\psi(u)$$

zu setzen, woraus sich ergiebt:

$$(3') \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int \frac{1-u^2}{u-\omega}\psi(u)\omega'(u)du + \frac{1}{2}(1-\omega^2)\cdot v \\ y = \frac{i}{2}\int \frac{1+u^2}{u-\omega}\psi(u)\omega'(u)du + \frac{i}{2}(1+\omega^2)\cdot v \\ z = \int \frac{u}{u-\omega}\psi(u)\omega'(u)du + \omega\cdot v. \end{cases}$$

Werden die Richtungscosinus der Flächennormale im Punkte (u, v) mit X, Y, Z bezeichnet, so gehört zu ihm der Krümmungsmittelpunkt:

$$x_1 = x - XR, \qquad y_1 = y - YR, \qquad z_1 = z - ZR.$$

1) Vgl. etwa SCHEFFERS a. a. O. S. 165.

2) *Beiträge zur Flächentheorie* I. S. 480.

Aus den Gleichungen (3′) erhält man:

$$X = \frac{1-u\omega}{u-\omega} + \frac{1-\omega^2}{u-\omega}\cdot\frac{v}{\psi},$$

$$Y = i\frac{1+u\omega}{u-\omega} + i\frac{1+\omega^2}{u-\omega}\cdot\frac{v}{\psi},$$

$$Z = \frac{u+\omega}{u-\omega} + \frac{2\omega}{u-\omega}\cdot\frac{v}{\psi}.$$

Ferner ergiebt sich

$$K = \frac{4}{(u-\omega)^2\psi^2}, \tag{4′}$$

also

$$R = \tfrac{1}{2}(u-\omega)\psi, \tag{5}$$

und man findet daher:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\int\frac{1-u^2}{u-\omega}\psi(u)\omega'du - \frac{1}{2}(1-u\omega)\psi(u), \\ y_1 = \frac{i}{2}\int\frac{1+u^2}{u-\omega}\psi(u)\omega'du - \frac{i}{2}(1+u\omega)\psi(u), \\ z_1 = \int\frac{u}{u-\omega}\psi(u)\omega'du - \frac{1}{2}(u+\omega)\psi(u). \end{cases} \tag{6}$$

Die Gleichungen (6) zeigen, dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte keine Fläche, sondern eine Curve ist, indem zu allen Punkten einer Flächencurve $u = \text{const}$, d. h. zu allen Punkten einer erzeugenden Minimalgeraden, derselbe Krümmungsmittelpunkt gehört.

Da im reellen Gebiete nur die *Canalflächen* die Eigenschaft haben, dass ein Mantel der Centrafläche in eine Curve ausartet, die zugleich der geometrische Ort der Mittelpunkte der umhüllenden Kugeln ist, so wird man vermuthen, dass auch die betrachteten imaginären Flächen als Enveloppen einer Schaar von Kugeln aufgefasst werden können, deren Mittelpunkte die Curve (5) bilden, eine Vermuthung, die sich sofort als richtig erweisen lässt. Wird nämlich die Gleichung der Kugeln

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R^2 \tag{7}$$

partiell nach u differentirt, indem x, y, z als laufende Coordinaten angesehen werden, so kommt:

$$(x-x_1)x_1' + (y-y_1)y_1' + (z-z_1)z_1' = -RR', \tag{8}$$

und die beiden Gleichungen (7) und (8) sind, wie eine einfache Rechnung zeigt, identisch erfüllt, wenn für x, y, z die Werthe aus

(3′), für x_1, y_1, z_1 die Werthe aus (6), für R der Werth aus (5) eingesetzt werden. Mithin haben die Kugeln (7) die Fläche (3′) zur Enveloppe, deren Charakteristiken die erzeugenden Minimalgeraden sind. Freilich bildet die Fläche (3′) nur den einen Mantel der Enveloppe; der andere ergiebt sich, indem in (3′) i in $-i$ verwandelt wird.

Kugeln haben mit einer Ebene im Allgemeinen einen reellen oder imaginären Kreis gemeinsam. Nur die Tangentialebenen bilden eine Ausnahme; bei ihnen zerfällt der Schnittkreis in zwei durch den Berührungspunkt gehende Minimalgeraden. Im vorliegenden Falle haben die Ebenen (8) mit den Kugeln (7) je zwei Minimalgeraden gemeinsam, folglich sind sie Tangentialebenen der Kugeln, und es ist der Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Kugeln gleich dem Unterschiede ihrer Radien.

Diese geometrischen Ueberlegungen werden durch die Rechnung bestätigt. Bildet man nämlich vermöge (6) den Ausdruck

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$

so erhält man dafür den Werth

$$dR^2,$$

d. h. das Bogenelement ds_1 der Curve der Krümmungsmittelpunkte oder kürzer der *Centracurve* ist gleich dem Unterschiede dR der Radien der Kugeln, die um seine Endpunkte als Mittelpunkte beschrieben werden. Da nun die Berührungspunkte der umhüllenden Kugeln auf den Tangenten der Centracurve im Abstande R von dem Mittelpunkte der Kugel liegen, so folgt aus der Gleichung

$$ds_1 = dR,$$

dass der geometrische Ort der Berührungspunkte der umhüllenden Kugeln eine *Evolvente* (Filarevolvente) der Centracurve ist; sie wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$(9)\quad x_2 = x_1 - \frac{R}{R'}x_1', \qquad y_2 = y_1 - \frac{R}{R'}y_1', \qquad z_2 = z_1 - \frac{R}{R'}z_1'.$$

4. Indem die Gleichungen (6) zwei willkürliche Functionen $\psi(u)$ und $\omega(u)$ enthalten, sind sie fähig, eine jede gegebene Raumcurve (x_1, y_1, z_1) darzustellen. Hieraus ergiebt sich folgende Erzeugungsweise der Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen. Man nehme irgend eine Raumcurve (x_1, y_1, z_1) und construire eine ihrer Evolventen (x_2, y_2, z_2). Um

jeden Punkt der Raumcurve als Mittelpunkt beschreibe man eine Kugel, die durch den zugehörigen Punkt der Evolvente geht. Die Enveloppe dieser Kugelschaar besteht alsdann aus zwei Mänteln, die beide eine Schar von Minimalgeraden enthalten und daher die gesuchten Flächen sind.

Die Durchführung der entsprechenden Rechnungen ist mühelos. Es sei

$$x_1 = \varkappa(\alpha), \quad y_1 = \lambda(\alpha), \quad z_1 = \mu(\alpha)$$

die Darstellung der gegebenen Raumcurve. Man bilde

$$R = \int \sqrt{\varkappa'^2(\alpha) + \lambda'^2(\alpha) + \mu'^2(\alpha)}\, d\alpha$$

und setze:

$$(10) \quad \begin{cases} x = x_1 - \dfrac{R}{R'} x_1' + \xi\beta, \qquad y = y_1 - \dfrac{R}{R'} y_1' + \eta\beta, \\ z = z_1 - \dfrac{R}{R'} z_1' + \zeta\beta, \end{cases}$$

wo β eine neue Variable bedeutet. Damit die Gleichungen (7) und (8) erfüllt sind, müssen die Hilfsgrössen ξ, η, ζ den Gleichungen genügen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$
$$x_1'\xi + y_1'\eta + z_1'\zeta = 0,$$

die durch

$$\xi = -x_1' y_1' + i z_1' R, \quad \eta = x_1'^2 + z_1'^2, \quad \zeta = -y_1' z_1' - i x_1' R$$

erfüllt werden. Werden diese Werthe in die Gleichungen (10) eingesetzt, so erhält man die Darstellung einer Fläche, die, wegen $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$, aus Minimalgeraden besteht und als Enveloppe der Kugelschaar (7) aufgefasst werden kann, sodass die vorher abgeleiteten Eigenschaften der Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen, durch die Darstellung (10) in Evidenz gesetzt werden.

Die Quadratur für R fällt weg, wenn als Parameter α die Bogenlänge der Centracurve gewählt wird; in diesem Falle findet man die einfachen Formeln:

$$(10') \quad \begin{cases} x = \varkappa - \alpha\varkappa' + (-\varkappa'\lambda' + i\alpha\mu')\cdot\beta, \\ y = \lambda - \alpha\lambda' + (\varkappa'^2 + \mu'^2)\cdot\beta, \qquad (\varkappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 = 1) \\ z = \mu - \alpha\mu' + (-\lambda'\mu' - i\alpha\varkappa')\cdot\beta. \end{cases}$$

Den Vorzügen der Darstellungen (10) und (10′) steht ein Nachtheil gegenüber: *sie versagen, wenn die Centracurve eine*

Minimalcurve ist, da alsdann $R' = 0$, also α eine Constante wird oder, anders ausgedrückt, da Minimalcurven keine Evolventen besitzen. Der Fall, dass die Curve (x_1, y_1, z_1) eine Minimalcurve ist, bedarf deshalb einer besonderen Untersuchung.

5. Geht man von den Gleichungen (3′) aus, so erhält man als geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte stets die Curve (6) und kann daher unter allen Umständen die betrachtete Fläche, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzt, als Enveloppe der Kugelschar:

$$(7) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$

auffassen. Ereignet es sich, dass die Identität

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = R'^2$$

dadurch erfüllt ist, dass gleichzeitig

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = 0, \quad R' = 0$$

wird, so ist die Centracurve eine Minimalcurve. Der Hauptkrümmungsradius R hat alsdann für alle Punkte der Fläche dieselbe Länge, diese ist also eine Fläche constanten Krümmungsmasses $K = 1 : R^2$. Ist umgekehrt K constant, so ist die Centracurve eine Minimalcurve.

Da nach Gleichung (5):

$$R = \tfrac{1}{2}(u - \omega)\psi$$

war, so wird der Ausnahmefall, um den es sich handelt, dann und nur dann eintreten, wenn

$$\psi(u) = \frac{2}{\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{u - \omega}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt die Darstellung der imaginären geradlinigen Flächen constanten Krümmungsmasses K, die Herr SCHEFFERS[1]) gegeben hat:

$$(3^*) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{K}} \displaystyle\int \frac{1 - u^2}{(u - \omega)^2} \omega' du + \tfrac{1}{2}(1 - \omega^2) \cdot v, \\ y = \dfrac{i}{\sqrt{K}} \displaystyle\int \frac{1 + u^2}{(u - \omega)^2} \omega' du + \frac{i}{2}(1 + \omega^2) \cdot v, \\ z = \dfrac{2}{\sqrt{K}} \displaystyle\int \frac{u}{(u - \omega)^2} \omega' du + \omega \cdot v. \end{cases}$$

1) A. a. O. S. 229.

Um eine Darstellung dieser Flächen zu erhalten, durch welche ihre Eigenschaften in Evidenz gesetzt werden, wird man wieder von der Centracurve (x_1, y_1, z_1) ausgehen und zwar dafür eine beliebige Minimalcurve nehmen:

$$(1^*)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\int(1-\alpha^2)\chi(\alpha)d\alpha, \quad y_1 = \frac{i}{2}\int(1+\alpha^2)\chi(\alpha)d\alpha, \\ z_1 = \int\alpha\chi(\alpha)d\alpha. \end{cases}$$

Die zugehörige Fläche ist die Enveloppe der Kugelschar:

$$(7^*)\qquad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{1}{K},$$

sodass ihre Coordinaten x, y, z ausserdem noch der Gleichung:

$$(8^*)\qquad (x-x_1)x_1'+(y-y_1)y_1'+(z-z_1)z_1'=0$$

genügen müssen. Die Gleichung (7^*) wird nun in allgemeinster Weise erfüllt durch:

$$x-x_1=\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1-st}{s-t},\quad y-y_1=\frac{i}{\sqrt{K}}\frac{1+st}{s-t},\quad z-z_1=\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{s+t}{s-t};$$

dabei werden durch die Gleichungen $s = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$ die auf der Kugel vom Radius $1:\sqrt{K}$ liegenden Minimalgeraden dargestellt.[1]) Werden diese Werthe in (8^*) eingesetzt, so kommt

$$(\alpha-s)(\alpha-t)=0.$$

Wählt man etwa $s=\alpha$, so bleibt t willkürlich, und wenn dafür der Gleichmässigkeit halber β geschrieben wird, so folgt für die gesuchten Flächen die Darstellung:

$$(10'')\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int(1-\alpha^2)\chi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \\ y = \frac{i}{2}\int(1+\alpha^2)\chi(\alpha)d\alpha+\frac{i}{\sqrt{K}}\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \\ z = \int\alpha\chi(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \end{cases}$$

Um die darin auftretenden Quadraturen zu beseitigen, hat man bloss

$$\chi(\alpha)=f'''(\alpha)$$

1) Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, t. I. Paris 1887. S. 22.

zu setzen[1]) und erhält:

$$(10^*)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)f''(\alpha) + \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \\ y = \frac{i}{2}(1+\alpha^2)f''(\alpha) - i\alpha f'(\alpha) + if(\alpha) + \frac{i}{\sqrt{K}}\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \\ z = \alpha f''(\alpha) - f'(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \end{cases}$$

Die neue Darstellung lässt sofort erkennen, dass die Fläche constantes Krümmungsmass besitzt, denn bildet man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

so wird, am einfachsten aus den Gleichungen (10″), sofort erhalten:

$$ds^2 = \frac{1}{K}d\sigma^2,$$

wo $d\sigma$ das Linienelement der durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad \eta = \frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad \zeta = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

dargestellten Kugel vom Radius 1 bedeutet. Da ferner

$$d\sigma^2 = 4\frac{d\alpha d\beta}{(\alpha-\beta)^2}$$

ist[2]), so ergeben die Gleichungen $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ die Minimalcurven der Fläche. Dass die Linien $\alpha = \text{const.}$ Minimalgeraden sind, ist aus den Gleichungen (10*) unmittelbar ersichtlich. Ebenso zeigen diese Gleichungen sofort, dass die Fläche Enveloppe der Kugeln (7*) ist, deren Mittelpunkt auf der Minimalcurve x_1, y_1, z_1 liegen.

Ein weiterer Vortheil der neuen Darstellung (10*) ist, dass sie für

$$f(\alpha) = 0$$

die Kugeln vom (reellen oder imaginären) Radius $1:\sqrt{K}$ liefert, die in den Gleichungen (3*) nicht enthalten waren, da die Minimalgeraden sich der Darstellung durch die Gleichungen (1*) entziehen.[3]) Für $f(\alpha) = 0$ reducirt sich die Minimalcurve (x_1, y_1, z_1)

1) Ebendaselbst S. 289.

2) Ebendaselbst S. 30.

3) Vergl. SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Curven.* Leipzig 1901. S. 342.

auf einen Punkt; es ist klar, dass der Punkt als ausgeartete Minimalcurve angesehen werden darf. Dieser Punkt ersetzt die Curve der Krümmungsmittelpunkte, die vorher eine Minimalcurve erfüllten, also von einander, wie bei der Kugel, den Abstand Null hatten.[1])

Endlich werden durch die neue Darstellung (10*) sofort alle *algebraischen Flächen* der betrachteten Art gegeben, sie entstehen nämlich, indem für $f(\alpha)$ eine algebraische Function von α substituirt wird. *Dass es ausser der Kugel noch andere algebraische Flächen constanten Krümmungsmasses giebt, scheint bis jetzt noch nicht bemerkt worden zu sein.*

6. Die Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchungen lassen sich zusammenfassen in folgenden

Lehrsatz. Die Flächen, die nur eine Schaar von Krümmungslinien besitzen, sind geradlinige Flächen. Die erzeugenden Geraden sind Minimalgeraden, die zugleich die Bedeutung von Krümmungslinien und Curven constanten Krümmungsmasses haben. Der geometrische Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte ist eine Curve, die Centracurve, und die Flächen lassen sich auffassen als Enveloppen einer Schar sich berührender Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Centracurve liegen. Ist die Centracurve keine Minimalcurve, so ist der Ort der Berührungspunkte der Kugeln eine Evolvente der Centracurve. Ist sie aber eine Minimalcurve, so haben die Kugeln alle denselben Radius und die Fläche besitzt constantes Krümmungsmass K. Wenn man umgekehrt von einer beliebig angenommenen Curve als Centracurve ausgeht, so ergiebt sich im ersten Fall für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z die Darstellung:

$$x = \varkappa - \alpha\varkappa' + (-\varkappa'\lambda' + i\alpha\mu')\beta,$$
$$y = \lambda - \alpha\lambda' + (\varkappa'^2 + \mu'^2)\beta,$$
$$z = \mu - \alpha\mu' + (-\lambda'\mu' - i\alpha\varkappa')\beta,$$

wo die Functionen $\varkappa$, λ, μ von α nur der Bedingung

$$\varkappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 = 1$$

1) In der Darstellung (10′) sind die Kugeln nicht enthalten, da $\varkappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 = 1$ sein muss.

zu genügen haben und α die Bogenlänge der Centracurve bedeutet. In dem zweiten Falle aber erhält man:

$$x = \tfrac{1}{2}(1-\alpha^2)f''(\alpha) + \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}$$

$$y = \frac{i}{2}(1+\alpha^2)f''(\alpha) - i\alpha f'(\alpha) + if(\alpha) + \frac{i}{\sqrt{K}}\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},$$

$$z = \alpha f''(\alpha) - f'(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Unter den imaginären geradlinigen Flächen constanten Krümmungsmasses giebt es daher, indem $f(\alpha)$ gleich irgend einer algebraischen Function von α gesetzt wird, unendlich viele algebraische Flächen.

7. *Historische Bemerkungen.* Wie ich nachträglich erkannt habe, werden die Flächen, die aus Minimalgeraden bestehen, bereits in den *Leçons* von Herrn DARBOUX mehrfach erwähnt, ohne dass jedoch ihre Beziehung zur Theorie der Krümmungslinien aufgedeckt würde. Bei der Untersuchung der geradlinigen Flächen:

$$x = a_1 u + b_1, \quad y = a_2 u + b_2, \quad z = a_3 u + b_3$$

(Bd. I. Paris 1887. S. 84) wird vorausgesetzt, dass

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

sei, jedoch in einer Anmerkung gesagt: „Diese Theorie lässt die geradlinigen imaginären Flächen bei Seite, bei denen

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$$

ist und die durch Geraden erzeugt werden, die den unendlich fernen imaginären Kugelkreis treffen." Derselbe Ausnahmefall tritt auf bei der Discussion der Biegung geradliniger Flächen (Bd. III. Paris 1894. S. 294). Er wird auch hier bei Seite gelassen, jedoch wird beiläufig bemerkt (S. 295), dass diese Flächen weder eine Strictionslinie noch einen Centralpunkt auf jeder erzeugenden Geraden besitzen, und am Schluss der Discussion bemerkt (S. 316), dass es unendlich viele windschiefe Flächen constanter Krümmungsmasse gebe, die aus der Biegung der Kugel hervorgehen, wenn man diese als geradlinige Fläche ansieht; auf diese habe J. A. SERRET hingewiesen in einem Artikel, der 1848 in LIOUVILLES *Journal* erschienen sei.

In der *Note sur une équation aux dérivées particlles* (J. de math. (1) 13 [1848]. S. 361—368), beweist Serret, dass die Gleichung der Flächen constanten Krümmungsmasses:

$$a^2(rt - s^2) = -(1 + p^2 + q^2)^2$$

erfüllt wird, wenn

$$y = \lambda x + ia\sqrt{1 + \lambda^2} - i(1 + \lambda^2)^{1/2} f'(\lambda)$$

$$z = i\sqrt{1 + \lambda^2}\, x - a\lambda + \lambda(1 + \lambda^2) f'(\lambda) - f(\lambda)$$

gesetzt wird. Die durch diese Gleichung dargestellten imaginären Flächen sind, wie er bemerkt, geradlinig. Sie haben ferner die merkwürdige Eigenschaft, dass die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 einander gleich sind. Deshalb, sagt Serret zum Schluss, seien diese Flächen eigentlich als bekannt anzusehen, denn schon Monge habe die Gleichung $R_1 = R_2$ vollständig integrirt.

Monge hat die Gleichung $R_1 = R_2$ schon 1784 betrachtet und sie auf die Form:

$$4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 = 0$$

gebracht (*Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles,* Mém. Paris 1784 [1787]. S. 145). Ausführlich mit ihr beschäftigt hat er sich in seinem 1795 erschienenen Hauptwerke *Application de l'analyse à la géometrie* (5. Ausgabe, Paris 1850. S. 196—211). Nachdem er die Gleichung in p, q, r, s, t noch einmal hergeleitet hat, zeigt er zunächst, dass die Flächen, die ihr genügen, entweder in jedem Punkte nur eine Krümmungslinie besitzen oder, wenn das nicht eintreten soll, Kugeln sein müssen, und dass umgekehrt die Flächen, die nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen, der Gleichung $R_1 = R_2$ genügen. Darauf wendet er sich zur Integration dieser Gleichung und gewinnt ein System von Formeln, für das er folgende geometrische Auslegung angiebt (a. a. O. S. 208—209):

„Man denke sich, eine Kugel von veränderlicher Grösse werde so bewegt, dass ihr Mittelpunkt eine willkürliche Curve durchlaufe, deren Gleichungen:

$$x = \Phi(z), \quad y = \Psi(z)$$

sind; der Halbmesser der Kugel sei gleich dem entsprechenden Radius der Evolvente dieser Curve. Die Kugel durchläuft dann

einen Raum, dessen Enveloppe die Eigenschaft haben muss, dass in allen ihren Punkten die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich sind. Denn sowohl in der Richtung der Charakteristik der Fläche, d. h. des Schnittes der Flächen auf einander folgender Kugeln, als auch in der senkrechten Richtung muss der Krümmungsradius gleich dem der entsprechenden Kugel sein. Liegt der Mittelpunkt der beweglichen Fläche in einem Punkte, für den $z = \alpha$ ist, so lautet ihre Gleichung:

$$(x - \Phi(\alpha))^2 + (y - \Psi(\alpha))^2 + (z - \alpha)^2 = \left[\int d\alpha \sqrt{1 + \Phi'^2(\alpha) + \Psi'^2(\alpha)}\right]^2,$$

und das ist die erste der Integralgleichungen, die wir gefunden haben. Die Gleichung der Enveloppe wird also das Ergebnis der Elimination von α sein zwischen dieser Gleichung und der folgenden:

$$(x - \Phi(\alpha))\Phi'(\alpha) + (y - \Psi(\alpha))^2\Psi'(\alpha) + z - \alpha = -\left[\int d\alpha \sqrt{1 + \Phi'^2(\alpha) + \Psi'^2(\alpha)}\right]\sqrt{1 + \Phi'^2(\alpha) + \Psi'^2(\alpha)},$$

diese ist die Ableitung, die gewonnen wurde, indem α allein als veränderlich galt. Allein in dem vorliegenden Falle, wo der Unterschied zwischen den Radien der auf einander folgenden Kugeln gleich dem Abstande ihrer Mittelpunkt ist, schneiden sich die beiden Kugeln nicht in dem Umfange eines Kreises, sondern berühren sich in einem Punkte, der auf ihrem gemeinsamen Durchmesser liegt, d. h. auf dem Durchmesser, der die willkürliche Curve berührt. Mithin besteht die Charakteristik der Enveloppe allein aus einem Punkte, nämlich dem entsprechenden Punkte der Evolvente, und die Enveloppe besteht allein aus der Curve, die dieser Punkt durchläuft, d. h. aus der Evolvente."

Es folgen noch einige Erläuterungen, die mitzuteilen nicht erforderlich scheint, da die vorhergehenden Ausführungen genügen, um die Ergebnisse, zu denen MONGE gelangt war, deutlich erkennen zu lassen.

Druckfertig erklärt 9. VI. 1902.]

Lineare Construction einer Raumcurve dritter Ordnung aus drei Paaren conjugirt imaginärer Puncte.

Von

J. Thomae.

Sollen drei Paare conjugirt imaginärer Puncte in einem Kegelschnitt liegen, so müssen dieselben eine gewisse Bedingung befriedigen. Im einfachsten Falle, in dem die drei reellen die gegebenen Puncte enthaltenden Geraden sich in einem Puncte schneiden, müssen die drei Puncte, die dem Schnittpuncte derselben in den drei die imaginären Puncte bestimmenden Involutionen conjugirt sind, auf einer Geraden liegen. Aber auch dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist man nicht im Stande, Puncte des Kegelschnittes auf linearem Wege zu construiren.

Anders verhält es sich mit der Raumcurve dritter Ordnung $R^{(3)}$, von der unendlich viele Puncte linear construirt werden können, wenn man weiss, dass sie durch die Doppelpuncte dreier Involutionen geht, die auf drei sich nicht schneidenden Geraden $g_1 g_2 g_3$ gegeben sind, auch wenn diese Involutionen alle drei elliptisch sind. Die schöne Construction einer Raumcurve $R^{(3)}$, die von Herrn C. Hossfeld im 33. Jahrgange der Schlömilch-schen Zeitschrift gegeben ist, in der entweder alle sechs Puncte reell sind, in welchem Falle die Construction linear ist, oder alle sechs Puncte paarweise conjugirt imaginär sind, ist im letzteren Falle nicht linear. Deshalb dürfte eine lineare Ausführung nicht ohne Interesse sein.

Zunächst will ich für den besonders einfachen Fall, dass die Curve $R^{(3)}$ in dem Hyperboloid $(g_1 g_2 g_3)$ liegt, das durch diese Geraden geht und durch sie bestimmt ist, die Construction geben. Auf den Beweis derselben kann wegen seiner Einfachheit Verzicht

geleistet werden. — Man lege durch $g_1 g_2 g_3$ eine Gerade h, die $g_1 g_2 g_3$ bez. in den Puncten A_1', A_2', A_3' trifft, denen $A_1 A_2 A_3$ bez. in den auf $g_1 g_2 g_3$ gegebenen Involutionen conjugirt sind. Alsdann trifft h die Ebene $A_1 A_2 A_3$ in dem Puncte R, der der Curve $R^{(3)}$ angehört. Die Gerade h ist der Ebene $A_1 A_2 A_3$ in Bezug auf den Kegel zweiter Ordnung polar, der von R aus die sechs gegebenen Puncte projicirt.

Die Annahme, dass $R^{(3)}$ auf dem Hyperboloid $(g_1 g_2 g_3)$ liege, trifft natürlich im Allgemeinen *nicht,* sondern nur dann zu, wenn die zur Schaar $g_1 g_2 g_3$ gehörende Gerade g des Hyperboloids, die durch den gefundenen Punct R geht, eine Erzeugende des Kegels zweiter Ordnung ist, der die sechs gegebenen Puncte von demselben Puncte R aus projicirt. Im allgemeinen Falle muss deshalb nach anderen Auskunftsmitteln geforscht werden.

Wir suchen den Punct R, den eine durch g_1 gelegte Ebene E noch mit $R^{(3)}$ gemeinsam hat. Die beiden anderen sind eben auf g_1 gegeben.

Die gegebenen Punctpaare auf $g_1 g_2 g_3$ sollen bez. durch P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}; P_{31}, P_{32} und die zugehörigen Involutionen durch $(g_1)(g_2)(g_3)$ gekennzeichnet werden. Die Ebene E werde zur xz-Ebene eines gewöhnlichen Cartesianischen Coordinatensystems gemacht, in dem einem Puncte $P_{\mu\nu}$ die Coordinaten $x_{\mu\nu} y_{\mu\nu} z_{\mu\nu}$ zukommen, und g_1 sei die z-Axe des Systems. Alsdann ist

$$\begin{vmatrix} x^2, & xy, & y^2, & x(z-z'), & y(z-z') \\ x_{21}^2, & x_{21}y_{21}, & y_{21}^2, & x_{21}(z_{21}-z'), & y_{21}(z_{21}-z') \\ x_{22}^2, & x_{22}y_{22}, & y_{22}^2, & x_{22}(z_{22}-z'), & y_{22}(z_{22}-z') \\ x_{31}^2, & x_{31}y_{31}, & y_{31}^2, & x_{31}(z_{31}-z'), & y_{31}(z_{31}-z') \\ x_{32}^2, & x_{32}y_{32}, & y_{32}^2, & x_{32}(z_{32}-z'), & y_{32}(z_{32}-z') \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kegels, der seine Spitze im Puncte z' der z-Achse hat, und der die Puncte P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}; P_{31}, P_{32} projicirt und daher g_1 als Erzeugende enthält.

Um den Schnitt der Ebene E mit diesem Kegel zu finden, oder vielmehr den Theil des Schnittes, der von g_1 verschieden ist, muss man $y = 0$ setzen, und dann den Factor x, dessen Verschwinden eben g_1 bedeutet, unterdrücken. Alsdann erhält man als Gleichung der Geraden h', die E (neben g_1) noch aus dem Kegel (z') schneidet in der xz-Ebene die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_{21}y_{21}, & y_{21}^2, & x_{21}(z_{21}-z'), & y_{21}(z_{21}-z') \\ x_{22}y_{22}, & y_{22}^2, & x_{22}(z_{22}-z'), & y_{22}(z_{22}-z') \\ x_{31}y_{31}, & y_{31}^2, & x_{31}(z_{31}-z'), & y_{31}(z_{31}-z') \\ x_{32}y_{32}, & g_{32}^2, & x_{32}(z_{32}-z'), & y_{32}(z_{32}-z') \end{vmatrix} x$$

$$+ \begin{vmatrix} x_{21}^2, & x_{21}y_{21}, & y_{21}^2, & y_{21}(z_{21}-z') \\ x_{22}^2, & x_{22}y_{22}, & y_{22}^2, & y_{22}(z_{22}-z') \\ x_{31}^2, & x_{31}y_{31}, & y_{31}^2, & y_{31}(z_{31}-z') \\ x_{32}^2, & x_{32}y_{32}, & y_{32}^2, & y_{32}(z_{32}-z') \end{vmatrix} (z'-z) = 0.$$

Hieraus folgt der Satz:

Legt man durch eine Punctreihe z' der Geraden g_1 als Spitzen Kegel (z') die $P_{21}P_{22}P_{31}P_{32}$ projiciren und g_1 als Erzeugende enthalten, so liegen die Geraden h', die eine durch g_1 gehende Ebene E aus diesen Kegeln schneidet, in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der den Puncten z' projectiv zugeordnet ist.

Da man den Coefficienten von $z - z'$ durch passende Wahl von z' zum Verschwinden bringen kann, so gehört die Gerade g_1 $(x = 0)$ zum Büschel zweiter Ordnung.

Vom projectiven Standpunkte diesen Satz zu erweisen, ist wenigstens dann nicht schwer, wenn ein Paar, etwa P_{31}, P_{32} reale Puncte sind. — Alsdann lege man durch g_2 und P_{31} eine Ebene J, die g_1 im Puncte Q_1 trifft und mit E die Gerade i bestimmt. Dann erzeugen die Kegel (z') in der Ebene J einen Kegelschnittbüschel $(Q_1P_{21}P_{22}P_{31})$ und die Geraden $(P_{32}z')$ beschreiben in J eine Gerade, die durch Q_1 hindurchgeht, und deren Treffpuncte Q' in J je einen Kegelschnitt des Büschels $(Q_1P_{21}P_{22}P_{31})$ bestimmen, und also diesen Kegelschnitten projectiv zugeordnet sind. Ebenso sind die Puncte z' diesen Kegelschnitten projectiv zugeordnet. Die Geraden h' treffen die Ebene J in Puncten S' der Geraden i, die auch durch den Grundpunct Q_1 des Kegelschnittbüschels $(Q_1P_{21}P_{22}P_{31})$ geht, sodass die Punkte S' den Puncten Q', diese den Puncten z' projectiv zugeordnet sind. Also bestimmen die Geraden h' auf g_1 und i projective Punctreihen, sie liegen in einem Büschel zweiter Ordnung, zu dem die Gerade g_1 gehört, und dessen Strahlen den Puncten z' projectiv (perspectiv) zugeordnet sind.

Nun seien $z_1'z_1''$ ein Paar einer Involution auf g_1, zu der $P_{11}P_{12}$ als Paar gehören. Es ist ein lineares Verfahren, das zu

beliebig vielen Paaren der Involution führt, in der zwei Punctepaare Paare sind, gleichviel ob diese gegebenen Paare reelle sind oder ob ein Paar ein conjugirt imaginäres ist, und da bei gegebenem z_λ' der Punkt z_λ'' noch willkürlich ist, so giebt es einfach unendlich viele solcher Involutionen.

Die zu $z_\lambda' z_\lambda''$ gehörenden Geraden $h_\lambda' h_\lambda''$ durchlaufen, wenn z_λ', z_λ'' auf verschiedene Paare derselben Involution fallen, nicht nur denselben Strahlenbüschel zweiter Ordnung, sondern sind einander auch projectiv involutorisch zugeordnet und schneiden sich deshalb auf einer Geraden h_λ, die linear gefunden wird. Da man $z_\lambda' z_\lambda''$ als Paar auf das Paar $P_{11} P_{12}$ fallen lassen kann, um zwei (imaginäre) Kegel zu erhalten, die $R^{(3)}$ erzeugen, so liegt der Schnittpunct der beiden Erzeugenden, die E aus den Kegeln $(P_{11})(P_{12})$ schneidet, auf der Geraden h_λ; es ist der Punct R, den E auf der Curve $R^{(3)}$ bestimmt.

Legt man statt der Involution $P_{11} P_{12} \cdot z_\lambda' z_\lambda'' \ldots$ eine andere, $P_{11}, P_{12} \cdot z_\mu', z_\mu'' \ldots$ diesen Betrachtungen zu Grunde, so erhält man wieder auf linearem Wege eine andere Gerade h_μ, auf der der Punct R ebenfalls liegen muss. Der gesuchte Punct R wird also als Schnittpunct zweier Geraden $h_\lambda h_\mu$ und somit linear gefunden, womit die Aufgabe gelöst ist.

Hat man auf diese Weise einen Punct R, wir wollen ihn mit P_{41} bezeichnen, gefunden, so kann die weitere Construction auf die im Eingange erwähnte, einen speciellen Fall betreffende zurückgeführt werden.

Durch $P_{41} g_1 g_2 P_{31} P_{32}$ ist ein Hyperboloid H_3 bestimmt, durch $P_{41} g_1 P_{21} P_{22} g_3$ ein anderes H_2. Die durch P_{41} gehende Gerade g_4, die zur Schaar g_1, g_2 in H_3 gehört, trifft H_2 im Puncte P_{42} der Curve $R^{(3)}$. Ist dieser Punct gezeichnet, so liegen die sechs Puncte $P_{41} P_{42} P_{11} P_{12} P_{21} P_{22}$ auf drei Erzeugenden $g_4 g_1 g_2$ des Hyperboloides H_3 das $R^{(3)}$ ganz enthält, und man kann nun auf jeder Geraden h, die $g_1 g_2 g_4$ trifft, nach der am Eingange gegebenen Methode den Punct R finden, den sie mit $R^{(3)}$ gemein hat.

Druckfertig erklärt 4. VII. 1902.]

Projectiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung.

Von

J. Thomae.

In meiner Abhandlung über zwei-zweideutige Verwandtschaften (Band XXI der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften) habe ich mich mehrere Male auf die Theorie der Curven dritter Ordnung unter der Voraussetzung bezogen, dass die betreffenden Sätze projectiv erwiesen seien, und habe dabei auf H. Schröters „Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung" verwiesen. Es ist mir aber indessen zweifelhaft geworden, ob diese Voraussetzung allemal zutrifft. So wird z. B. im § 9 des Schröterschen Buches des Satz, dass die Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ durch einen Kegelschnittbüschel, der seine vier Grundpuncte in beliebigen Puncten der Curve hat und durch einen gewissen dem Kegelschnittbüschel projectiven Strahlenbüschel erzeugt werden könne, auf das Theorem gestützt, dass zwei Curven dritter Ordnung zusammenfallen, wenn sie mehr als neun Puncte gemein haben. Andererseits scheint mir aber dieses Theorem nur mit Kenntniss des ersten beweisbar zu sein. Aus diesem Grunde will ich im § 1 des Folgenden einen projectiven Beweis des ausgesprochenen Satzes geben.

§ 1. Legt man durch vier Puncte $ABCD$ einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ einen Kegelschnittbüschel, so treffen die Individuen desselben die Curve $C^{(3)}$ in Punctpaaren, deren Verbindungslinien einen linearen Strahlenbüschel bilden. Der Träger G dieses Strahlenbüschels liegt auf $C^{(3)}$, und er ist dem Kegelschnittbüschel projectiv zugeordnet.

Voraussetzung ist, dass die Curve $C^{(3)}$ durch einen Kegelschnittbüschel und einen ihm projectiven Strahlenbüschel erzeugt

sei. Zu beweisen ist, dass man die Grundpuncte des Kegelschnittbüschels auf $C^{(3)}$ beliebig verändern kann, wozu es ausreicht nachzuweisen, dass man einen der Grundpuncte beliebig abändern könne. Dabei ändert auch der Gegenpunct G auf $C^{(3)}$ seine Lage.

Eine Curve vierter Ordnung $C^{(4)}$ mit den beiden Doppelpuncten X, Y werde durch zwei projective Kegelschnittbüschel mit den Grundpuncten $XYUV$, $XYU'V'$ erzeugt. Wir bilden die Kegelschnittbüschel und ihr Erzeugniss nach einer von mir in meiner Abhandlung über zwei-zweideutige Verwandtschaften näher erörterten Methode auf räumliche Gebilde ab. In der Ebene $\mathfrak{z}$ der Curve $C^{(4)}$ nehmen wir einen Punkt S an und ziehen die Geraden $XS \equiv x_s$, $YS \equiv y_s$. Eine andere Ebene $\mathfrak{n}$ gehe durch XY, und einen Punkt N in ihr verbinden wir mit XY durch die Geraden x_n, y_n. Endlich legen wir durch $x_s y_s$, $x_n y_n$ ein Hyperboloid Φ und projiciren die Puncte der Ebene $\mathfrak{z}$ von N aus (stereographisch) auf Φ. Einem Kegelschnitte durch X, Y entspricht dann ein Kegelschnitt auf Φ und somit eine Ebene im Raume, nämlich die Ebene, die durch diesen Kegelschnitt bestimmt ist. Dem Kegelschnittbüschel $(XYUV)$ entspricht ein Ebenenbüschel im Raume, dessen Axe durch die beiden Puncte $U_\varphi V_\varphi$ auf Φ geht, die Bildpuncte von UV sind, und die Ebenen des Büschels sind den Kegelschnitten der Ebene $\mathfrak{z}$ durch $XYUV$ projectiv zugeordnet. Gleiches gilt von dem Büschel $XYU'V'$, der auf ein Ebenenbüschel durch $U'_\varphi V'_\varphi$, die Bildpuncte von $U'V'$ auf Φ, projectiv abgebildet wird. Die projectiven Ebenenbüschel $(U_\varphi, V_\varphi) \barwedge (U'_\varphi, V'_\varphi)$ erzeugen ein Hyperboloid Ψ, dessen Schnitt mit Φ eine Raumcurve $R^{(4)}$ ist, die das stereographische Bild von $C^{(4)}$ ist.

Die Raumcurve $R^{(4)}$ lässt sich nun aber auf unendlich viele andere Arten als Schnitt eines Hyperboloides mit Φ erzeugen. — Es sei W'_φ ein beliebiger Punkt von $R^{(4)}$, so giebt es in dem Flächenbüschel (Φ, Ψ) eine Fläche Ψ', die durch einen Punct auf der geraden Verbindung von $U'_\varphi W'_\varphi$ liegt, also die Gerade $U'_\varphi W'_\varphi$ enthält, und demnach ein Hyperboloid ist. Durch U_φ geht eine Gerade von Ψ', die mit der Geraden $U'_\varphi W'_\varphi$ zur selben Schaar gehört und die $R^{(4)}$ in einem Puncte W_φ trifft, dessen Construction zu geben hier nicht nöthig ist. Die Fläche Ψ' wird nun durch zwei einander projective Ebenenbüschel $(U_\varphi W_\varphi)$ und $(U'_\varphi W'_\varphi)$ erzeugt, deren Bilder in der $\mathfrak{z}$-Ebene zwei projective Kegelschnittbüschel $(XYUW)$, $(XYU'W')$ sind,

die wieder die Curve $C^{(4)}$, das Bild von $R^{(4)}$, erzeugen. Sind U', V' conjugirt imaginäre Puncte, so kann man sie nicht einzeln verschieben, sonst aber bietet dieser Fall keine besonderen Schwierigkeiten. — Wir gelangen so zu dem Satze:

Wird eine Curve vierter Ordnung $C^{(4)}$ mit den Doppelpuncten XY durch projective Kegelschnittbüschel erzeugt, deren Grundpuncte $XYUV$, $XYU'V'$ sind, und sind $U_1 U_1' V_1'$ drei beliebige andere Puncte der Curve, so kann man dieselbe Curve durch zwei andere projective Kegelschnittbüschel

$$(XYU_1V_1) \barwedge (XYU_1'V_1')$$

erzeugen, wo der vierte Grundpunct V_1 des ersten Büschels auch auf der Curve liegt. — Es kommt hier nur auf seine Existenz, nicht auf seine Construction an. Dieser Satz ist in meiner Abhandlung über zwei-zweideutige Verwandtschaften enthalten, dort aber mit Hülfe der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung erwiesen, während umgekehrt hier mit ihm ein Satz der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung erwiesen werden soll.

Jetzt bilden wir die Curve $C^{(4)}$ mittels einer MÖBIUS'schen Verwandtschaft, wie sie ebenfalls in meiner Abhandlung über zwei-zweideutige Verwandtschaften näher erörtert ist, ab, wenn die lateralen Grundpuncte der MÖBIUS'schen Verwandtschaft die Puncte XY sind, während U der dritte Grundpunct ist.

Der Kegelschnittbüschel $XYUV$ verwandelt sich dann in einen ihm projectiven Strahlenbüschel mit dem Träger $\overline{V}$, dem Bildpunkte von V in der Verwandtschaft. Der Kegelschnittbüschel $(XYU'V')$ verwandelt sich in einen ihm projectiven Kegelschnittbüschel mit den Grundpuncten $XY\overline{U}'\overline{V}'$, wo $\overline{U}'\overline{V}'$ die Bildpuncte von $U'V'$ sind, und die Curve $C^{(4)}$ bildet sich ab auf eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ plus der Geraden X, Y, die das Bild des Punctes U ist. Mit Unterdrückung dieser Geraden, die eben nur *einem* Puncte entspricht, dürfen wir sagen, dass sich $C^{(4)}C^{(3)}$ ein-eindeutig entsprechen. Dabei ist allerdings noch von den beiden XY doppelt entsprechenden Geraden UX, UY abzusehen. $\overline{V}$ ist auf $C^{(3)}$ der Gegenpunct von $XY\overline{U}'\overline{V}'$.

Nach dem über Curven vierter Ordnung gefundenen Satze können wir $U'V'$ auf $C^{(4)}$ oder $\overline{U}'\overline{V}'$ auf $C^{(3)}$ beliebig abändern, wir erhalten dieselbe Curve $C^{(3)}$, nur der Gegenpunct $\overline{V}$ verändert

dabei seine Lage. Natürlich können ebenso die Puncte XY auf $C^{(3)}$ verschoben werden.

§ 2. *Wird eine Curve dritter Ordnung durch zwei Strahleninvolutionen in halb perspectiver Lage erzeugt, so lässt sie sich auch durch einen Kegelschnittbüschel und einen ihm projectiven Strahlenbüschel erzeugen.* — Dieser Satz wird von SCHRÖTER (pag. 62) auf projectivem Wege erwiesen, wenn man annimmt, dass der Satz des vorigen Paragraphen projectiv erwiesen sei. Er lässt sich aber mit den hier angewandten Principien auch direct bestätigen, und da dabei ein Satz über Involutionen von allgemeinem Interesse ist, so mag dieser Beweis hier noch gegeben werden.

Hat man auf einer Geraden g zwei Involutionen

$$PP'.\,AA'.\,BB'\ldots$$
$$P\mathfrak{P}'.\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.\,\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\ldots$$

die bez. durch das zweite und dritte Paar gegeben gedacht werden, und sind dieselben projectiv auf einander bezogen, etwa projectiv auf die Punctreihe $PCC'\ldots$, so sind die sich selbst entsprechenden Elemente dieser Involutionen dieselben als die der Involutionen

$$PP''.\,AA'.\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\ldots$$
$$P\mathfrak{P}''.\,BB'.\,\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\ldots$$

Beweis. Man lege durch die Puncte XYU und die Paare der Involution $PP'.\,AA'.\,BB'\ldots$ einen Kegelschnittbüschel, dessen vierter Grundpunct V sein mag. Durch die Puncte XYU' und und die Paare der Involution $P\mathfrak{P}'.\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.\,\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\ldots$ lege man einen zweiten Büschel, dessen vierter Grundpunct V' sein mag. Dann sind die Kegelschnittbüschel projectiv auf einander bezogen, und erzeugen eine Curve vierter Ordnung mit XY als Doppelpuncten. Der erste Kegelschnittbüschel mag gegeben werden durch die beiden Kegelschnitte

$$\varkappa_a \equiv (XYUVAA'),\quad \varkappa_b \equiv (XYUVBB'),$$

der zweite durch die Kegelschnitte

$$\varkappa_{\mathfrak{a}} \equiv (XYU'V'\mathfrak{A}\mathfrak{A}'),\quad \varkappa_{\mathfrak{b}} \equiv (XYU'V'\mathfrak{B}\mathfrak{B}').$$

Schneiden sich $\varkappa_a$ und $\varkappa_{\mathfrak{a}}$ in U_1, V_1, $\varkappa_b$ und $\varkappa_{\mathfrak{b}}$ in U_1', V_1', so lassen sich die Kegelschnittbüschel

$$(\varkappa_a, \varkappa_{\mathfrak{a}}) \equiv (XYU_1V_1),\quad (\varkappa_b, \varkappa_{\mathfrak{b}}) \equiv (XYU_1'V_1')$$

so zu einander in projective Beziehung setzen, dass sie dieselbe Curve $C^{(4)}$ erzeugen als $(XYUV)$ und $(XYU'V')$. Dieser Satz wird mit Hülfe derselben Fläche Ψ erwiesen, die im vorigen Paragraphen zur Verwendung kam, und findet sich dieser Beweis in meiner Abhandlung über zwei-zweideutige Verwandtschaften auf Seite 454.

Wie ist hierzu die Projectivität einzurichten? Die Involutionspaare $AA'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ müssen den Involutionspaaren $BB'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ entsprechen und da P ein Punct der Curve $C^{(4)}$ ist, so muss

$$PP''.AA'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.. \;\barwedge\; P\mathfrak{P}''.BB'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'..$$

gesetzt werden, und es ist die Projectivität durch die drei ersten Paare bestimmt. Die weiteren Schnittpuncte von g mit $C^{(4)}$ neben P sind die sich selbst entsprechenden Elemente der Involutionen

$$PP'.AA'.BB'.. \;\barwedge\; P\mathfrak{P}'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'..$$

und ebenso der Involutionen

$$PP''.AA'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.. \;\barwedge\; P\mathfrak{P}''.BB'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'..$$

diese Puncte sind eben dieselben. Damit ist unser Satz erwiesen, die Kegelschnitte sind dabei nur Hülfsmaterial.

Nun werde eine Curve $C^{(4)}$ durch zwei Strahleninvolutionen mit den Trägern X, Y erzeugt, und es seien $x_a x_{a'}$, $x_b x_{b'}$ durch X, und $y_a y_{a'}$, $y_b y_{b'}$ durch Y zwei einander entsprechende Paare derselben, und P sei ein Punct von $C^{(4)}$. Dann legen wir durch P eine Gerade g. Auf ihr bestimmen $x_a x_{a'}$, $y_b y_{b'}$ und das Paar, von dem ein Strahl durch P geht, auf g die Involution

$$PP'.AA'.BB'..$$

und ähnlich bestimmen die Strahlen durch Y die Involution

$$PP'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'...$$

Der Kegelschnittbüschel, dessen Grundpuncte die vier Puncte $(x_a y_a)$, $(x_a y_{a'})$, $(x_{a'} y_a)$, $x_{a'} y_{a'})$ sind, in dem $x_a x_{a'}$, $y_a y_{a'}$ Individuen sind, bestimmt auf g die Involution

$$PP''.AA'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'..,$$

und die Kegelschnitte des Büschels, dessen Grundpuncte $(x_b y_b)$, $(x_b y_{b'})$, $(x_{b'} y_b)$, $(x_{b'} y_{b'})$ sind und von denen $x_b x_{b'}$, $y_b y_{b'}$ zwei Individuen sind, bestimmen auf g die Involution

$$P\mathfrak{P}''.BB'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'..,$$

und wenn wir

$$PP'.AA'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.. \barwedge P\mathfrak{P}''.BB'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'..$$

setzen, wodurch die Projectivität der beiden Kegelschnittbüschel bestimmt ist, und zwar unabhängig von g, sofern nur g durch P geht, so bestimmen die sich selbst entsprechenden Elemente dieselben Punkte auf g als die Involutionen

$$PP'.AA'.BB'.. \barwedge P\mathfrak{P}'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.\mathfrak{B}\mathfrak{B}'..,$$

und da dies für jede durch g gehende Gerade gilt, so erzeugen die Kegelschnittbüschel

$$((x_a y_\alpha), (x_{a'} y_\alpha), (x_a y_{\alpha'}), (x_{a'} y_{\alpha'})) \barwedge ((x_b y_\beta), (x_b y_{\beta'}), (x_{b'} y_\beta), (x_{b'} y_{\beta'}))$$

dieselbe Curve $C^{(4)}$ als die beiden Strahleninvolutionen.

Ist nun speciell $x_b = y_\beta$, so lassen sich die Involutionen

$$PP'.AA'.UU'..$$

und

$$P\mathfrak{P}'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'.B\mathfrak{B}'..,$$

die zur Bestimmung von $C^{(4)}$ dienen, ersetzen durch

$$PP'.AA'.\mathfrak{A}\mathfrak{A}'..$$

und

$$P\mathfrak{P}''.BB'.B\mathfrak{B}'...$$

Die letzte ist eine uneigentliche, und es muss deshalb $\mathfrak{P}'' \equiv B$ sein. Die Curve wird erzeugt durch den Kegelschnittbüschel

$$((x_a y_\alpha), (x_{a'} y_\alpha), (x_a y_{\alpha'}), (x_{a'} y_{\alpha'}))$$

und einen Kegelschnittbüschel, der in Geradenpaare zerfällt, von denen je eine Gerade $x_b \equiv y_\beta$ ist, während der andere Strahl des Paares einen dem Kegelschnittbüschel projectiven Strahlenbüschel durchläuft. Von der erzeugten Curve spaltet sich die Gerade $x_b \equiv y_\beta$ ab, und es bleibt die Curve $C^{(3)}$ übrig, von der nun nachgewiesen ist, dass sie sich auf die beiden in Rede stehenden Arten erzeugen lässt.

§ 3. *Das Tangentenquadrupel der vier Tangenten von einem Puncte der Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ an die Curve bildet einen Wurf, der von der Wahl des Ausgangspunctes auf $C^{(3)}$ unabhängig ist.*

Zunächst betrachten wir den Beweis, der für diesen Satz gegeben zu werden pflegt. — In dem Werke von SALMON (übersetzt von FIEDLER, Leipzig 1873) findet sich auf Seite 175 fol-

gender Beweis (I) dieses Satzes. Sind OO' zwei benachbarte Puncte der Curve $C^{(3)}$, so schneiden sich die je vier Tangenten von OO' an die Curve in vier Puncten $ABCD$ der Curve und es liegen $OO'ABCD$ auf der harmonischen Polare des Punctes O, also auf einem Kegelschnitte, und es ist deshalb

$$O(ABCD) \barwedge O'(ABCD)$$

und mithin ist das Doppelverhältniss dasselbe. Geht man nun zu einem weiteren benachbarten Puncte über, so folgt die Invarianz für die Curve. — Ein zweiter Beweis (II), der später gegeben wird, setzt die Theorie der Invarianten, der Formen S und T voraus.

SCHRÖTER giebt in seiner Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung auf Seite 68 (wörtlich) folgenden Beweis. Nachdem er zuerst von O vier Tangenten an die Curve gezogen hat, fährt er fort: Nehmen wir einen dem Puncte O unendlich nahen benachbarten Punct O' der Curve $C^{(3)}$ und legen aus ihm die vier neuen Tangenten an die Curve, so erhalten wir vier neue den vorigen unendlich nahe Berührungspuncte, und der vorige Kegelschnitt (die harmonische Polare von O) kann aufgefasst werden als gelegt durch die Punkte OO' und die vier Schnittpuncte je zweier unendlich nahen Tangenten von OO', weil der Schnittpunct je zweier unendlich nahe benachbarten Tangenten an Stelle eines jeden der beiden Berührungspuncte gesetzt werden darf. Da nun solche sechs Puncte auf einem Kegelschnitt liegen, so muss das Doppelverhältniss des Tangentenquadrupels aus O dem Doppelverhältniss des Tangentenquadrupels aus O' gleich sein u. s. w. — Wie gelangt man auf diese Weise bei einer zweizügigen Curve von einem Zweige zum andern?

SCHRÖTERS Beweis stimmt im Wesentlichen mit Beweis (I) überein. Denselben Beweis giebt DURÈGE auf Seite 206 seiner ebenen Curven dritter Ordnung.

Es sollen sich also die harmonischen Polaren von OO' auf $C^{(3)}$ oder wenigstens in Puncten schneiden, für die Puncte von $C^{(3)}$ gesetzt werden können. Dem liegt eine infinitesimale Betrachtung zu Grunde, die eine Captatio enthält, der Strenge entbehrt, und insbesondere in der projectiven Geometrie ganz unzulässig ist.

Es dürfte deshalb nicht überflüssig erscheinen, einen Beweis des beregten Satzes zu geben, der von solchen infinitesimalen

Betrachtungen frei und ausserdem wenigstens für die verschiedenen Puncte eines und desselben Zuges der Curve projectiv ist.

Hülfssatz. Eine Curve dritter Ordnung mit einem reellen Wendepuncte lässt eine lineare Transformation in sich zu. — Ich bemerke nebenbei, dass es im Grunde nicht nöthig ist vorauszusetzen, dass jede Curve dritter Ordnung eine Wendepunct besitze. Es lässt sich übrigens die Existenz eines solchen Punctes auf Grund der Anschauungsthatsache feststellen, dass von den unpaaren Zügen einer Curve dritter Ordnung und ihrer HESSEschen Curve der erste von der einen Seite der zweiten auf die andere Seite derselben führt, und dass sie deshalb als *continuirliche* Züge einen Punct gemein haben müssen.

Nimmt man die harmonische Polare des Wendepunktes als Fluchtlinie, den Wendepunct als den sich selbst entsprechenden Punct einer Collineation an, so bildet sich diese Curve durch diese Collineation auf sich selbst ab, und zwar sind die entsprechenden Puncte vom Wendepuncte und der Fluchtlinie harmonisch getrennt. Damit ist der Hülfssatz erwiesen. Es ist selbstverständlich, *dass die Tangentenquadrupel von entsprechenden Puncten der Curve an diese einander projectiv sind.*

Wir legen durch einen Punkt A der Curve $C^{(3)}$ einen Berührungskegelschnitt K, der sie nur noch in einem willkürlich zu wählenden Punkt B und in einem hierdurch bestimmten Punkt C trifft, der also, wie man sich ausdrückt, $C^{(3)}$ im Puncte A vierpunctig berührt. Dass ein solcher Kegelschnitt möglich ist, braucht hier wohl nicht erst nachgewiesen zu werden. Nun bilden wir $C^{(3)}$ mittels einer MÖBIUS'schen Verwandtschaft ab, in der ABC die Grundpunkte sind, die beiden letzten können laterale sein. Dadurch wird die Curve $C^{(3)}$ auf eine andere, ebenfalls durch ABC gehende Curve $\mathfrak{C}^{(3)}$ abgebildet, der Kegelschnitt K auf eine Gerade $\mathfrak{K}$. Der Punct A bildet sich auf einen Punct $\mathfrak{A}$ ab, der auf der Geraden B, C liegt. Seine Lage hängt von der Tangente in A an $C^{(3)}$ ab. Di Gerade $\mathfrak{K}$ hat mit der Curve $\mathfrak{C}^{(3)}$ nur den Punct $\mathfrak{A}$ gemein, ist also eine Wendetangente, und $\mathfrak{A}$ ist ein Wendepunct von $\mathfrak{C}^{(3)}$. Die Puncte B, C sind auf $\mathfrak{C}^{(3)}$ einander entsprechende in der Collineation, deren Fluchtlinie die harmonische Polare von $\mathfrak{A}$ und deren sich selbst entsprechender Punct $\mathfrak{A}$ ist. Die Tangentenquadrupel aus B und C an $\mathfrak{C}^{(3)}$ bilden denselben Wurf, sind einander projectiv. Jede solche Tangente hat mit $\mathfrak{C}^{(3)}$ ausser B bez. C nur noch einen Punct

gemein, und folglich hat ihr Bild, wenn wir die MÖBIUS'sche Verwandtschaft umkehren, oder was dasselbe ist, wegen ihres involutorischen Charakters, wenn wir sie wiederholen, mit $C^{(3)}$ ausser C bez. B auch nur einen Punct gemein. Einer Geraden durch B entspricht eine Gerade durch C, einer Tangente von B an $\mathfrak{C}^{(3)}$ entspricht eine Tangente von C an $C^{(3)}$, dem Quadrupel ein Quadrupel, und zwar ist das Entsprechen ein projectives. Wir haben also den Satz gewonnen, *dass das Tangentenquadrupel von B an $C^{(3)}$ dem Tangentenquadrupel von C an $C^{(3)}$ projectiv ist.*

Wird nun der Punkt B fest angenommen, lässt man aber A über die Curve $C^{(3)}$ laufen, gleichviel ob stetig oder sprungweise, so dass man mit A auch von dem einen Zweige auf den andern springen kann, wenn die Curve zweizügig ist, so durchläuft C (vergl. meine zwei-zweideutigen Verwandtschaften S. 477) alle Puncte des Zweiges der Curve, auf der B liegt, es ist demnach für jedes Punctpaar BC, das entweder auf dem paaren oder unpaaren Zweige der Curve liegt, der Wurf des Tangentenquadrupels derselbe. Zu bemerken ist noch, dass das Quadrupel für Puncte des paaren Zuges imaginär ist.

§ 4. *Das Doppelverhältniss der Tangentenquadrupel für die beiden Zweige einer zweizügigen Curve ist dasselbe.* Es braucht dies nur für die Curve $\mathfrak{C}^{(3)}$ bewiesen zu werden, die einen reellen Wendepunct hat. Ich führe den Beweis analystisch und setze der Bequemlichkeit halber einen realen Wendepunct voraus. Obschon das Tangentenquadrupel vom unpaaren Zweige real, vom paaren Zweige imaginär ist, so ist das Doppelverhältniss doch real und beiderseits dasselbe. Nach dem vorigen Paragraphen genügt es, dies für je *einen* Punct der verschiedenen Zweige zu erweisen. — Da ein realer Wendepunct vorausgesetzt ist, so gewinnt die Curvengleichung, wenn man den Wendepunct auf die uneigentliche Gerade legt und eine Tangente von ihm an die Curven zur y-Axe, seine harmonische Polare zur x-Axe macht, die Form

$$f(xy) = x(x-a)(x-b) + y^2 = 0.$$

Dabei mag $0 < a < b$ sein. Die harmonische Polare des Punctes $x = 0$, $y = 0$, der dem unpaaren Zweige angehört, ist die Hyperbel

$$f_2(xy) = -(a+b)x^2 + 2abx + y^2 = 0.$$

Daraus folgt für die Schnittpuncte

$$f - f_2 = x^3 - abx = 0,$$

und es ist deshalb für die von $x = 0$, $y = 0$ verschiedenen Schnittpuncte der Polare mit der Curve $C^{(3)}$

$$x^2 = ab.$$

Die Schnittpuncte liegen paarweise auf zwei Strahlen durch den Wendepunct und gehen auf der harmonischen Polare des Wendepunctes durch die Doppelpuncte der Involution, von der ab, $0\ \infty$ zwei Paare sind. Dies in die Gleichung der Polare eingesetzt giebt eine Parabel, deren Scheitel an der Stelle $x = \frac{1}{2}(a + b)$ liegt, nämlich

$$-ab(a + b) + 2abx + y^2 = 0,$$
$$x = (y^2 - ab(a + b)) : 2ab.$$

Dies in die Gleichung $x^2 = ab$ substituirt, giebt

$$(y^2 - ab(a + b))^2 = 4a^3b^3,$$
$$y^2 - ab(a + b) = 2ab\sqrt{ab},$$
$$\left(\frac{y}{\sqrt{ab}}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$
$$\frac{y}{\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Man erhält die vier Werthe von y, wenn man den Wurzeln alle möglichen Vorzeichen giebt. Es werde $y : \sqrt{ab} = z$ und

$$z_1 = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad z_2 = \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad z_3 = -\sqrt{a} - \sqrt{b},$$
$$z_4 = -\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

gesetzt. Dann ist

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_3 - z_4}$$
$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{-\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b}}{-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b}}$$
$$= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{b}{a} = \varkappa.$$

Das Doppelverhältniss des Tangentenquadrupels vom Puncte $x = 0$, $y = 0$ an die Curve ist demnach $b : a$. Da die vier Tangenten vom unendlich fernen Wendepuncte aus die x-Axe in den Punkten $b\ 0\ a\ \infty$ treffen, so ergiebt sich auch für deren Doppelverhältniss der Werth $b : a$, wie es ja sein muss. Um das Doppelverhältniss des Punktes $x = a$, $y = 0$, der dem paaren

Zweige angehört, zu finden, setzen wir $x = x' + a$, so wird die Curvengleichung

$$f(x, y) = x'(x' + a)(x' - (b - a)) + y^2 = 0.$$

Man erhält hieraus durch blosse Buchstabenvertauschung aus den obigen Rechnungen für die y der Schnittpuncte der Polare mit der Muttercurve die (imaginären) Werthe

$$\frac{y}{\sqrt{a(a-b)}} = \sqrt{-a} + \sqrt{b-a},$$

wenn man alle Vorzeichencombinationen nimmt. Setzt man $y : \sqrt{a(a-b)} = z'$ und

$$z_1' = \sqrt{-a} + \sqrt{b-a}, \qquad z_2' = \sqrt{-a} - \sqrt{b-a},$$
$$z_3' = -\sqrt{-a} - \sqrt{b-a}, \quad z_4' = \sqrt{-a} + \sqrt{b-a},$$

so folgt

$$\frac{z_2' - z_1'}{z_3' - z_2'} : \frac{z_4' - z_1'}{z_3' - z_4'} = \frac{a-b}{a} = 1 - \varkappa.$$

Durch passende Vertauschung der Indices an den z' erhält man auch das Doppelverhältniss $\varkappa$, weil $1 - \varkappa$ eins der sechs möglichen Doppelverhältnisse eines Quadrupels mit dem Doppelverhältnisse $\varkappa$ ist. Bei passender Anordnung der Tangenten ist das Doppelverhältniss der Tangentenquadrupel vom Puncte $x = 0$, $y = 0$ und dem Puncte $x = a$, $y = 0$ aus dasselbe, und somit ist die Invarianz dieses Doppelverhältnisses, weil diese Punkte der eine dem unpaaren, der andere dem paaren Zweige angehört, allgemein erwiesen.

Druckfertig erklärt 4. VII. 1902.]

Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

J. Thomae.

Für die Differentialgleichung

$$x^3 y' y'' + 2y^2 = 0,$$

die das singuläre Integral $xy = 1$ hat, wird von Serret in dem Theile seiner Differentialrechnung (übersetzt von Harnack), der von den Differentialgleichungen handelt, die Lösung gegeben:

$$y = e^{\int \eta dx}, \quad \eta y = y',$$

$$-\lg x^5 + \lg \frac{x\eta + 1}{\sqrt{(x\eta - 1)^2 + 1}} - 3 \operatorname{artg}(x\eta - 1) = \text{Const.}$$

Diese Gleichung wäre nach η aufzulösen, η als Function von x zu bestimmen, und dann

$$\lg y = \int \eta dx$$

zu berechnen. Eine solche Lösung ist ein Nothbehelf, weil die Gleichung nach η schwer aufzulösen ist. Deshalb soll versucht werden, auf anderem Wege zum Ziele zu gelangen.

Der Differentialgleichung werde die Form gegeben

$$(1) \qquad \frac{dy}{d \lg x} \cdot \frac{d^2 y}{d \lg x^2} - \left(\frac{dy}{d \lg x}\right)^2 + 2y^2 = 0.$$

Wir transformiren sie, indem wir setzen

$$\frac{dy}{d \lg x} = \xi, \quad \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\xi}{d \lg x} \frac{d \lg x}{dy} = \frac{d^2 y}{d \lg x^2} \frac{1}{\xi}, \quad \frac{d^2 y}{d \lg x^2} = \xi \frac{d\xi}{dy},$$

und erhalten dadurch die homogene Differentialgleichung

$$(2) \qquad \xi^2 d\xi = (\xi^2 - 2y^2)\, dy, \quad d\xi = \left(1 - 2\frac{y^2}{\xi^2}\right) dy.$$

Um sie zu integriren, setzt man

$$\zeta = zy, \quad d\zeta = zdy + y, \quad d\zeta = zdy + ydz,$$

woraus folgt

$$zdy + ydz = \left(1 - \frac{2}{z^2}\right) dy,$$

$$\frac{z^3 - z^2 + 2}{z^2} dy = -ydz,$$

$$-d \lg y = \frac{z^2 dz}{z^3 - z^2 + 5} = \frac{1}{5}\left(\frac{dz}{z+1} + \frac{2(2z-1)dz}{(z-1)^2+1} + \frac{2dz}{(z-1)^2+1}\right),$$

und also

(3) $\quad -\lg y^5 = \lg(z+1) + 2\lg(z^2 - 2z + 2) + 2\,\mathrm{artg}(z-1) + \text{Const.}$

(3a) $\quad 0 = \lg(\zeta + y) + 2\lg(\zeta^2 - 2\zeta y + 2y^2) + 2\,\mathrm{arctg}\frac{\zeta - y}{y} + \text{Const.}$

und da $\zeta = xy'$ ist,

(3b) $$0 = \lg(xy' + y) + 2\lg(x^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2) + 2\,\mathrm{artg}\frac{xy' - y}{y} + \text{Const.}$$

und wenn man $xy' = \lambda y$ setzt

(4) $\quad -\lg y^5 = \lg(\lambda+1) + 2\lg(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2\,\mathrm{artg}(\lambda - 1) + \text{Const.}$

Um das SERRETsche Integral zu erhalten, setzen wir

$$y = e^{\int s\, d \lg x}, \quad \frac{dy}{d \lg x} = sy,$$

$$\frac{d^2y}{d \lg x^2} = s\frac{dy}{d \lg x} + y\frac{ds}{d \lg x} = s^2y + y\frac{ds}{d \lg x}.$$

Dadurch gewinnt die Differentialgleichung (1) nach Unterdrückung des Factors y^2 die Form

$$s^3 + s\frac{ds}{d \lg x} - s^2 + 2 = 0$$

oder

(5) $$\frac{-sds}{s^3 - s^2 + 2} = \frac{1}{5}\frac{ds}{s+1} - \frac{1}{10}\frac{z(s-1)ds}{(s-1)^2+1} - \frac{3}{5}\frac{dz}{(z-1)^2+1} = d \lg x,$$

und durch Integration

(6) $\quad \lg x^5 = \lg(s+1) - \frac{1}{2}\lg(s^2 - 2s + 1) - 3\,\mathrm{artg}(s-1) + \text{Const.}$

und da $s = xy' : y = \lambda$ ist, so wird die Integration unserer Differentialgleichung durch die beiden Gleichungen geleistet

(7) $\quad \lg y^5 = -\lg(y+1) - 2\lg(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 2\,\mathrm{artg}(\lambda - 1) + \text{Const.}$

(8) $\quad \lg x^5 = \lg(\lambda+1) - \frac{1}{2}\lg(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - 3\,\mathrm{artg}(\lambda - 1) + \text{Const.}'$

Durch die Combination 2. (7) — 3. (8) folgt hieraus noch:

$$(9) \qquad \lg \frac{y^3}{x^2} = -\lg(\lambda+1) - \lg(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \text{Const.}''$$

$$(10) \qquad \frac{kx^2}{y^3} = \lambda^3 - \lambda^2 + 2,$$

und (10) kann eine der Gleichungen (7) oder (8) ersetzen. Auch kann man, indem man die letzte Gleichung mittels der Cartanischen Formel auflöst und das Resultat in (7) oder (8) einsetzt, eine Integralgleichung zwischen x und y selbst erhalten, doch dürfte die Parameterform vorzuziehen sein.

Um noch das Resultat zu verificiren, beachte man, dass

$$d \lg y = \frac{-\lambda^2 d\lambda}{\lambda^3 - \lambda^2 + 2}, \quad d \lg x = \frac{-\lambda d\lambda}{\lambda^3 - \lambda + 2}$$

ist. Daraus folgt

$$\frac{dy}{d \lg x} = \lambda y, \quad \frac{d^2y}{d \lg x^2} = \frac{\lambda d\lambda}{d \lg x} + \frac{y dx}{d \lg x} = \lambda^2 y - \frac{y(\lambda^3 - \lambda^2 + 2)}{\lambda},$$

und es ist

$$\frac{dy}{d \lg y} \frac{d^2y}{d \lg x^2} - \left(\frac{dy}{d \lg x}\right)^2 + 2y^2 =$$
$$\lambda^3 y^2 - y^2(\lambda^3 - \lambda^2 + 2) - \lambda y^2 + 2y^2 \equiv 0,$$

w. z. b. w.

Druckfertig erklärt 4. VII. 1902.]

Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen.

Von

M. Krause.

Die Theorie der Bernoullischen Zahlen und Funktionen kann von mehrfachen Gesichtspunkten aus aufgebaut werden. Erstens hat die Betrachtung der Summen $1^\mu + 2^\mu + \cdots (x-1)^\mu$ zu derselben geführt. Entwickelt man dieselben nach Potenzen von x, so erhält man gewisse ganze rationale Funktionen, welche mit dem Namen der Bernoullischen Funktionen bezeichnet werden, während die Koeffizienten von unwesentlichen Faktoren abgesehen die Bernoullischen Zahlen sind. Zu denselben Größen führt das Problem, die trigonometrischen Reihen:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin sx}{s^{2m+1}} \quad \text{und} \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos sx}{s^{2m+2}}$$

zu summieren, ferner das Problem gewisse transcendente Ausdrücke, wie $e^{xz} - 1 : e^z - 1$ und $z : e^z - 1$ nach Potenzen von z zu entwickeln.

Diese soeben skizzierten Grössen haben sich nach mehrfacher Richtung hin von Bedeutung gezeigt, insbesondere sind enge Beziehungen zur Theorie der bestimmten Integrale, wie der Differenzenrechnung und Zahlentheorie hergestellt worden. Die hierauf bezüglichen Theorien sind in übersichtlicher Weise in den Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen von Saalschütz, Berlin 1893 dargestellt worden, wo sich auch die notwendigen Litteraturnachweise finden.

In neuerer Zeit sind nun die Untersuchungen über Bernoullische Zahlen und Funktionen nach mehrfachen Richtungen hin weitergeführt worden. Die folgenden mögen kurz charakterisiert werden.

di Napoli 1865), sodann in einer Arbeit von CESARO[1]), welcher die auf diesem Wege entstehenden Zahlen nach TRUDI mit dem Namen der ultra-bernoullischen bezeichnet und sie zur Umformung von Reihen benutzt und mit Aufgaben der Astronomie und bestimmten Integrale in Verbindung setzt.

In dieses Gebiet fallen die nachfolgenden Untersuchungen. Es soll der Versuch gemacht werden, die Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und der mit ihnen zusammenhängenden Funktionen in systematischer Weise zu entwickeln und zwar sowohl für ein allgemeines ε als auch insbesondere für den Fall, daß ε eine Einheitswurzel ist. Es ergeben sich dann drei analoge Ausgangspunkte, wie bei der ursprünglichen Theorie. Es können erstens Ausdrücke von der Form:

$$\varepsilon \cdot 1^{\mu} + \varepsilon^2 \cdot 2^{\mu} + \cdots \varepsilon^{x-1}(x-1)^{\mu}$$

der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, zweitens führt die Untersuchung gewisser trigonometrischer Reihen wie etwa der Reihe:

$$\frac{\sin rx}{r^{2\mu}} + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(\frac{\sin(ln+r)x}{(ln+r)^{2\mu}} - \frac{\sin(ln-r)x}{(ln-r)^{2\mu}}\right)$$

zu denselben Größen und endlich drittens ebenso die Entwickelung von Ausdrücken der Form:

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot e^{z} - 1} \quad \text{etc.}$$

nach Potenzen von z.

Alle drei Darstellungsarten sollen im Folgenden betrachtet und mit einander in Verbindung gesetzt werden. Besonderes Gewicht ist auf die Beziehungen zu den trigonometrischen Reihen gelegt worden.

Es ergeben sich hierbei Aufgaben, die auch losgelöst von dem speziellen Ausgangspunkt für die allgemeine Theorie der Summierung trigonometrischer Reihen von Interesse sein dürften.

---

1) CESARO: Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. Nouvelles Annales de Mathématiques 3. Serie 5. Band 1886. Das Citat der Arbeit von TRUDI ist diesem Aufsatz entnommen. In eben demselben ist eine Arbeit von CATALAN erwähnt: Sur une suite de polynômes entiers (Académie de Belgique 1880). Endlich möge auf das Werk von SAALSCHÜTZ pag. 184 und § 10 verwiesen werden, wie sich noch weitere Litteraturangaben finden.

Die Theorie der bestimmten Integrale ist einstweilen noch nicht in Betracht gezogen worden.

Wie aus den soeben gemachten Bemerkungen folgt, berühren sich einige der folgenden Untersuchungen mit solchen aus anderen Arbeiten — es soll das an den betreffenden Stellen noch besonders hervorgehoben werden.

§ 1.

Summierung gewisser unendlicher Reihen mit Hülfe von trigonometrischen Reihen.

Wir nehmen an, daß eine Funktion $f(x)$ in eine Sinusreihe entwickelt sei:

$$(1) \qquad f(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \sin 3x + \cdots,$$

dann können mit Hülfe von $f(x)$ gewisse unendliche Reihen leicht summiert werden. In der Tat, wir nehmen an, daß n eine ungerade Zahl sei und setzen an Stelle von x der Reihe nach:

$$\frac{\pi}{n}, \ \frac{3\pi}{n}, \ \cdots \ \frac{(2m-1)\pi}{n}, \qquad (n = 2m+1)$$

so ergibt sich das lineare Gleichungssystem (2):

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{n}\right) &= s^{(u_1)} \sin\frac{\pi}{n} + s^{(u_2)} \sin\frac{2\pi}{n} \quad + \cdots s^{(u_m)} \sin\frac{m\pi}{n}, \\
f\left(\frac{3\pi}{n}\right) &= s^{(u_1)} \sin\frac{3\pi}{n} + s^{(u_2)} \sin\frac{3\cdot 2\pi}{n} + \cdots s^{(u_m)} \sin\frac{3\cdot m\pi}{n}, \\
&\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots \\
f\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right) &= s^{(u_1)} \sin\frac{(n-2)\pi}{n} + \cdots \qquad \cdots s^{(u_m)} \sin\frac{(n-2)m\pi}{n}
\end{aligned}$$

wobei die Größen s durch die unendlichen Reihen definiert sind:

$$(3) \qquad s^{(u_r)} = \alpha_r + \sum_{l=1}^{l=\infty} (-1)^l (\alpha_{ln+r} - \alpha_{ln-r}), \quad u_r = \frac{r\pi}{n},$$
$$r: 1, 2, \ldots m.$$

Diese unendlichen Reihen können dann mit Hülfe der Funktion $f(x)$ leicht summiert werden. In der Tat, multiplizieren wir die Gleichungen des Systems (2) der Reihe nach mit:

$$2\sin\frac{r\pi}{n}, \quad 2\sin\frac{3r\pi}{n}, \ \cdots \ 2\sin\frac{(n-2)r\pi}{n}$$

und addieren die rechten und die linken Seiten, so erhalten wir:

$$(4) \qquad \frac{n}{2} s^{(u_r)} = 2 \sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right) \sin(2l-1)u_r.$$

Hierbei ist von der Summationsformel Gebrauch gemacht worden:

$$\cos x + \cos 3x + \cdots \cos(2m-1)x$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} \cos x - \frac{1}{2} \cos(2m+1)x.$$

Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn n eine gerade Zahl ist und zwar gleich $2m$, sodaß wir den folgenden Lehrsatz erhalten:

Die unendlichen Reihen:

$$s^{(u_r)} = \alpha_r + \sum_{l=1}^{l=\infty} (-1)^l (\alpha_{ln+r} - \alpha_{ln-r}), \quad u_r = \frac{r\pi}{n},$$
$$r\colon 1, 2, \ldots m$$

können mit Hülfe der unter (1) *definierten Funktion* $f(x)$ *summiert werden und zwar wird:*

$$\left(\frac{n}{2}\right) s^{(u_r)} = 2 \sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right) \sin(2l-1)u_r.$$

Wir können aber noch weiter gehen. Wir wollen wieder annehmen, daß n eine ungerade Zahl sei und zwar gleich $2m+1$ und setzen in Gleichung (1) an Stelle von x der Reihe nach:

$$\frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{2m\pi}{n},$$

dann erhalten wir das lineare Gleichungssystem (5):

$$f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sigma^{(u_1)} \sin\frac{2\pi}{n} + \sigma^{(u_2)} \sin\frac{2\cdot 2\pi}{n} + \cdots \sigma^{(u_m)} \sin\frac{m\cdot 2\pi}{n},$$
$$f\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \sigma^{(u_1)} \sin\frac{4\pi}{n} + \sigma^{(u_2)} \sin\frac{2\cdot 4\pi}{n} + \cdots \sigma^{(u_m)} \sin\frac{m\cdot 4\pi}{n},$$
$$\cdots$$
$$f\left(\frac{2m\pi}{n}\right) = \sigma^{(u_1)} \sin\frac{2m\pi}{n} + \cdots \quad + \cdots \sigma^{(u_m)} \sin\frac{m\cdot 2m\pi}{n},$$

wobei unter den Größen σ die unendlichen Reihen zu verstehen sind:

$$(6) \quad \sigma^{(u_r)} = \alpha_r + \sum_{l=1}^{l=\infty} (\alpha_{ln+r} - \alpha_{ln-r}), \quad u_r = \frac{r\pi}{n}, \quad r\colon 1, 2, \ldots m.$$

Auch diese Reihen können mit Hülfe von $f(x)$ summiert werden. In der Tat wir multiplizieren die Gleichungen des Systemes (5) der Reihe nach mit:

$$2\sin\frac{2r\pi}{n},\quad 2\sin\frac{4r\pi}{n},\quad \ldots\ 2\sin\frac{2mr\pi}{n}$$

und addieren, so erhalten wir für $\sigma^{(u_r)}$ den Ausdruck:

$$\frac{n}{2}\sigma^{(u_r)} = 2\sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\sin 2lu_r. \tag{7}$$

Hierbei ist von der Summationsformel Gebrauch gemacht:

$$\cos x + \cos 2x + \cdots \cos mx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn n eine gerade Zahl und zwar $2m$ ist, sodaß wir den folgenden Lehrsatz erhalten:

Die unendlichen Reihen:

$$\sigma^{(u_r)} = \alpha_r + \sum_{l=1}^{l=\infty}(\alpha_{ln+r} - \alpha_{ln-r}),\quad u_r = \frac{r\pi}{n},\quad r\colon 1,\ 2,\ \ldots\ m$$

können mit Hülfe der unter (1) *definierten Funktion* $f(x)$ *summiert werden und zwar ergibt sich:*

$$\frac{n}{2}\sigma^{(u_r)} = 2\sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\sin 2lu_r.$$

Neben der Sinusreihe kann auch die Cosinusreihe in Betracht gezogen werden. Hierbei kann entweder so vorgegangen werden, daß ähnlich wie in der gewöhnlichen Theorie der Fourierschen Reihen die Cosinusreihe durch Multiplikation mit $\sin x$ in eine Sinusreihe verwandelt wird, oder aber es kann ein direktes Verfahren eingeschlagen werden. Wir wählen den letzten Weg als den direkten. Wir nehmen dazu an, daß eine Function in eine Cosinusreihe entwickelbar sei:

$$f(x) = \frac{1}{2}\beta_0 + \beta_1\cos x + \beta_2\cos 2x + \cdots. \tag{8}$$

Wenn dann n eine ungerade Zahl ist und zwar gleich $2m+1$, so setzen wir an Stelle von x der Reihe nach:

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-2)\pi}{n}, \quad \pi$$

und erhalten das Gleichungssystem (9):

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \frac{S^{(u_0)}}{2} + S^{(u_1)} \cos\frac{\pi}{n} + \cdots S^{(u_m)} \cos\frac{m\pi}{n}, \\ f\left(\frac{3\pi}{n}\right) &= \frac{S^{(u_0)}}{2} + S^{(u_1)} \cos\frac{3\pi}{n} + \cdots S^{(u_m)} \cos\frac{3m\pi}{n}, \\ &\cdots \\ f(\pi) &= \frac{S^{(u_0)}}{2} - S^{(u_1)} \cdots \quad (-1)^m S^{(u_m)}, \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$(10) \qquad S^{(u_r)} = \beta_r + \sum_{l=1}^{l=m} (-1)^l (\beta_{ln+r} + \beta_{ln-r}), \quad u_r = \frac{r\pi}{n},$$

$$r\colon 0, 1, \ldots m.$$

Wir multiplizieren die Gleichungen des Systemes (9) der Reihe nach mit:

$$2\cos\frac{\pi r}{n}, \quad 2\cos\frac{3\pi r}{n}, \quad \ldots \quad 2\cos\frac{(n-2)\pi r}{n}, \quad \cos r\pi$$

und addieren die rechten und die linken Seiten, so folgt für $S^{(u_r)}$ die Darstellung:

$$(11) \qquad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = 2 \sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right) \cos(2l-1) u_r + f(\pi) \cos r\pi.$$

Wenn n eine gerade Zahl ist und zwar gleich $2m$, so setzen wir in Gleichung (8) an Stelle von x der Reihe nach:

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-1)\pi}{n}$$

und gehen ähnlich vor, wie vorhin, so ergibt sich:

$$(12) \qquad \frac{n}{2} S^{(u_r)} 2 = \sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right) \cos(2l-1) u_r, \quad u_r = \frac{r\pi}{n},$$

$$r\colon 0, 1, \ldots m-1;$$

wobei die Größen S die frühere Bedeutung haben, nur daß n eine gerade Zahl bedeutet. Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Die unendlichen Reihen:

$$S^{(u_r)} = \beta_r + \sum_{l=1}^{l=\infty} (-1)^l (\beta_{ln+r} + \beta_{ln-r}),$$

bei welchen r die vorhin angegebenen Werte annimmt, können mit Hülfe der unter (8) *definierten Funktion summiert werden. Die Darstellungen erfolgen durch die Formeln* (11) *und* (12).

Nunmehr nehmen wir wieder an, daß n eine ungerade Zahl und zwar gleich $2m+1$ sei und setzen in (8) an Stelle von x der Reihe nach:

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \frac{2m\pi}{n},$$

so erhalten wir das Gleichungssystem (13):

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\Sigma^{(u_0)}}{2} + \Sigma^{(u_1)} \qquad + \cdots \Sigma^{(u_m)}, \\
f\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \frac{\Sigma^{(u_0)}}{2} + \Sigma^{(u_1)} \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots \Sigma^{(u_m)} \cos\frac{2m\pi}{n}, \\
&\cdots\cdots \\
f\left(\frac{2m\pi}{n}\right) &= \frac{\Sigma^{(u_0)}}{2} + \cdots \qquad \Sigma^{(u_m)} \cos\frac{2m \cdot m\pi}{n},
\end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$(14) \quad \Sigma^{(u_r)} = \beta_r + \Sigma(\beta_{ln+r} + \beta_{ln-r}), \; u_r = \frac{r\pi}{n}, \; r: 0, 1, \ldots m.$$

Wir multiplizieren die Gleichungen des Systemes (13) der Reihe nach mit:

$$1, \quad 2\cos\frac{2r\pi}{n}, \quad \ldots \; 2\cos\frac{2mr\pi}{n}$$

und addieren, so erhalten wir die Darstellung:

$$(15) \qquad \frac{n}{2}\Sigma^{(u_r)} = f(o) + 2\sum_{l=1}^{l=m} f\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\cos 2lu_r.$$

Analog ist der Fall zu behandeln, wenn n eine gerade Zahl und zwar gleich $2m$ ist.

Es ergibt sich die Darstellung:

$$(16) \quad \frac{n}{2}\Sigma^{(u_r)} = f(o) + 2\sum_{l=1}^{l=m-1} f\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\cos 2lu_r + f(\pi)\cos r\pi.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:
Die unendlichen Reihen:

$$\Sigma^{(u_r)} = \beta_r + \sum_{l=1}^{l=\infty}(\beta_{ln+r} + \beta_{ln-r})$$

können mit Hülfe der unter (8) *definierten Funktion summiert werden. Die Darstellungen erfolgen mit Hülfe der Formeln* (15) *und* (16).

§ 2.

Anwendung der gefundenen Resultate auf die trigonometrischen Reihen, welche die Bernoullischen Funktionen darstellen. Definition von ultra-bernoullischen Zahlen.

Die Sätze des ersten Paragraphen wollen wir nun auf einige bekannte trigonometrische Reihen anwenden und zwar zunächst auf die Sinusreihe:

$$(1) \qquad B_{2\mu+1}(x) = \frac{\sin x}{1^{2\mu+1}} + \frac{\sin 2x}{2^{2\mu+1}} + \cdots$$

Es hat dann $B_{2\mu+1}(x)$ die Form:

$$(2) \qquad B_{2\mu+1}(x) = (-1)^{\mu+1} F$$

$$F = \frac{x^{2\mu+1}}{2(2\mu+1)!} - \frac{\pi}{2}\frac{x^{2\mu}}{2\mu!} + \frac{x^{2\mu-1}}{2\mu-1!}S_2 - \frac{x^{2\mu-3}}{2\mu-3!}S_4 \cdots (-1)^{\mu+1} x S_{2\mu},$$

wobei die Größen S die bekannten Summen der reziproken entsprechenden Potenzen der positiven ganzen Zahlen bedeuten.

Die Größen s und σ des vorigen Paragraphen nehmen dann die speciellen Formen an:

$$(3) \quad s^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right),$$

$$(4) \quad \sigma^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right).$$

Wo eine genauere Bezeichnungsweise nötig ist, wollen wir die eingeführten Größen auch schreiben:

$$s_{2\mu+1}^{(u_r)}, \quad \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)}.$$

Dann erhalten wir die Darstellungen:

$$(5)\qquad \frac{n}{2}\,s_{2\mu+1}^{(u_r)} = 2\sum_{1}^{m} B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right)\sin(2l-1)u_r,$$

$$(6)\qquad \frac{n}{2}\,\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = 2\sum_{1}^{m} B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\sin 2lu_r.$$

Wir nehmen zweitens die bekannte Cosinusreihe:

$$(7)\qquad B_{2\mu}(x) = \frac{\cos x}{1^{2\mu}} + \frac{\cos 2x}{2^{2\mu}} + \cdots,$$

wobei $B_{2\mu}(x)$ den Wert hat:

$$(8)\qquad B_{2\mu}(x) = (-1)^{\mu+1} F_1$$

$$F_1 = \frac{x^{2\mu}}{2\cdot 2\mu!} - \frac{\pi}{2}\frac{x^{2\mu-1}}{2\mu-1!} + \frac{x^{2\mu-2}}{2\mu-2!}S_2 - \frac{x^{2\mu-4}}{2\mu-4!}S_4 \cdots (-1)^{\mu+1} S_{2\mu}.$$

Für diese spezielle Reihe nehmen die Größen S und Σ die Form an:

$$(9)\qquad S^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^{l}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right),$$

$$(10)\qquad \Sigma^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right).$$

Wo eine genauere Bezeichnungsweise notwendig ist, schreiben wir die eingeführten Größen:

$$S_{2\mu}^{(u_r)},\quad \Sigma_{2\mu}^{(u_r)}.$$

Die Sätze des vorigen Paragraphen ergeben dann die folgenden Beziehungen:

$$11)\qquad \frac{2m+1}{2}\,S_{2\mu}^{(u_r)} = 2\sum_{1}^{m} B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{2m+1}\right)\cos\frac{(2l-1)r\pi}{2m+1} + B_{2\mu}(\pi)\cos r\pi,$$

$$12)\qquad m\,S_{2\mu}^{(u_r)} = 2\sum_{1}^{m} B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{2m}\right)\cos\frac{(2l-1)r\pi}{2m},$$

$$13)\qquad \frac{2m+1}{2}\,\Sigma_{2\mu}^{(u_r)} = B_{2\mu}(o) + 2\sum_{1}^{m} B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{2m+1}\right)\cos\frac{2lr\pi}{2m+1},$$

$$14)\qquad m\,\Sigma_{2\mu}^{(u_r)} = B_{2\mu}(o) + 2\sum_{0}^{m-1} B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{2m}\right)\cos\frac{2lr\pi}{2m} + B_{2\mu}(\pi)\cos r\pi.$$

Die Größe u_r ist gleich $\frac{r\pi}{n}$, n in den Formeln 11 und 13 ungerade, in den Formeln 12 und 14 dagegen gerade.

Die Funktionen $B_{2\mu+1}(x)$ und $B_{2\mu}(x)$ sind von unwesentlichen Faktoren abgesehen die bekannten Bernoullischen Funktionen, ebenso die Größen S_2, S_4 .. von unwesentlichen Abweichungen abgesehen die bekannten Bernoullischen Zahlen. Ferner stehen die von uns in diesem Paragraphen eingeführten Größen s, σ, S, Σ mit den ultra-bernoullischen Zahlen von CESARO in engstem Zusammenhang und *mögen als solche bezeichnet werden.* Aus dem vorhin Bemerkten folgt dann der Lehrsatz:

Die eingeführten ultra-bernoullischen Zahlen lassen sich mit Hülfe der gewöhnlichen Bernoullischen Funktionen oder auch der gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen und der Teilwerte der Sinus und Cosinusfunktion darstellen.

Die Bernoullischen Funktionen resp. Zahlen haben hier zur Darstellung der ultra-bernoullischen Zahlen geführt. Wir werden im Folgenden Methoden angeben, um die letzteren sei es durch Rekursionsformeln, sei es in independenter Form darzustellen, dann geben die gefundenen Resultate ebenso viele Eigenschaften der Bernoullischen Funktionen an.

§ 3.

Anwendung der Sätze des ersten Paragraphen auf die trigonometrischen Reihen, welche die Funktionen $\sin kx$ und $\cos kx$ darstellen. Zusammenhang der ultra-bernoullischen Zahlen mit den Coeffizienten der Taylorschen Entwickelung von $\operatorname{cotg} x$ und $\operatorname{cosec} x$.

Wir wollen nunmehr die Sätze des ersten Paragraphen auf die Reihen anwenden, welche die Funktionen $\pi \sin kx$ und $\pi \cos kx$ darstellen.

Bekanntlich ist:

$$(1) \qquad \pi \sin kx = \sin k\pi \sum_{s=1}^{s=\infty}{}' \frac{2s \cos s\pi \sin sx}{k^2 - s^2}.$$

Die Größen s des ersten Paragraphen haben dann die Form:

$$s^{(u_r)} = 2 \sin k\pi \cdot G$$

$$G = \frac{r \cos r\pi}{k^2 - r^2} + \sum{}' (-1)^l \left(\frac{(ln + r) \cos (ln + r)\pi}{k^2 - (ln + r)^2} - \frac{(ln - r) \cos (ln - r)\pi}{k^2 - (ln - r)^2} \right).$$

Wir nehmen jetzt an, daß n eine ungerade Zahl sei, so haben wir zur Darstellung dieses Ausdrucks die Summe zu untersuchen

$$2\pi \sum_{l=1}^{l=m} \sin \frac{(2l-1)k\pi}{n} \sin \frac{(2l-1)r\pi}{n}.$$

Dieselbe ergibt sich nach leichten Rechnungen gleich:

$$\frac{\pi}{2} \cos r\pi \sin k\pi \left(\operatorname{cotg} \frac{\pi(k-r)}{n} - \operatorname{cotg} \frac{\pi(k+r)}{n} \right).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg} \frac{\pi(k-r)}{n} - \operatorname{cotg} \frac{\pi(k+r)}{n} \right)$$

$$(2) \qquad = \frac{r}{k^2-r^2} + \sum_{l=1}^{l=\infty} \left(\frac{ln+r}{k^2-(ln+r)^2} - \frac{ln-r}{k^2-(ln-r)^2} \right).$$

Aus dieser Formel ergibt sich ein enger Zusammenhang zwischen den von uns eingeführten ultra-bernoullischen Zahlen:

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)}$$

und der Entwickelung der Funktion $\operatorname{cotg} x$ in eine Taylorsche Reihe.

In der Tat, die rechte Seite von Gleichung (2) können wir schreiben:

$$-\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} k^{2\mu} \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} \cdot$$

und damit erhalten wir die Beziehung:

$$(3) \qquad \frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg} \frac{\pi(k+r)}{n} - \operatorname{cotg} \frac{\pi(k-r)}{n} \right) = \Sigma k^{2\mu} \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)}.$$

Andrerseits ist aber:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg} \frac{\pi(k+r)}{n} - \operatorname{cotg} \frac{\pi(k-r)}{n} \right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{cotg} u + \left(\frac{\pi k}{n}\right)^2 \frac{1}{1\cdot 2} \frac{d^2 \operatorname{cotg} u}{du^2} + \left(\frac{\pi k}{n}\right)^4 \frac{1}{4!} \frac{d^4 \operatorname{cotg} u}{du^4} + \cdots \right)$$

für $u = u_r = \frac{\pi r}{n}$, oder also wir erhalten die einfache Beziehung:

$$(4) \qquad \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1} \frac{1}{2\mu!} \frac{d^{2\mu} \operatorname{cotg} u}{du^{2\mu}} \quad \text{für } u = u_r = \frac{\pi r}{n}.$$

Wir nehmen zweitens an, daß n eine gerade Zahl sei und wenden wieder den ersten Satz an. Dann ist die Summe zu untersuchen:

$$2\pi \sum_{1}^{m} \sin\frac{(2l-1)k\pi}{n} \cdot \sin\frac{(2l-1)r\pi}{n}.$$

Dieselbe ergibt sich gleich:

$$\frac{\pi}{2} \sin k\pi \cdot \cos r\pi \left(\operatorname{cosec}\frac{(k-r)\pi}{n} - \operatorname{cosec}\frac{(k+r)\pi}{n}\right)$$

oder also wir erhalten die Beziehung:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi(k-r)}{n} - \operatorname{cosec}\frac{\pi(k+r)}{n}\right)$$

$$(5) \quad = \frac{r}{k^2-r^2} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^l \left(\frac{ln+r}{k^2-(ln+r)^2} - \frac{ln-r}{k^2-(ln-r)^2}\right).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir für ein gerades n eine Beziehung zwischen den ultra-bernoullischen Zahlen:

$$s_{2\mu+1}^{(u_r)}$$

und den Entwickelungskoeffizienten der Funktion $\operatorname{cosec} x$ in eine Taylorsche Reihe. In der Tat, durch Entwickelung nach Potenzen von k^2 erhalten wir:

$$(6) \quad \frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi(k+r)}{n} - \operatorname{cosec}\frac{\pi(k-r)}{n}\right) = \sum_{0}^{\infty} k^{2\mu}\, s_{2\mu+1}^{(u_r)}.$$

Andrerseits ist aber:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi(k+r)}{n} - \operatorname{cosec}\frac{\pi(k-r)}{n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{cosec} u + \left(\frac{\pi k}{n}\right)^2 \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2 \operatorname{cosec} u}{du^2} + \cdots\right)$$

für $u = u_r = \frac{\pi r}{n}$, also ergibt sich:

$$(7) \quad s_{2\mu+1}^{(u_r)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\mu+1} \frac{1}{2\mu!} \frac{d^{2\mu} \operatorname{cosec} u}{du^{2\mu}} \quad \text{für } u = u_r.$$

Nehmen wir wieder an, daß n eine ungerade Zahl ist, so ergibt die Anwendung des zweiten Satzes die Relation:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi(k-r)}{n} - \operatorname{cosec}\frac{\pi(k+r)}{n}\right)$$

$$= \frac{r}{k^2-r^2} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^l \left(\frac{ln+r}{k^2-(ln+r)^2} - \frac{ln-r)}{k^2-(ln-r)^2}\right).$$

Unter solchen Umständen bleiben die Beziehungen zwischen den Größen s und den Entwickelungskoeffizienten der Cosecansfunktion auch für ungerade n bestehen. Ebenso zeigt die Anwendung des zweiten Lehrsatzes für den Fall eines geraden n, daß die Beziehungen zwischen den Größen σ und den Entwickelungskoeffizienten der Cotangente bestehen bleiben.

Fassen wir die Resultate zusammen, so können wir in etwas veränderter Reihenfolge die Sätze aussprechen:

I. *Die ultra-bernoullischen Zahlen:*

$$s_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^l \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right)$$

sind die Koeffizienten in der Entwickelung der Funktion:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi(k+r)}{n} - \operatorname{cosec}\frac{\pi(k-r)}{n}\right)$$

nach Potenzen von k oder also es ist:

$$s_{2\mu+1}^{(u_r)} = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1}\frac{1}{2\mu!}\frac{d^{2\mu}\operatorname{cosec} u}{du^{2\mu}} \quad \text{für } u = u_r = \frac{\pi r}{n}.$$

II. *Die ultra-bernoullischen Zahlen:*

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right)$$

sind die Koeffizienten in der Entwickelung der Funktion:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi(k+r)}{n} - \operatorname{cotg}\frac{\pi(k-r)}{n}\right)$$

nach Potenzen von k oder also es ist:

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1}\frac{1}{2\mu!}\frac{d^{2\mu}\operatorname{cotg} u}{du^{2\mu}} \quad \text{für } u = u_r = \frac{\pi r}{n}.$$

In ähnlicher Weise kann die Entwickelung von $\cos kx$ untersucht werden.

In der Tat es ist:

$$\pi\cos kx = \sin k\pi\left(\frac{1}{k} + 2k\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\cos s\pi\cdot\cos sx}{k^2-s^2}\right), \tag{9}$$

so daß die Größen S des ersten Paragraphen die Form annehmen:

$$S^{(u_r)} = \tag{10}$$

$$2k\sin k\pi\left(\frac{\cos r\pi}{k^2-r^2} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{\cos(ln+r)\pi}{k^2-(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)\pi}{k^2-(ln-r)^2}\right)\right).$$

Wir nehmen an, daß n eine ungerade Zahl ist, so ist nach Gleichung (13) des ersten Paragraphen der Ausdruck zu betrachten:

$$2\pi\sum_{l=1}^{l=m}\cos(2l-1)\frac{k\pi}{n}\cdot\cos\frac{(2l-1)r\pi}{n}$$

Durch Auswertung desselben ergibt sich die Beziehung:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg}\frac{(k+r)\pi}{n}+\operatorname{cotg}\frac{(k-r)\pi}{n}\right)$$

$$(11)\qquad =k\left(\frac{1}{k^2-r^2}+\sum_1^\infty\left(\frac{1}{k^2-(ln+r)^2}+\frac{1}{k^2-(ln-r)^2}\right)\right).$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach Potenzen von k^2, so erhalten wir die Gleichung:

$$(12)\qquad -\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg}\frac{(k+r)\pi}{n}+\operatorname{cotg}\frac{(k-r)\pi}{n}\right)=\sum_1^\infty k^{2\mu-1}\Sigma_{2\mu}^{(u_r)}.$$

Andererseits ist aber:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg}\frac{(k+r)\pi}{n}+\operatorname{cotg}\frac{(k-r)\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi}{n}\left(\frac{\pi k}{n}\frac{d\operatorname{cotg}u}{du}+\left(\frac{\pi k}{n}\right)^3\frac{1}{3!}\frac{d^3\operatorname{cotg}u}{du^3}+\cdots\right)_{u=u_r},$$

so daß wir die Darstellung finden:

$$(13)\qquad \Sigma_{2\mu}^{(u_r)}=-\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu}\frac{1}{2\mu-1!}\frac{d^{2\mu-1}\operatorname{cotg}u}{du^{2\mu-1}},\quad u=u_r.$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt dieselbe auch für gerade Werte von n.

Genau so folgt für gerade und für ungerade Werte von n:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{(k+r)\pi}{n}+\operatorname{cosec}\frac{(k-r)\pi}{n}\right)$$

$$(14)\qquad =k\left(\frac{1}{k^2-r^2}+\sum_1^\infty(-1)^l\left(\frac{1}{k^2-(ln+r)^2}+\frac{1}{k^2-(ln-r)^2}\right)\right)$$

oder also:

$$(15)\qquad S_{2\mu}^{(u_r)}=-\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu}\frac{1}{2\mu-1!}\frac{d^{2\mu-1}\operatorname{cosec}u}{du^{2\mu-1}},\quad u=u_r.$$

Fassen wir die letzten Resultate noch einmal zusammen, so können wir unter Änderung der Reihenfolge die Sätze aussprechen:

I. *Die ultra-bernoullischen Zahlen:*

$$S_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^l \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right)$$

sind die negativen Koeffizienten in der Entwickelung von

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cosec}\frac{(k+r)\pi}{n} + \operatorname{cosec}\frac{(k-r)\pi}{n}\right)$$

nach Potenzen von k, oder also es ist:

$$S_{2\mu}^{(u_r)} = -\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu}\frac{1}{2\mu-1!}\frac{d^{2\mu-1}\operatorname{cosec} u}{du^{2\mu-1}},\quad u = u_r.$$

II. *Die ultra-bernoullischen Zahlen:*

$$\Sigma_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right)$$

sind die negativen Koeffizienten in der Entwickelung von:

$$\frac{\pi}{2n}\left(\operatorname{cotg}\frac{(k+r)\pi}{n} + \operatorname{cotg}\frac{(k-r)\pi}{n}\right)$$

nach Potenzen von k, oder es ist:

$$\Sigma_{2\mu}^{(u_r)} = -\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu}\frac{1}{2\mu-1!}\frac{d^{2\mu-1}\operatorname{cotg} u}{du^{2\mu-1}},\quad u = u_r.$$

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß die Entwickelungen dieses Paragraphen auch unmittelbar aus den Partialbruchentwickelungen der Funktion $\operatorname{cotg} x$ und $\operatorname{cosec} x$ hätten gewonnen werden können.

§ 4.

Verallgemeinerung der Definition der ultra-bernoullischen Zahlen. Rekursionsformeln zwischen denselben.

Die letzten Betrachtungen führen zu dem Problem, die Funktionen:

$$\operatorname{cotg}(x+u) \quad \text{und} \quad \operatorname{cotg}(x-u) \quad \text{resp.}$$
$$\operatorname{cosec}(x+u) \quad \text{und} \quad \operatorname{cosec}(x-u)$$

oder auch einfache Verbindungen derselben für die speziellen Werte

$$u = u_r = \frac{\pi r}{n}$$

nach Potenzen von x zu entwickeln. Es liegt nahe, von dieser speziellen Wahl von u abzusehen und ganz allgemeine Werte

von u in Betracht zu ziehen. Das soll geschehen und zwar wollen wir zunächst die Funktion $\operatorname{cotg}(x+u)$ in Betracht ziehen.

Es ist:

$$(1) \qquad \operatorname{cotg}(x+u) = i\left(1 + \frac{2}{e^{2(x+u)i} - 1}\right)$$

Setzen wir:

$$(2) \qquad 2ix = y, \quad 2iu = v,$$

so ist klar, daß die Entwickelung der Funktion $\operatorname{cotang}(x+n)$ auf die Entwickelung des Ausdruckes herauskommt:

$$\frac{1}{e^{y+v} - 1}.$$

Wir setzen denselben in der Form an:

$$c\left(1 + b_1 y + b_2 \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right),$$

wobei aber die Bedingung hinzuzunehmen ist, daß u von Null verschieden ist.[1])

Nach dem Vorgange von LUCAS, HERMITE, RADICKE u. a. setzen wir symbolisch:

$$(3) \qquad \frac{1}{e^{y+v} - 1} = c e^{by}.$$

Die Größen c und b hängen dann von u ab. Wo eine Unsicherheit in Bezug auf diesen Wert stattfindet, schreiben wir an Stelle von c und b:

$$c(u) \quad \text{und} \quad b(u).$$

Die soeben eingeführten Größen sind in einem engen Zusammenhang mit den von uns eingeführten ultra-bernoullischen Zahlen σ und Σ, denn es ist allgemein:

$$(4) \qquad (2i)^{\mu+1} c \cdot b_\mu = \frac{d^\mu \operatorname{cotg} u}{du^\mu},$$

also für $u = u_r$:

$$(5) \qquad \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+1} \frac{(2i)^{2\mu+1}}{2\mu!} c b_{2\mu}(u_r),$$

$$(6) \qquad \Sigma_{2\mu}^{u_r)} = -\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu} \frac{(2i)^{2\mu}}{2\mu - 1!} c b_{2\mu-1}(u_r).$$

---

1) Die Größe u wird im Folgenden stets von Null verschieden angenommen werden.

Dabei ist die Größe c gleich:

$$c = \frac{1}{e^v - 1} = -\frac{1}{2}(1 + i \operatorname{cotg} u). \tag{7}$$

Diese soeben eingeführten Größen b_μ, welche nach dem soeben Bemerkten einige der von uns eingeführten ultra-bernoullischen Zahlen von einfachen Faktoren abgesehen, als spezielle Fälle in sich schließen, sind dann ihrem wesentlichen Inhalt gleich den von Cesaro und andern eingeführten ultra-bernoullischen Zahlen und *mögen auch als solche bezeichnet werden.* Die Größe u nennen wir ihr Argument.

Zwischen den soeben eingeführten Größen und den gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen kann dann sofort ein Zusammenhang hergestellt werden.[1])

In der Tat, es ist:

$$\frac{1}{e^{y+v} - 1} = c e^{b(u) \cdot y} = \frac{e^{b \cdot (y+v)}}{y + v}$$

oder also:

$$c(y + v) e^{b(u) y} = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \frac{(y + v)^s}{s!}.$$

Durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von y ergeben sich die Gleichungen:

$$cv = \sum_0^\infty \frac{b_s \cdot v^s}{s!},$$

$$c + cvb_1(u) = \sum_1^\infty \frac{s_1 b_s v^{s-1}}{s!},$$

$$\vdots$$

$$\frac{cb_{\mu-1}(u)}{\mu - 1!} + \frac{cvb_\mu(u)}{\mu!} = \sum_\mu^\infty \frac{s_\mu b_s v^{s-\mu}}{s!}.$$

Wir multiplizieren die Gleichungen der Reihe nach mit $1, -v, \cdots \pm v^\mu$ und addieren, so folgt:

$$\frac{cv^{\mu+1} b_\mu(u)}{\mu!} = (-1)^\mu + \sum_{s=1}^\infty \frac{b_s v^s}{s!}(s_\mu - s_{\mu-1} \cdots \pm 1)$$

$$= (-1)^\mu + \sum \frac{b_s v^s}{s!} \frac{(s-1)(s-2) \cdots (s-\mu)}{\mu!}.$$

1) Siehe auch die citierte Arbeit von Cesaro.

Hieraus erhalten wir die gesuchte Beziehung in der Form:

$$(8) \qquad c b_\mu(u) = \frac{(-1)^\mu}{v^{\mu+1}} + \sum_{s=0}^{s=+\infty} \frac{b_{s+\mu+1} \cdot v^s}{s!\, s+\mu+1}. \quad -$$

Kehren wir nun zu unseren Betrachtungen zurück, multiplizieren in Gleichung (3) beide Seiten mit $e^{y+v} - 1$ und bezeichnen e^v kurz durch ε, so ergibt sich die Relation:

$$(9) \qquad \varepsilon(b+1)^\mu - b_\mu = 0$$

für $\mu \geqq 1$. Für den Fall $\mu = 0$ tritt die Gleichung (7) ein.

Führen wir Gleichung (9) aus und setzen noch der Einfachheit halber:

$$g = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon},$$

so ergibt sich der Lehrsatz:

Die Größen $b(u)$ leisten der Rekursionsformel Genüge:

$$g b_\mu + \mu_1 b_{\mu-1} + \cdots \mu_1 b_1 + 1 = 0,$$

aus welcher sie der Reihe nach bestimmt werden können.

Für die einfachsten Werte von μ ergiebt sich:

$$b_1 = -\frac{1}{g}, \qquad b_2 = \frac{2-g}{g^2}, \qquad b_3 = \frac{-g^2+6g-6}{g^3} \text{ etc.}$$

Wir können nun außer den soeben angegebenen Rekursionsformeln noch eine unendliche Fülle weiterer aufstellen. Es würde den Zweck dieser Betrachtungen überschreiten, wollten wir hierauf näher eingehen. Wir beschränken uns auf die folgende Bemerkung. Versteht man unter $F(x)$ irgend eine ganze Funktion von x, so wird stets die Beziehung stattfinden:

$$(10) \qquad c(\varepsilon F(b+1) - F(b)) = F(0).$$

Ist insbesondere $F(0) = 0$, d. h. besitzt die Funktion $F(x)$ kein konstantes Glied, so erhalten wir die Gleichung:

$$(11) \qquad \varepsilon F(b+1) - F(b) = 0.$$

Die angedeuteten Formeln haben die Eigenschaft, daß in ihnen die Größen b sowohl mit geradem, als auch mit ungeradem Index vorkommen, für $u = u_r$ stellen sie also Rekursionsformeln dar, in welchen sowohl die Größen σ als auch die Größen Σ vorkommen. Wollen wir Beziehungen zwischen den Größen σ allein und den Größen Σ allein erhalten, so müssen wir nach Rekursionsformeln suchen, in denen die Größen b entweder nur mit geradem, oder nur mit ungeradem Index vorkommen.

Wir betrachten dazu den Ausdruck:

$$\operatorname{cotg}(x+u) - \operatorname{cotg}(x-u) = 2i\left(\frac{1}{e^{y+v}-1} - \frac{1}{e^{y-v}-1}\right)$$

und setzen ähnlich wie vorhin:

$$\frac{1}{e^{y+v}-1} - \frac{1}{e^{y-v}-1} = c' \cdot e^{b'y}. \tag{12}$$

Im Falle über das Argument von c' und b' ein Zweifel herrscht, schreiben wir diese Größen:

$$c'(u) \text{ und } b'(u).$$

Setzen wir $y = 0$, so folgt:

$$c' = -i \operatorname{cotg} u$$

und ferner erhalten wir aus Gleichung (12) die Beziehung:

$$\varepsilon - \varepsilon^{-1} = c'\left((\varepsilon + \varepsilon^{-1})(b'+1)^{\mu} - b'_{\mu} - (b+2)^{\mu}\right),$$

die auch in der Form geschrieben werden kann:

$$2\sin^2 u b'_{\mu} + 2\sin^2 u \cdot \mu_1 \cdot b'_{\mu-1} + (2\sin^2 u + 1)\mu_2 \cdot b'_{\mu-2} + \cdots (2\sin^2 u + 2^{\mu-2} - 1)\mu_1 \cdot b'_1 + 2^{\mu-1} - 1 = 0.$$

Nun ist aber die vorgelegte Funktion eine gerade. Es verschwinden also die Größen b' mit ungeradem Index, so daß unsere Rekursionsformel in zwei zerfällt:

$$\begin{aligned} &2\sin^2 u b'_{2\mu} + (2\sin^2 u + 1)(2\mu)_2 b'_{2\mu-2} \\ &\quad + \cdots (2\sin^2 u + 2^{2\mu-3} - 1)(2\mu)_2 b'_2 + 2^{2\mu-1} - 1 = 0, \\ &2\sin^2 u (2\mu+1)_1 b'_{2\mu} + (2\sin^2 u + 3)(2\mu+1)_3 b'_{2\mu-2} \\ &\quad + \cdots (2\sin^2 u + 2^{2\mu-2} - 1)(2\mu+1)_2 b'_2 + 2^{2\mu} - 1 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Aus diesen Formeln können die Größen $b'_{2\mu}$ der Reihe nach berechnet werden und zwar folgt:

$$b'_2 = -\frac{1}{2\sin^2 u}, \qquad b'_4 = \frac{3 - \sin^2 u}{2\sin^4 u} \text{ etc.}$$

Zweitens betrachten wir den Ausdruck:

$$\operatorname{cotg}(x+u) + \operatorname{cotg}(x-u) = 2i\left(\frac{1}{e^{y+v}-1} + \frac{1}{e^{y-v}-1}\right)$$

und setzen ähnlich wie vorhin:

$$\frac{1}{e^{y+v}-1} + \frac{1}{e^{y-v}-1} = b'' \cdot e^{b'' \cdot y}, \tag{14}$$

so folgt zunächst:

$$c'' = -1,$$

wir erhalten ferner die Relation:

$$2\sin^2 u \cdot b_\mu'' + 2\sin^2 u \cdot \mu_1 \cdot b_{\mu-1}'' + (2\sin^2 u + 1)\mu_2 \cdot b_{\mu-2}'' + \cdots (2\sin^2 u + (2^{\mu-2} - 1))\mu_1 b_1'' + 2^{\mu-1} = 0.$$

Nun leistet aber die zu untersuchende Funktion der Funktionalgleichung Genüge:

$$f(-y) = -f(y) + 2.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Größen b'' mit geradem Index verschwinden müssen mit Ausnahme des constanten Gliedes. Wir erhalten unter solchen Umständen die zwei Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} &2\sin^2 u\, b_{2\mu+1}'' + (2\sin^2 u + 1)(2\mu+1)_2 b_{2\mu-1}'' \\ &\quad + \cdots (2\sin^2 u + 2^{2\mu-1} - 1)(2\mu+1)_1 b_1'' + 2^{2\mu} = 0. \\ &2\sin^2 u (2\mu+2)_1 b_{2\mu+1}'' + (2\sin^2 u + 3)(2\mu+2)_3 b_{2\mu-1}'' \\ &\quad + \cdots (2\sin^2 u + 2^{2\mu} - 1)(2\mu+2)_1 b_1'' + 2^{2\mu+1} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Aus diesen Gleichungen können die Größen b_{2m+1}'' der Reihe nach berechnet werden und zwar wird:

$$b_1'' = -\frac{1}{2\sin^2 u}, \quad b_3'' = \frac{3 - 2\sin^2 u}{4\sin^4 u},$$

$$b_5'' = \frac{-15 + 15\sin^2 u - 2\sin^4 u}{4\sin^6 u}, \text{ etc.}$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen b, b', b'' wird durch die Gleichungen vermittelt:

$$\begin{aligned} 2cb_\mu &= c'b_\mu' + c''b_\mu''. \\ 2cb_{2\mu} &= c'b_{2\mu}', \quad 2cb_{2\mu+1} = c''b_{2\mu+1}', \\ 2c &= c' + c''. \end{aligned} \tag{16}$$

Wir wollen im Anschluß hieran sogleich die Beziehungen hinzunehmen:

$$\begin{aligned} 2c(-u)b_{2\mu}(-u) &= -c'(u)b_{2\mu}'(u), \\ 2c(-u)b_{2\mu}(-u) &= c''(u)b_{2\mu+1}''(u). \end{aligned} \tag{17}$$

Jedenfalls können die aufgestellten Rekursionsformeln für die Größen $b_{2\mu}'$ und $b_{2\mu-1}''$ unmittelbar in solche für die Größen $\sigma_{2\mu+1}$ und $\Sigma_{2\mu}$ übertragen werden.

In ähnlicher Weise ist die Funktion $\operatorname{cosec} x$ zu untersuchen. Es findet die Beziehung statt:

$$\operatorname{cosec}(x+u) = \frac{2i}{e^{(x+u)i} - e^{-(x+u)i}}.$$

Setzen wir $xi = z$, $ui = w$, so kommt das Problem darauf hinaus, den Ausdruck:

$$\frac{1}{e^{z+w} - e^{-(z+w)}}$$

nach Potenzen von z zu entwickeln. Wir setzen symbolisch:

$$\frac{1}{e^{z+w} - e^{-(z+w)}} = c_1 \cdot e^{az}. \tag{18}$$

u ist dann das Argument von c_1 und der Größen a. Wo eine Unsicherheit in Bezug auf dasselbe stattfindet, schreiben wir an Stelle von c_1 und a resp.:

$$c_1(u) \text{ und } a(u).$$

Die soeben eingeführten Größen stehen in engem Zusammenhang mit den ultra-bernoullischen Zahlen s und S, denn es ist allgemein:

$$\frac{d^\mu \operatorname{cosec} u}{du^\mu} = 2i^{\mu+1} \cdot c_1 \cdot a_\mu \tag{19}$$

oder also für $u = u_r$

$$s^{(u_r)}_{2\mu+1} = 2\left(\frac{i\pi}{n}\right)^{2\mu+1} \frac{c_1}{2\mu!}\, a_{2\mu}(u_r), \tag{20}$$

$$S^{(u_r)}_{2\mu} = -2\left(\frac{i\pi}{n}\right)^{2\mu} \frac{c_1}{2\mu-1!}\, a_{2\mu-1}(u_r). \tag{21}$$

Die Größe c_1 ergiebt sich allgemein gleich:

$$c_1 = -\frac{i}{2} \operatorname{cosec} u. \tag{22}$$

Auch dicse Größen a können und wollen wir als ultra-bernoullische Zahlen bezeichnen.

Ähnlich wie bei den Größen $b(u)$ könnte eine Beziehung zwischen den Größen $a(u)$ und den Koeffizienten der Entwickelung der Funktion $\operatorname{cosec} x$ um den Nullpunkt herum hergestellt werden, indessen sehen wir von der Aufstellung derselben ab.

Aus der Gleichung (18) folgt nun:

$$\varepsilon_1(a+1)^\mu - \varepsilon_1^{-1}(a-1)^\mu = 0, \quad \mu \geqq 1, \; \varepsilon_1 = e^{ui}. \tag{23}$$

Für $\mu = 0$ wird:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1} = \frac{1}{c_1}.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Die Größen a leisten der Rekursionsformel Genüge:

$$i \sin u(a_\mu + \mu_2 a_{\mu+2} + \cdots) + \cos u(\mu_1 \cdot a_{\mu-1} + \mu_3 \cdot a_{\mu-3} + \cdots) = 0.$$

Aus derselben können die Größen a_μ der Reihe nach berechnet werden und zwar folgt:

$$a_1 = i \operatorname{cotg} u,$$

$$a_2 = \frac{-2 + \sin^2 u}{\sin^2 u},$$

$$a_3 = -i \operatorname{cotg} u \frac{6 - \sin^2 u}{\sin^2 u}.$$

. . . . . .

Auch in diesem Falle kann eine unendliche Anzahl von Rekursionsformeln aufgestellt werden. Wir beschränken uns auf die folgende Bemerkung.

Versteht man unter $F(x)$ irgend eine ganze Funktion, so findet die Beziehung statt:

$$c_1(\varepsilon_1 F(a+1) - \varepsilon_1^{-1} F(a-1)) = F(0). \tag{24}$$

Ist insbesondere $F(0) = 0$, d. h. ist das konstante Glied Null, so wird:

$$\varepsilon_1 F(a+1) - \varepsilon_1^{-1} F(a-1) = 0. \quad —$$

Um analog wie bei den Zahlen $b(u)$ zu Formeln zu gelangen, in denen entweder nur Größen mit geradem oder nur Größen mit ungeradem Index vorkommen, gehen wir folgendermaßen vor.

Wir betrachten zunächst den Ausdruck:

$$\operatorname{cosec}(x+u) - \operatorname{cosec}(x-u)$$

$$= 2i\left(\frac{1}{e^{z+w} - e^{-(z+w)}} - \frac{1}{e^{z-w} - e^{-(z-w)}}\right)$$

und setzen ähnlich wie früher:

$$\frac{1}{e^{z+w} - e^{-(z+w)}} - \frac{1}{e^{z-w} - e^{-(z-w)}} = c_1' \cdot e^{a' z}, \tag{25}$$

so ergibt sich zunächst:

$$c_1' = -i \operatorname{cosec} u. \tag{26}$$

Da die vorgelegte Funktion ferner eine gerade ist, müssen die Koeffizienten a' mit ungeradem Index verschwinden, während die übrigen einer Rekursionsformel Genüge leisten, die wir schreiben können:

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\sin^2 u \cdot a'_{2\mu} + (2\mu)_2\, 2\, a_{2\mu-2} + \cdots (2\mu)_2\, 2^{2\mu-3}\, a'_2 \\ &\quad + (2^{2\mu-1} - \sin^2 u) = 0.\end{aligned}$$

Zweitens haben wir die Funktion zu behandeln:

$$\operatorname{cosec}(x+u) + \operatorname{cosec}(x-u) = 2i\left(\frac{1}{e^{z+w} - e^{-(z+w)}} + \frac{1}{e^{z-w} - e^{-(z-w)}}\right)$$

und setzen dazu:

$$(28)\qquad \frac{1}{e^{z+w} - e^{-(z+w)}} + \frac{1}{e^{z-w} - e^{-(z-w)}} = z c''_1 \cdot e^{a'' z}.$$

Es folgt dann zunächst:

$$(29)\qquad c''_1 = \frac{\cos u}{\sin^2 u},$$

ferner müssen die Größen a'' mit ungeradem Index verschwinden, während die übrigen der Rekursionsformel Genüge leisten:

$$(30)\quad \sin^2 u \cdot a''_{2\mu} + (2\mu)_2\, 2\, a''_{2\mu-2} + \cdots \left(2^{2\mu-1} - \frac{\sin^2 u}{2\mu+1}\right) = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen a, a', a'' wird durch die Formeln vermittelt:

$$(31)\qquad 2 c_1 a_{2\mu} = c'_1 a'_{2\mu}, \qquad 2 c_1 a_{2\mu+1} = (2\mu+1) c''_1 a''_{2\mu},$$

mit denen wir zu gleicher Zeit die Beziehungen verbinden:

$$\begin{aligned}(32)\qquad 2 c_1(-u) a_{2\mu}(-u) &= -c'_1 a'_{2\mu}, \\ 2 c_1(-u) a_{2\mu+1}(-u) &= (2\mu+1) c''_1 a''_{2\mu}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die Rekursionsformeln für die Größen $a'_{2\mu}$ und $a''_{2\mu}$ unmittelbar in solche für die Größen s und S übertragen werden können.

§ 5.

Definition ultra-bernoullischer Funktionen. Entwickelung der wichtigsten Eigenschaften derselben.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen können dazu dienen, um gewisse ganze rationale Funktionen einzuführen, die

als ultra-bernoullische Funktionen angesehen werden können. Wir gehen dazu von der Gleichung aus:

$$1 = c(\varepsilon e^{(b+1)y} - e^{by}). \tag{1}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir rechts und links der Reihe nach mit:

$$1,\ e^{y} \cdots e^{(l-1)y}$$

und vergleichen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von y mit einander. Wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon c(b+1)^{\mu} - cb_{\mu}, \\ 1^{\mu} &= \varepsilon c(b+2)^{\mu} - c(b+1)^{\mu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (l-1)^{\mu} &= \varepsilon c(b+l)^{\mu} - c(b+l-1)^{\mu}. \end{aligned} \tag{2}$$

Alle diese Gleichungen stellen denn auch ihrerseits Rekursionsformeln zwischen den Größen b dar. Multiplizieren wir dieselben der Reihe nach mit $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \cdots \varepsilon^{l-1}$ und addieren, so erhalten wir:

$$\varepsilon \cdot 1^{\mu} + \varepsilon^2 \cdot 2^{\mu} + \cdots \varepsilon^{l-1} \cdot (l-1)^{\mu} = -cb_{\mu} + c\varepsilon^{l}(b+l)^{\mu}. \tag{3}$$

Wir kommen auf diesem Wege zu eigentümlichen Summen, mit sich u. a. schon CATALAN und CESARO von anderen Gesichtspunkten ausgehend beschäftigt haben. Bei den letzten Betrachtungen ist l als ganze Zahl anzusehen. Lassen wir diese Bedingung fallen, nehmen an, daß l eine beliebige veränderliche Größe sei, die wir dann durch z bezeichnen, so kommen wir zu einer neuen ganzen rationalen Funktion von z, nämlich der Funktion:

$$c(b+z)^{\mu},$$

die wir durch:

$$B_{\mu}(z, u)$$

bezeichnen und *eine ultra-bernoullische Funktion nennen wollen.* z sehen wir als ihr Argument, u als ihren Parameter an. Für dieselbe gilt dann der Lehrsatz:

Ist z eine ganze positive Zahl l, so ist die ultra-bernoullische Funktion $B_{\mu}(z, u)$ gleich:

$$\varepsilon^{-l}(\varepsilon \cdot 1^{\mu} + \varepsilon^2 \cdot 2^{\mu} + \cdots \varepsilon^{l-1} \cdot (l-1)^{\mu} + cb_{\mu}).$$

Einige weitere Eigenschaften können in einfacher Weise abgeleitet werden. Wir verweisen in bezug auf die Ableitung derselben auf die entsprechenden Theorien über die gewöhnlichen bernoullischen Funktionen, insbesondere auf die Arbeiten von

Schlömilch und eine Arbeit von Appell im 6. Bande der 3. Folge der Nouvelles Annales de Mathématiques aus dem Jahre 1887.

Wir betrachten zunächst den Ausdruck:

$$\frac{e^{z(y+v)}-1}{e^{y+v}-1} = ce^{by}(e^{z(y+v)}-1). \tag{4}$$

Derselbe kann geschrieben werden:

$$c(\varepsilon^z e^{(b+z)y} - e^{by}).$$

Differenzieren wir μ mal nach y und setzen y gleich Null, so erhalten wir den Lehrsatz:

Die Funktion:

$$c(\varepsilon^z(b+z)^\mu - b_\mu)$$

ist der μte Differentialquotient der Funktion:

$$\frac{e^{z(y+v)}-1}{e^{y+v}-1}$$

nach y im Punkte $y=0$.

Da ferner die Beziehung besteht:

$$cb_\mu = \frac{d^\mu}{dy^\mu}\left(\frac{1}{e^{y+v}-1}\right)_{y=0}, \tag{5}$$

so können wir uns auch folgendermaßen ausdrücken:

Die ultra-bernoullische Funktion $B_\mu(z,u)$ ist gleich dem Produkte der Funktion ε^{-z} und dem μten Differentialquotienten von:

$$\frac{e^{z(y+v)}}{e^{y+v}-1}$$

nach y im Punkte $y=0$.

Ferner ergibt sich der Lehrsatz:

Die Funktion $B_\mu(z,u)$ leistet der Funktionalgleichung Genüge:

$$\varepsilon B_\mu(z+1,\ u) = B_\mu(z,\ u) + z^\mu. \tag{6}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann entweder aus den Rekursionsformeln entnommen werden, die für die Größen b entwickelt worden sind oder aus der Darstellung der Größen $B_\mu(z,u)$ mit Hülfe eines μten Differentialquotienten.

Die letzte Gleichung zeigt, daß es genügt, die Werte unserer ultra-bernoullischen Funktion im Intervalle von 0 bis 1, die Grenze 1 ausgeschlossen, zu kennen, um sie für alle Werte von z berechnen zu können. Für den Wert $z=0$ ergibt sich:

$$B_\mu(0,\ u) = cb_\mu.$$

Ferner folgt der Lehrsatz:

Die ultra-bernoullische Funktion $B_\mu(z, u)$ leistet der Differentialbeziehung Genüge:

$$\frac{dB_\mu(z, u)}{dz} = \mu B_{\mu-1}(z, u). \tag{7}$$

Der Beweis dieses Satzes ist unmittelbar klar.

Ähnlich einfach folgt, daß eine jede ganze rationale Funktion von z nach steigenden Bernoullischen Funktionen entwickelt werden kann, deren Koeffizienten leicht berechnet werden können.

In der That, sei $G(z)$ eine ganze rationale Funktion von z vom Grade m, so setzen wir:

$$G(z) = g_0 + g_1 B_1(z, u) + \frac{g_2}{1 \cdot 2} B_2(z, u) + \cdots \frac{g_m}{m!} B_m(z, u). \tag{8}$$

Nun leistet die Funktion $B_\mu(z, u)$ der Gleichung Genüge:

$$\varepsilon B_\mu(z + 1, u) = B_\mu(z, u) + z^\mu.$$

Hieraus folgt:

$$\varepsilon G(z + 1) - G(z) = (\varepsilon - 1)g_0 + g_1 z + \frac{g_2}{1 \cdot 2} z^2 + \cdots \frac{g_m}{m!} z^m.$$

Andrerseits ist:

$$G(z) = G(0) + G'(0)z + \cdots \frac{G^m(0)}{m!} z^m,$$

$$G(z + 1) = G(1) + G'(1)z + \cdots \frac{G^m(1)}{m!} z^m,$$

also folgt:

$$g_\mu = \varepsilon G^\mu(1) - G^\mu(0),$$

so daß die Koeffizienten hiermit bestimmt sind und zwar braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß umgekehrt die Funktion:

$$\sum_0^m \frac{g_\mu}{\mu!} B_\mu(z, u)$$

gleich $G(z)$ ist. Wir finden somit den Lehrsatz:

Eine jede ganze rationale Funktion mten Grades $G(z)$ kann nach steigenden ultra-bernoullischen Funktionen entwickelt werden und zwar ist:

$$G(z) = \sum_0^m \frac{\varepsilon G^\mu(1) - G^\mu(0)}{\mu!} B_\mu(z, u). \tag{9}$$

Es kann dieser Lehrsatz innerhalb gewisser Grenzen auch auf beliebige Funktionen übertragen werden, indessen würde es

den Rahmen dieser Betrachtungen überschreiten, darauf näher einzugehen.

In der Theorie der gewöhnlichen Bernoullischen Funktionen pflegt nun das Intervall, innerhalb dessen die Funktion bestimmt sein muß, auf das Intervall von 0 bis $\frac{1}{2}$ eingeschränkt zu werden. Es ist das in dem von uns betrachteten Falle nicht ohne weiteres möglich, indessen existieren doch auch hier gewisse Analogien.

Wir wollen zu dem Behufe den Wert unserer Funktion im Punkte $z = \frac{1}{2}$ zu bestimmen versuchen.

Es ist für $z = \frac{1}{2}$:

$$\frac{d^\mu}{dy^\mu}\frac{e^{\frac{1}{2}(y+v)}-1}{e^{y+v}-1} = \frac{d^\mu}{dy^\mu}\left(\frac{1}{e^{\frac{y+v}{2}}-1} - \frac{2}{e^{y+v}-1}\right)$$

oder also gleich:

$$\frac{1}{2^\mu}c\left(\frac{u}{2}\right)b_\mu\left(\frac{u}{2}\right) - 2cb_\mu .$$

Hieraus folgt:

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} B_\mu\left(\tfrac{1}{2}, u\right) = \frac{1}{2^\mu}c\left(\frac{u}{2}\right)b_\mu\left(\frac{u}{2}\right) - cb_\mu , \tag{10}$$

so daß der Wert unserer ultra-bernoullischen Funktion im Punkte $\frac{1}{2}$ damit bestimmt ist. Wir untersuchen jetzt die Bernoullische Funktion für das Argument $1 - z$ und nehmen dazu zunächst den Ausdruck:

$$c(\varepsilon^{1-z}(b+1-\varepsilon)^\mu - b_\mu).$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem μten Differentialquotienten der Funktion:

$$\frac{e^{(1-z)(y+v)}-1}{e^{y+v}-1}$$

nach y im Punkte $y = 0$. Wir können diese Funktion auch schreiben:

$$1 - \frac{e^{-z(y+v)}-1}{e^{-(y+v)}-1},$$

so daß der μte Differentialquotient gleich dem negativen μten Differentialquotienten des Ausdrucks wird:

$$\frac{e^{-z(y+v)}-1}{e^{-(y+v)}-1}$$

und zwar für $y = 0$. Diesen Differentialquotienten können wir auch schreiben:

$$(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}}{dy^{\mu}}\frac{e^{z(y-v)}-1}{e^{y-v}-1}$$

für $y = 0$. Hieraus ergibt sich ohne Mühe die Beziehung:

$$(11) \qquad \varepsilon B_{\mu}(1-z,u) = (-1)^{\mu-1}B_{\mu}(z,-u).$$

Diese Gleichung zeigt, daß die B-Funktion mit dem Argument $1-z$ zwar nicht mehr durch dieselbe B-Funktion mit dem Argumente z dargestellt werden kann, wohl aber durch die B-Funktion mit dem Argumente z und dem Parameter $-u$.

Hierdurch werden wir zu einem Vergleich der Funktionen mit den Parametern u und $-u$ geführt und kommen zu den folgenden Betrachtungen.

Wenn unter l eine positive ganze Zahl verstanden wird, fanden wir die Relation:

$$\varepsilon \cdot 1^{\mu} + \varepsilon^{2} \cdot 2^{\mu} + \cdots \varepsilon^{l-1}(l-1)^{\mu} = -cb_{\mu} + \varepsilon^{l}B_{\mu}(l,u).$$

Genau so wird:

$$\varepsilon^{-1} \cdot 1^{\mu} + \varepsilon^{-2} \cdot 2^{\mu} + \cdots \varepsilon^{-(l-1)}(l-1)^{\mu}$$
$$= -c(-u)b_{\mu}(-u) + \varepsilon^{-l}B_{\mu}(l,-u).$$

Erwägen wir noch die Beziehung:

$$\varepsilon = e^{2ui},$$

so folgt für die Summe:

$$2i(\sin 2u \cdot 1^{\mu} + \sin 4u \cdot 2^{\mu} + \cdots \sin 2(l-1)u \cdot (l-1)^{\mu})$$

der Wert:

$$-(cb_{\mu} - c(-u)b_{\mu}(-u)) + \cos 2lu(B_{\mu}(l,u) - B_{\mu}(l,-u))$$
$$+ i \sin 2lu(B_{\mu}(l,u) + B_{\mu}(l,-u)),$$

ferner für die Summe:

$$2(\cos 2u \cdot 1^{\mu} + \cos 4u \cdot 2^{\mu} + \cdots \cos 2(l-1)u \cdot (l-1)^{\mu})$$

der Wert:

$$-(cb_{\mu} + c(-u)b_{\mu}(-u)) + \cos 2lu(B_{\mu}(l,u) + B_{\mu}(l,-u))$$
$$+ i \sin 2lu(B_{\mu}(l,u) - B_{\mu}(l,-u)).$$

Wir setzen nun allgemein:

$$(12) \qquad B_{\mu}(z,u) - B_{\mu}(z,-u) = B'_{\mu}(z,u),$$

$$(13) \qquad B_{\mu}(z,u) + B_{\mu}(z,-u) = B''_{\mu}(z,u),$$

so erhalten wir zwei neue ganze Funktionen, die *auch als ultra-bernoullische Funktionen bezeichnet werden können.* Das Bildungsgesetz derselben folgt leicht.

In der Tat, wir fanden die Beziehungen:

$$2c \cdot b_{2\mu} = -2c(-u)b_{2\mu}(-u) = c' \cdot b'_{2\mu},$$
$$2c \cdot b_{2\mu+1} = 2c(-u)b_{2\mu+1}(-u) = c'' \cdot b''_{2\mu+1}.$$

Hieraus ergeben sich die Darstellungen:

$$(14)\; B'_{2\mu}(z,u) = c'(b'_{2\mu} + (2\mu)_2 b'_{2\mu-2} z^2 + (2\mu)_4 b'_{2\mu-4} z^4 + \cdots),$$
$$(15)\; B'_{2\mu+1}(z,u) = c'((2\mu+1)_1 b'_{2\mu} z + (2\mu+1)_3 b'_{2\mu-2} \cdot z^3 + \cdots),$$
$$(16)\; B''_{2\mu}(z,u) = c''((2\mu)_1 b''_{2\mu-1} z + (2\mu)_3 b''_{2\mu-3} z^3 + \cdots + z^{2\mu}),$$
$$(17)\; B''_{2\mu+1}(z,u) = c''(b''_{2\mu+1} + (2\mu+1)_2 b''_{2\mu-1} z^2 + \cdots z^{2\mu+1}).$$

In den Formeln 16 und 17 nehmen die letzten Glieder auf der rechten Seite eine besondere Stellung ein.

Diese neuen ganzen Funktionen stehen zu den Funktionen:

$$\operatorname{cotg}(z+u) - \operatorname{cotg}(z-u)$$

und

$$\operatorname{cotg}(z+u) + \operatorname{cotg}(z-u)$$

in einem ähnlichen Verhältnis wie die Funktionen $B(z,u)$ und $B(z,-u)$ zu den Funktionen

$$\operatorname{cotg}(z+u) \text{ und } \operatorname{cotg}(z-u).$$

Ihre Eigenschaften ergeben sich aus den Definitionsgleichungen als unmittelbare Folge der Eigenschaften der Funktionen $B_\mu(z,u)$ und umgekehrt. Unter solchen Umständen begnügen wir uns damit, die folgenden Resultate herauszugreifen.

Versteht man unter l eine beliebige positive ganze Zahl, so finden die Beziehungen statt (18):

$$2i(\sin 2u \cdot 1^{2\mu+1} + \sin 4u \cdot 2^{2\mu+1} + \cdots \sin 2(l-1)u \cdot (l-1)^{2\mu+1})$$
$$= \cos 2lu \cdot B'_{2\mu+1}(l,u) + i \sin 2lu \cdot B''_{2\mu+1}(l,u),$$
$$2i(\sin 2u \cdot 1^{2\mu} + \sin 4u \cdot 2^{2\mu} + \cdots \sin 2(l-1)u(l-1)^{2\mu})$$
$$= -c' b'_{2\mu} + \cos 2lu B'_{2\mu}(l,u) + i \sin 2lu \cdot B''_{2\mu}(l,u),$$
$$2(\cos 2u \cdot 1^{2\mu+1} + \cos 4u \cdot 2^{2\mu+1} + \cdots \cos 2(l-1)u(l-1)^{2\mu+1})$$
$$= -c'' b''_{2\mu+1} + \cos 2lu B''_{2\mu+1}(l,u) + i \sin 2lu \cdot B'_{2\mu+1}(l,u),$$
$$2(\cos 2u \cdot 1^{2\mu} + \cos 4u \cdot 2^{2\mu} + \cdots \cos 2(l-1)u(l-1)^{2\mu})$$
$$= \cos 2lu B''_{2\mu}(l,u) + i \sin 2lu \cdot B'_{2\mu}(l,u).$$

In ähnlicher Weise gibt die Entwickelung der Cosecansfunktion Anlaß zur Bildung neuer ultra-bernoullischer Funktionen.

Aus Gleichung (18) des vorigen Paragraphen folgt, wenn noch an Stelle von $z:y$ gesetzt wird:

$$\frac{e^{y+w}}{e^{2(y+w)}-1} = c_1 e^{ay},$$

oder also wir erhalten die Beziehung:

$$\varepsilon_1 e^{y} = c_1(\varepsilon_1^2 \cdot e^{(a+2)y} - e^{ay}).$$

Wir multiplizieren diese Gleichung der Reihe nach mit:

$$1,\ e^{2y},\ \ldots e^{2(l-1)y}$$

und vergleichen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von y, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \cdot 1^{\mu} &= c_1(\varepsilon_1^2(a+2)^{\mu} - a_{\mu}),\\
\varepsilon_1 \cdot 3^{\mu} &= c_1(\varepsilon_1^2(a+4)^{\mu} - (a+2)^{\mu}),\\
&\cdots\\
\varepsilon_1(2l-1)^{\mu} &= c_1(\varepsilon_1^2(a+2l)^{\mu} - (a+2l-2)^{\mu}).
\end{aligned}$$

Alle diese Gleichungen stellen dann auch ihrerseits Rekursionsformeln zwischen den Größen a dar. Multiplizieren wir dieselben der Reihe nach mit:

$$1,\ \varepsilon_1^2,\ \varepsilon_1^4,\ \ldots \varepsilon_1^{2(l-1)}$$

und addieren die rechten und die linken Seiten, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(19)\qquad &\varepsilon_1 \cdot 1^{\mu} + \varepsilon_1^3 \cdot 3^{\mu} + \cdots \varepsilon_1^{2l-1}(2l-1)^{\mu}\\
&= -c_1 \cdot a_{\mu} + c_1 \cdot \varepsilon_1^{2l}(a+2l)^{\mu}.
\end{aligned}$$

Wir kommen auf diesem Wege zu einer neuen Kategorie eigentümlich gebildeter Summen. l ist hierbei als positive ganze Zahl vorausgesetzt. Lassen wir diese Bedingung fallen, nehmen wir l als beliebige Größe an und bezeichnen sie als solche durch z, so kommen wir zu einer neuen ganzen rationalen Funktion:

$$c_1(a+2l)^{\mu},$$

die wir durch:

$$A_{\mu}(z, u)$$

bezeichnen und *auch als ultra-bernoullische Funktion bezeichnen wollen.*

Für dieselbe gilt alsdann der Lehrsatz:

Ist z eine positive ganze Zahl l, so ist die ultra-bernoullische Funktion $A_\mu(z, u)$ gleich:

$$\varepsilon_1^{-2l}(\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + \varepsilon_1^3 \cdot 3^\mu + \cdots \varepsilon_1^{2l-1} \cdot (2l-1) + c_1 \cdot a_\mu).$$

Die neue Funktion besitzt dann ganz ähnliche Eigenschaften wie die Funktion $B_\mu(z, u)$.

Wir beschränken uns darauf, sie mit den Differentialquotienten gewisser einfacher Funktionen in Verbindung zu setzen und mit ihrer Hülfe einige weitere ultra-bernoullische Funktionen zu definieren.

Wir betrachten dazu den Ausdruck:

$$\frac{e^{2z(y+w)} - 1}{e^{y+w} - e^{-(y+w)}} = c_1(e^{2z(y+w)} - 1)e^{ay} = c_1(\varepsilon_1^{2z} e^{(a+2z)y} - e^{ay}).$$

Differenzieren wir μ mal nach y und setzen y gleich Null, so erhalten wir den Lehrsatz:

Die Funktion:

$$c_1(\varepsilon_1^{2z}(a+2z)^\mu - a_\mu)$$

ist der μte Differentialquotient der Funktion:

$$\frac{e^{2z(y+w)} - 1}{e^{y+w} - e^{-(y+w)}}$$

nach y im Punkte $y = 0$.

Nun ist ferner:

$$c_1 a_\mu = \frac{d^\mu}{dy^\mu}\left(\frac{1}{e^{y+w} - e^{-(y+w)}}\right)_{y=0},$$

so daß wir den folgenden Lehrsatz erhalten:

Die ultra-bernoullische Funktion:

$$A_\mu(z, u)$$

ist gleich ε_1^{-2z} multipliziert mit dem μten Differentialquotienten von:

$$\frac{e^{2z(y+w)}}{e^{y+w} - e^{-(y+w)}}$$

nach y im Punkte $y = 0$.

Mit der Theorie dieser Funktion ist dann aufs engste die Theorie einiger weiterer Funktionen verbunden, die wir durch die Gleichungen definieren:

$$(26) \qquad A_\mu(z, u) - A_\mu(z, -u) = A'_\mu(z, u)$$

$$(27) \qquad A_\mu(z, u) + A_\mu(z, -u) = A_\mu'(z, u)$$

Erwägen wir die Beziehungen:

$$2c_1 a_{2\mu+1} = \quad c_1(-u)a_{2\mu+1}(-u) = (2\mu+1)c_1'' \cdot a_{2\mu}'',$$

$$2c_1 a_{2\mu} \quad = -c_1(-u)a_{2\mu} \quad (-u) = c_1' \cdot a_{2\mu}',$$

so folgen die Darstellungen:

$$(22)A_{2\mu}' \quad (z,u) = c_1'(a_{2\mu}' + (2\mu)_2 a_{2\mu-2}'(2z)^2 + \cdots\cdots),$$

$$(23)A_{2\mu}'' \quad (z,u) = c_1''(2(2\mu)_2 a_{2\mu-2}''(2z) + 4(2\mu)_4 a_{2\mu-4}''(2z)^3 + \cdots),$$

$$(24)A_{2\mu+1}'(z,u) = c_1'((2\mu+1)_1 a_{2\mu}'(2z) + (2\mu+1)_3 a_{2\mu-2}'(2z)^3 + \cdots),$$

$$(25)A_{2\mu+1}''(z,u) = c_1''(1(2\mu+1)_1 a_{2\mu}'' + 3(2\mu+1)_3 a_{2\mu-2}''(2z)^2 + \cdots).$$

Diese neuen ganzen rationalen Funktionen stehen dann zu den Funktionen:

$$\operatorname{cosec}(z+u) - \operatorname{cosec}(z-u)$$

und

$$\operatorname{cosec}(z+u) + \operatorname{cosec}(z-u)$$

in einem ähnlichen Verhältnis wie die Funktionen $A_\mu(z,u)$ und $A_\mu(z,-u)$ zu den Funktionen $\operatorname{cosec}(z+u)$ und $\operatorname{cosec}(z-u)$ und *sollen auch mit dem Namen von ultra-bernoullischen Funktionen bezeichnet werden.* Von der Entwickelung ihrer Eigenschaften sehen wir füglich ab und wollen lediglich mit ihrer Hülfe die folgenden Reihensummierungen vornehmen (26):

$$2i(\sin u \cdot 1^{2\mu+1} + \sin 3u \cdot 3^{2\mu+1} + \cdots \sin(2l-1)u\,(2l-1)^{2\mu+1}) = \cos 2lu A_{2\mu+1}'(l,u) + i\sin 2lu \cdot A_{2\mu+1}''(l,u),$$

$$2i(\sin u \cdot 1^{2\mu} + \sin 3u \cdot 3^{2\mu} + \cdots \sin(2l-1)u \cdot (2l-1)^{2\mu}) = -c_1' \cdot a_{2\mu}' + \cos 2lu A_{2\mu}'(l,u) + i\sin 2lu \cdot A_{2\mu}''(l,u),$$

$$2(\cos u \cdot 1^{2\mu+1} + \cos 3u \cdot 3^{2\mu+1} + \cdots \cos(2l-1)u \cdot (2l-1)^{2\mu+1}) = -c_1'' \cdot a_{2\mu}''(2\mu+1) + \cos 2lu \cdot A_{2\mu+1}''(l,u) + i\sin 2lu \cdot A_{2\mu+1}'(l,u),$$

$$2(\cos u \cdot 1^{2\mu} + \cos 3u \cdot 3^{2\mu} + \cdots \cos(2l-1)u \,.\, (2l-1)^{2\mu}) = \cos 2lu \cdot A_{2\mu}''(l,u) + i\sin 2lu \cdot A_{2\mu}'(l,u).$$

§ 6.

Erste independente Darstellung der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen.

Die gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen und Funktionen sind in einer ganzen Reihe von Arbeiten mit Hülfe von Determinanten independent dargestellt worden. Wir wollen hier nur auf das

Lehrbuch von Pascal über Determinanten, sowie auf je eine Arbeit von Haussner[1]) und Duporcq[2]) verweisen. Solche Determinantendarstellungen von Bernoullischen Zahlen können in großer Anzahl gegeben werden, da die sämtlichen Rekursionsformeln im allgemeinen zu ihnen führen werden. Für die ultra-bernoullischen Zahlen wird etwas Ähnliches gelten müssen. Wir beschränken uns darauf, die nächstliegendsten und einfachsten Darstellungen zu geben. Die Grundlage der Determinantendarstellungen für die Bernoullischen Zahlen kann eine bekannte Formel der Differentialrechnung geben.

Setzt man:

$$W = \frac{U}{V},$$

und bezeichnet durch U_ν die Grösse $\frac{U^{(\nu)}}{\nu!}$, durch V_ν und W_ν die entsprechenden Ausdrücke für die Functionen V und W, so gilt bekanntlich die Darstellung:

$$(1) \qquad W_\mu = \frac{1}{V_0^{\mu+1}} \begin{vmatrix} V_0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & U_0 \\ V_1, & V_0, & 0, \ldots, & 0, & U_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ V_\mu, & V_{\mu-1}, & \ldots, & V_1, & U_\mu \end{vmatrix}$$

Wir nehmen nun die Funktion:

$$\frac{1}{e^{y+v}-1} = c \cdot e^{by},$$

so wird:

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 0, \ldots, \quad U_\mu = 0,$$

$$V_0 = \varepsilon - 1, \quad V_1 = \varepsilon, \ldots, \quad V_\mu = \frac{\varepsilon}{\mu!} \quad \text{für} \quad y = 0.$$

Hieraus ergibt sich die Darstellung:

$$(2) \qquad \frac{(-1)^\mu b_\mu \cdot g^\mu}{\mu!} = \begin{vmatrix} 1 & g & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\mu!} & \frac{1}{\mu-1!} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{1 \cdot 2} & 1 \end{vmatrix}$$

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band 39.

2) Nouvelles Annales de Mathématiques 2. Folge. Band 9. 1890.

Diese Determinantendarstellung hätte auch aus einer der Rekursionsformeln der Größen b hergeleitet werden können und umgekehrt kann aus ihr eine Rekursionsformel abgeleitet werden. Statt der reziproken Fakultäten können auch die Binomialkoeffizienten eingeführt werden, mit deren Hülfe sich die Darstellung ergibt:

$$(3) \qquad (-1)^{\mu} b_{\mu} \cdot g^{\mu} = \begin{vmatrix} 1_0 & g & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2_0 & 2_1 & g & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \mu_1 \end{vmatrix}.$$

Wir nehmen zweitens die Funktion:

$$\frac{1}{e^{s+w} - e^{-(s+w)}} = c_1 \cdot e^{az}.$$

Für dieselbe wird:

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 0, \dots, \quad U_{\mu} = 0,$$
$$V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1}, \quad V_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1}, \dots.$$

In Folge dessen ergeben sich die Darstellungen (4):

$$\frac{a_{2\mu}}{2\mu!} = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & g_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2\mu!} & \frac{g_1}{2\mu-1!} & \cdots & \cdots & \cdots & g_1 \end{vmatrix}$$

und:

$$-\frac{a_{2\mu+1}}{2\mu+1!} = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & g_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{g_1}{2\mu+1!} & \frac{1}{2\mu!} & \cdots & \cdots & \cdots & g_1 \end{vmatrix}.$$

In diesen Formeln ist gesetzt worden:

$$(5) \qquad g_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1}}.$$

Auch hier können die Binomialkoeffizienten eingeführt werden. Mit ihrer Hülfe erhalten wir die Darstellungen (6):

$$a_{2\mu} = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2g_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (2\mu)_1 g_1 & (2\mu)_2 & & \dots & (2\mu)_1 g_1 \end{vmatrix}$$

$$-a_{2\mu+1} = \begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2g_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1 & (2\mu+1)_1 & \dots\dots\dots & & & (2\mu+1)_1 g_1 \end{vmatrix}.$$

Auch diese Formeln hätten aus einer Rekursionsformel der Größen a hergeleitet werden können und geben umgekehrt Anlaß zur Aufstellung einer solchen.

Von weiteren Determinantendarstellungen soll abgesehen, wohl aber gezeigt werden, daß auch die ultra-bernoullischen Funktionen $B_\mu(z, u)$ und $A_\mu(z, u)$ in der Form von Determinanten dargestellt werden können.

Wir legen den hierauf bezüglichen Betrachtungen die Determinante zu Grunde:

$$(7)\quad D(z) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & \varepsilon & \varepsilon - 1 & 0 & \dots & 0 \\ z^2 & \varepsilon & 2\varepsilon & \varepsilon - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{\mu-1} & \varepsilon & (\mu-1)_1 \varepsilon & (\mu-1)_2 \varepsilon & \dots & \varepsilon - 1 \\ z^\mu & \varepsilon & \mu_1 \varepsilon & \mu_2 \varepsilon & \dots & \mu_1 \varepsilon \end{vmatrix}.$$

Mit dieser Determinante nehmen wir der Reihe nach die folgenden Operationen vor: wir multiplizieren die 2te, 3te ... $(\mu+1)^{te}$ Vertikalreihe nach einander mit:

$$1,\ z,\ z^2,\ \dots,\ z^{\mu-1}$$

und addieren sie zu der ersten. Dann folgt für $D(z)$ die Beziehung:

$$D(z) = \varepsilon \cdot D(z+1) - (-1)^\mu (\varepsilon - 1)^{\mu+1} z^\mu.$$

Setzen wir daher:

$$(8)\qquad f(z) = \frac{(-1)^\mu D(z)}{(\varepsilon - 1)^{\mu+1}},$$

so leistet $f(z)$ der Funktionalgleichung Genüge:

$$\varepsilon f(z+1) = f(z) + z^\mu$$

d. h. derselben, wie die Bernoullische Funktion $B_\mu(z, u)$.

Hieraus ist leicht zu schließen, daß $f(z)$ nichts anderes als die ultra-bernoullische Funktion $B_\mu(z, u)$ selbst ist, oder also wir erhalten den Lehrsatz:

Die ultra-bernoullische Funktion $c(b+z)^\mu$ *kann independent in der Form dargestellt werden:*

$$\frac{(-1^\mu D(z)}{(z-1)^{\mu+1}},$$

wobei $D(z)$ *die vorher angegebene Determinante bedeutet.*

In ähnlicher Weise kann die Funktion:

$$c_1(a+z)^\mu$$

durch Determinanten dargestellt werden. Wir betrachten dazu die Größe:

$$(9)\quad D_1(z) = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1' & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z & \varepsilon_1'' & \varepsilon_1' & 0 & \dots & 0 \\ z^2 & \varepsilon_1' & 2\varepsilon_1'' & \varepsilon_1' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{2\mu} & \varepsilon_1' & (2\mu)_1\,\varepsilon_1'' & \dots\dots & & (2\mu)_1\,\varepsilon_1'' \end{vmatrix},$$

und untersuchen den Ausdruck:

$$\varepsilon_1 D_1(z+1).$$

In dieser Determinante wollen wir die 2te, $3^{te}\dots(2\mu+1)^{te}$ Vertikalreihe der Reihe nach multiplizeiren mit $1, z, z^2, \dots, z^{2\mu-1}$ und von der ersten subtrahieren, so folgt:

$$\varepsilon_1 D_1(z+1) = \varepsilon_1^{-1} D_1(z-1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1})^{2\mu+1} z^{2\mu}.$$

Setzen wir also:

$$(10)\qquad f(z) = \frac{D_1(z)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1})^{2\mu+1}},$$

so leistet $f_1(z)$ derselben Gleichung Genüge, wie die Funktion:

$$c_1(a+z)^{2\mu}$$

und wir erhalten den Lehrsatz:

Die ultra-bernoullische Funktion:

$$c_1(a+z)^{2\mu}$$

kann independent in die Form gebracht werden:

$$\frac{D_1(z)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1})^{2\mu+1}},$$

wobei unter $D_1(z)$ die unter (9) *angegebene Determinante zu verstehen ist.*

Ganz analog folgt der Lehrsatz:

Die ultra-bernoullische Funktion:

$$c_1 (a + z)^{2\mu+1}$$

kann in der Form geschrieben werden:

$$- \frac{D_2(z)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1})^{2\mu+2}},$$

wobei unter $D_2(z)$ die Determinante zu verstehen ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1' & 0 & \dots & 0 \\ z & \varepsilon_1'' & \varepsilon_1' & \dots & 0 \\ z^2 & \varepsilon_1' & 2\,\varepsilon_1'' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{2\mu+1} & \varepsilon_1'' & (2\mu+1)_1\,\varepsilon_1' & \dots & (2\mu+1)\,\varepsilon_1'' \end{vmatrix}.$$

Dabei sind unter ε_1' und ε_1'' in den beiden Determinanten $D_1(z)$ und $D_2(z)$ die Ausdrücke zu verstehen:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - \varepsilon_1^{-1}$$
$$\varepsilon_1'' = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1}.$$

§ 7.

Zweite independente Darstellung der ultra-bernoullischen Zahlen.

Es kann nun mit Hülfe der ultra-bernoullischen Funktionen eine zweite independente Darstellung der Größen b gegeben werden und zwar vermöge einer Methode, die analog der KRONECKERschen Methode für die independente Darstellung der gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen ist.[1])

Wir gehen dazu von der früher gefundenen Gleichung aus:

(1) $$\varepsilon \cdot 1^\mu + \varepsilon^2 \cdot 2^\mu + \cdots \varepsilon^{l-1}(l-1)^\mu = -cb_\mu + c\varepsilon^l (b+l)^\mu.$$

Aus derselben folgt, daß die ganze Funktion $(b+l)^\mu$ in der Form geschrieben werden kann:

$$(\varepsilon \cdot 1^\mu + \varepsilon^2 2^\mu + \cdots \varepsilon^{l-1}(l-1)^\mu + cb_\mu) : c\varepsilon^l.$$

---

1) Journal für Mathematik. Band 94, 1883. Siehe auch das citierte Werk von SAALSCHÜTZ pag. 101 und die citierte Arbeit von CESARO, sowie SCHERK. CRELLE Band 4, pag. 299 und WORPITZKY CRELLE Band 94, pag. 203

Andererseits kann man eine jede ganze Funktion vom Grade μ nach dem LAGRANGEschen Interpolationsverfahren bilden, wenn man etwa die Werte derselben für:

$$l = 0, 1, \ldots, \mu$$

kennt. Für diese Werte wird

$$(b + l)^\mu = f(l)$$

resp. die Werte annehmen:

$$f(0) = u_0 = b_\mu,$$
$$f(1) = u_1 = b_\mu : \varepsilon,$$
$$f(2) = u_2 = (\varepsilon \cdot 1^\mu + c b_\mu) : c \cdot \varepsilon^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(\mu) = u_\mu = (\varepsilon \cdot 1^\mu + \cdots \varepsilon^{\mu-1}(\mu-1)^\mu + c b_\mu) : c \cdot \varepsilon^\mu.$$

Dann wird nach der Interpolationsformel geschrieben werden können:

$$f(l) = (-1)^\mu \Big(\frac{(l-1)(l-2)\ldots,(l-\mu)}{\mu!}\, u_0 - \frac{l(l-2)\ldots(l-\mu)}{1!\,\mu-1!}\, u_1 \ldots (-1)^\mu \frac{l(l-1)\ldots(l-\mu+1)}{\mu!}\, u_\mu \Big).$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der höchsten Potenz von l, so erhalten wir:

$$(-1)^\mu = \frac{u_0}{\mu!} - \frac{u_1}{1!\,(\mu-1)!} + \frac{u_2}{2!\,(\mu-2)!} \cdots \frac{(-1)^\mu u_\mu}{\mu!}.$$

Aus dieser Formel ergibt sich unmittelbar die gesuchte Darstellung. In der Tat, ersetzen wir auf der rechten Seite die Größen u durch die vorhin angegebenen Ausdrücke, so erhalten wir erstens eine Reihe von Gliedern, die mit b_μ multipliziert sind. Dieselben können wir schreiben:

$$\frac{1}{\mu!} - \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{\mu-1!} + \frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{2!}\,\frac{1}{\mu-2!} \cdots$$

oder auch:

$$\frac{1}{\mu!}\Big(1 - \frac{1}{\varepsilon}\Big)^\mu = \frac{1}{\mu!}\, g^\mu.$$

Hieraus ergibt sich ohne Mühe die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{c \cdot b_\mu \cdot g^\mu}{\mu!} = -\frac{1^\mu}{\varepsilon}\,\frac{1}{2!\,\mu-2!} + \Big(\frac{1^\mu}{\varepsilon^2} + \frac{2^\mu}{\varepsilon}\Big)\,\frac{1}{3!\,(\mu-3)!} + \cdots (-1)^{\mu-1}\Big(\frac{1^\mu}{\varepsilon^{\mu-1}} + \frac{2^\mu}{\varepsilon^{\mu-2}} + \cdots \frac{(\mu-1)^\mu}{\varepsilon}\Big)\,\frac{1}{\mu!} + (-1)^\mu c,$$

die wir auch schreiben können:

$$(3)\quad cb_\mu(\varepsilon-1)^\mu = -\varepsilon\cdot 1^\mu\mu_2\varepsilon^{\mu-2} + (\varepsilon\cdot 1^\mu + \varepsilon^2\cdot 2^\mu)\mu_3\varepsilon^{\mu-3} + \cdots (-1)^{\mu-1}(\varepsilon\cdot 1^\mu + \varepsilon^2\cdot 2^\mu + \cdots \varepsilon^{\mu-1}(\mu-1)^\mu) + (-1)^\mu c\cdot\varepsilon^\mu\cdot\mu!$$

In dieser Formel ist gesetzt worden:

$$\varepsilon = \cos 2u + i\sin 2u,\quad c = -\tfrac{1}{2}(1 + i\operatorname{cotg} u).$$

Hiermit haben wir eine zweite independente Darstellung der Größen b_μ erhalten, die wir unmittelbar in eine solche für den μ^{ten} Differentialquotienten der Cotangente umwandeln können, denn es ist:

$$cb_\mu = \left(\frac{1}{2i}\right)^{\mu+1}\frac{d^\mu\operatorname{cotg} u}{du^\mu}.$$

Wir erhalten somit die Beziehung (4):

$$\frac{(\varepsilon-1)^\mu}{(2i)^{\mu+1}}\frac{d^\mu\operatorname{cotg} u}{du^\mu} = -\varepsilon\cdot 1^\mu\mu_2\cdot\varepsilon^{\mu-2} + (\varepsilon\cdot 1^\mu + \varepsilon^2\cdot 2^\mu)\mu_3\varepsilon^{\mu-3} + \cdots + (-1)^{\mu-1}(\varepsilon\cdot 1^\mu + \cdots + \varepsilon^{\mu-1}(\mu-1)^\mu) + (-1)^\mu c\cdot\varepsilon^\mu\cdot\mu!$$

Nun ist:

$$(\varepsilon-1)^\mu = \varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)^\mu = (2i)^\mu\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\sin\mu u.$$

Nehmen wir daher an, daß u eine reelle Größe sei und trennen den reellen und den imaginären Teil, so erhalten wir für:

$$\frac{\sin^\mu u}{2}\frac{d^\mu\operatorname{cotg} u}{du^\mu}$$

die Darstellung (5):

$$\mu_2\sin(\mu-2)u\cdot 1^\mu - \mu_3(\sin(\mu-4)u\cdot 1^\mu + \sin(\mu-2)u\cdot 2^\mu) - (-1)^\mu(-\sin(\mu-2)u\cdot 1^\mu + \cdots + \sin(\mu-2)u\cdot(\mu-1)^\mu) + \frac{(-1)^\mu\mu!}{2}\frac{\cos(\mu-1)u}{\sin u}.$$

Daneben ergibt sich die Bezeichnung (6):

$$0 = \mu_2\cdot\cos(\mu-2)u\cdot 1^\mu - \mu_3(\cos(\mu-4)u\cdot 1^\mu + \cos(\mu-2)u\cdot 2^\mu) + \cdots + (-1)^\mu(\cos(\mu-2)u\cdot 1^\mu + \cdots + (\cos(\mu-2)u\cdot(\mu-1)^\mu) + \frac{(-1)^{\mu-1}\mu!}{2}\frac{\sin(\mu-1)u}{\sin u}.$$

In ähnlicher Weise können die Größen a_μ untersucht werden.

Wir hatten die Formel (7) gefunden:

$$(a + 2l)^\mu = (\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + \varepsilon_1^3 \cdot 3^\mu \ldots \varepsilon_1^{2l-1}(2l-1)^\mu + c_1 \cdot a_\mu) : c_1 \cdot \varepsilon_1^{2l}.$$

Bezeichnen wir die Werte dieser Funktion für $l = 0, 1, \ldots, \mu$ resp. durch $v_0, v_1, \ldots, v_\mu$, so wird:

$$v_0 = a_\mu,$$

$$v_1 = (\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + c_1 a_\mu) : c_1 \cdot \varepsilon_1^2,$$

$$v_2 = (\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + \varepsilon_1^3 \cdot 3^\mu + c_1 \cdot a_\mu) : c_1 \cdot \varepsilon_1^4,$$

. . . . . .

$$v_\mu = (\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + \varepsilon_1^3 \cdot 3^\mu + \cdots + \varepsilon_1^{2\mu-1}(2\mu-1)^\mu + c_1 \cdot a_\mu) : c_1 \cdot \varepsilon_1^{2\mu}.$$

Mit Hülfe des LAGRANGEschen Verfahrens ergibt sich demgemäß die Beziehung:

$$(-2)^\mu = \frac{v_0}{\mu!} - \frac{v_1}{1!\,(\mu-1)!} + \frac{v_2}{2!\,(\mu-2)!} \cdots \frac{(-1)^\mu v_\mu}{\mu!}.$$

Auf der rechten Seite ergeben sich zunächst Glieder, die mit a_μ multipliziert sind. Dieselben lauten:

$$\frac{1}{\mu!} - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\frac{1}{\mu-1!} + \frac{1}{\varepsilon_1^4}\frac{1}{2!}\frac{1}{\mu-2!} + \cdots \pm \frac{1}{\varepsilon_1^{2\mu}} = \frac{1}{\mu!}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\right)^\mu.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Darstellung:

$$(8)\quad \frac{c_1}{\mu!} a_\mu \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1^2}\right)^\mu = \frac{1^\mu}{\varepsilon_1}\frac{1}{1!\,\mu-1!} - \frac{1}{2!\,(\mu-2)!}\left(\frac{1^\mu}{\varepsilon_1^2} + \frac{3^\mu}{\varepsilon_1}\right)$$
$$+ \cdots + (-1)^{\mu-1}\left(\frac{1^\mu}{\varepsilon_1^{2\mu-1}} + \cdots + \frac{(2\mu-1)^\mu}{\varepsilon_1}\right) + (-2)^\mu c_1.$$

Wir können diese Gleichung auch schreiben:

$$(9)\quad c_1 a_\mu (\varepsilon_1^2 - 1)^\mu = \varepsilon_1 1^\mu \cdot \mu_1 \cdot \varepsilon_1^{2\mu-2} - \mu_2 (\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + \varepsilon_1^3 \cdot 3^\mu)\varepsilon_1^{2\mu-4}$$
$$+ \cdots + (-1)^{\mu-1}(\varepsilon_1 \cdot 1^\mu + \cdots + \varepsilon_1^{2\mu-1}(2\mu-1)^\mu) + (-2)^\mu \mu!\, \varepsilon_1^{2\mu} c_1.$$

Dabei bestehen die Beziehungen:

$$\varepsilon_1 = e^{ui}, \quad c_1 = -\frac{i}{2}\operatorname{cosec} u.$$

Diese Formel liefert eine independente Darstellung der Größen a_μ und damit zu gleicher Zeit der μten Differentialquotienten der Funktion $\operatorname{cosec} u$. Wir wollen die letztere sofort in einer etwas anderen Form schreiben. Es ist:

$$(\varepsilon_1^2 - 1)^\mu = \varepsilon_1^\mu (2i)^\mu \sin \mu u.$$

Nehmen wir u reell an und trennen den reellen von dem imaginären Teil, so erhalten wir für:

$$-2^{\mu-1}\sin^{\mu}u\,\frac{d^{\mu}\operatorname{cosec}u}{du^{\mu}}$$

den Ausdruck (10):

$$\mu_1\cdot\sin(\mu-1)u\cdot 1^{\mu}-\mu_2(\sin(\mu-3)u\cdot 1^{\mu}+\sin(\mu-1)u\cdot 3^{\mu})$$
$$+\cdots+(-1)^{\mu-1}(-\sin(\mu-1)u\cdot 1^{\mu}+\cdots+\sin(\mu-1)u(2\mu-1)^{\mu})$$
$$-\frac{(-2)^{\mu}}{2}\,\frac{\mu!\cos\mu u}{\sin u}.$$

Zu gleicher Zeit ergibt sich die Beziehung (11):

$$0=\mu_1\cdot\cos(\mu-1)u\cdot 1^{\mu}-\mu_2(\cos(\mu-3)u\cdot 1^{\mu}+\cos(\mu-1)u\cdot 3^{\mu})$$
$$+\cdots+(-1)^{\mu-1}(\cos(\mu-1)u\cdot 1^{\mu}+\cdots+\cos(\mu-1)u\cdot(2\mu-1)^{\mu})$$
$$+\frac{(-2)^{\mu}\cdot\mu!}{2}\,\frac{\sin\mu u}{\sin u}.$$

Setzen wir in dieser Formel $u=u_r$, so folgt, daß die Größen a_{μ} und b_{μ} algebraische Zahlen werden. Dasselbe gilt von den Größen s, S, σ, Σ, von einfachen Faktoren abgesehen — es würde aber das Ziel dieses Aufsatzes überschreiten, auf die hierbei stattfindenden Beziehungen näher einzugehen.

§ 8.

Anwendung der Sätze des ersten Paragraphen auf Reihen, welche von zwei Veränderlichen abhängen.

Wir wollen nun die Sätze des ersten Paragraphen auf gewisse allgemeiner gestaltete Reihen anwenden. Wir legen erstens die Reihe zu Grunde:

(1) $$\varphi(x,\,y)=\alpha_1\sin x\cdot\sin y+\alpha_2\sin 2x\cdot\sin 2y+\cdots,$$

so nimmt die Größe $s^{(u_r)}$ die Form (2) an:

$$\alpha_r\sin ry+\sum_1^{\infty}(-1)^l(\alpha_{ln+r}\cdot\sin(ln+r)y-\alpha_{ln-r}\cdot\sin(ln-r)y).$$

Wo ein Zweifel über die Schreibweise vorliegt, setzen wir an Stelle von:

$$s^{(u_r)}:s^{(u_r)}(y).$$

Nach den Theorien des ersten Paragraphen erhalten wir dann die Darstellung:

$$(3) \qquad \frac{n}{2} s^{(u_r)}(y) = 2 \sum_1^m \varphi\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}, y\right) \sin \frac{(2l-1)r\pi}{n}.$$

Ferner nimmt die Größe $\sigma^{(u_r)}$ die Form (4) an:

$$\alpha_r \sin ry + \sum_1^\infty (\alpha_{ln+r} \cdot \sin(ln+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \sin(ln-r)y),$$

und wir erhalten für dieselbe die Darstellung:

$$(5) \qquad \frac{n}{2} \sigma^{(u_r)}(y) = 2 \sum_1^m \varphi\left(\frac{2l\pi}{n}, y\right) \sin \frac{2lr\pi}{n}.$$

Um die Funktion $\varphi(x, y)$ einfacher zu gestalten, führen wir die Funktion ein:

$$(6) \qquad f(z) = \alpha_1 \cos z + \alpha_2 \cos 2z + \cdots,$$

dann wird:

$$(7) \qquad \varphi(x, y) = \frac{f(x-y) - f(x+y)}{2}.$$

Dabei müssen die Größen x und y so gewählt sein, daß die Darstellung von $f(z)$ in der Form (6) richtig ist für $z = x - y$ und $z = x + y$.

Nehmen wir also an, daß die Darstellung von $f(z)$ richtig ist im Intervall von 0 bis π die Grenzen einbegriffen, so werden unsere Überlegungen jedenfalls richtig sein für die Werte von $y = 0$ bis $y = \frac{\pi}{n}$. Nehmen wir dagegen an, und diesen Fall werden wir zu erörtern haben, daß die Darstellung richtig ist im Intervall von 0 bis 2π, so gilt die Formel (5) im Intervall von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$. Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz[1]):

Kennt man den Wert der trigonometrischen Reihe:

$$f(z) = \alpha_1 \cos z + \alpha_2 \cos 2z + \cdots,$$

so kennt man auch die Werte der Reihen:

$$s^{(u_r)} = \alpha_r \cdot \sin ry$$
$$+ \sum_1^\infty (-1)^l (\alpha_{ln+r} \cdot \sin(ln+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \sin(nl-r)y)$$

1) Unterscheidet man gerade und ungerade Werte von n, so kann der Satz noch weiter gefaßt werden.

und:

$$\sigma^{(u_r)} = \alpha_r \cdot \sin ry + \sum_1^\infty (\alpha_{ln+r} \cdot \sin(nl+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \sin(nl-r)y).$$

Gilt die Entwickelung der Funktion $f(z)$ im Intervalle von 0 bis π, so gelten die Entwickelungen von $s^{(u_r)}$ und $\sigma^{(u_r)}$ jedenfalls im Intervalle von 0 bis $\frac{\pi}{n}$, gilt die Entwickelung der Funktion $f(z)$ dagegen im Intervalle von 0 bis 2π, so gilt die Entwickelung von $\sigma^{(u_r)}$ auch noch im Intervall von $\frac{\pi}{n}$ bis $\frac{2\pi}{n}$.

Wir setzen zweitens:

$$(8) \qquad \varphi_1(x, y) = \alpha_1 \sin x \cdot \cos y + \alpha_2 \sin 2x \cdot \cos 2y + \cdots$$

so folgt:

$$(9) \qquad s^{(u_r)} = \alpha_r \cdot \cos ry + \sum_1^\infty (-1)^l (\alpha_{ln+r} \cdot \cos(ln+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \cos(ln-r)y),$$

und dieser Ausdruck nimmt die Form an:

$$(10) \qquad \frac{n}{2} s^{(u_r)} = 2 \sum_1^m \varphi_1\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}\right) \sin \frac{(2l-1)r\pi}{n}.$$

Ferner folgt:

$$(11) \qquad \sigma^{(u_r)} = \alpha_r \cdot \cos ry + \sum_1^\infty (\alpha_{ln+r} \cdot \cos(ln+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \cos(ln-r)y)$$

und wir erhalten die Darstellung:

$$(12) \qquad \frac{n}{2} \sigma^{(u_r)} = 2 \sum_1^m \varphi_1\left(\frac{2l\pi}{n}, y\right) \sin \frac{2lr\pi}{n}.$$

Auch hier können wir die Funktion $\varphi_1(x, y)$ in eine andere Form bringen. Dazu setzen wir:

$$(13) \qquad f_1(z) = \alpha_1 \sin z + \alpha_2 \sin 2z + \cdots$$

so ergibt sich:

$$(14) \qquad \varphi_1(x, y) = \frac{f_1(x+y) + f_1(x-y)}{2},$$

wobei nun wiederum die Größen x und y so gewählt sein müssen, daß die Darstellung von $f_1(z)$ in der Form (13) richtig ist. Hieraus folgt der Lehrsatz:

Kennt man den Wert der trigonometrischen Reihe:

$$f_1(z) = \alpha_1 \sin z + \alpha_2 \sin 2z + \cdots,$$

so ist auch der Wert der Reihen:

$$s^{(u_r)} = \alpha_r \cos ry + \sum_1^\infty (-1)^l (\alpha_{ln+r} \cdot \cos(ln+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \cos(ln-r)y)$$

und:

$$\sigma^{(u_r)} = \alpha_r \cos ry + \sum_1^\infty (\alpha_{ln+r} \cdot \cos(ln+r)y - \alpha_{ln-r} \cdot \cos(ln-r)y)$$

bekannt. Gilt die Entwickelung von $f_1(z)$ im Intervalle von 0 bis π, so gelten die Entwickelungen von $s^{(u_r)}$ und $\sigma^{(u_r)}$ jedenfalls im Intervalle von 0 bis $\frac{\pi}{n}$, gilt die Entwickelung von $f_1(z)$ im Intervalle von 0 bis 2π, so gilt die Entwickelung von $\sigma^{(u_r)}$ auch noch im Intervalle von $\frac{\pi}{n}$ bis $\frac{2\pi}{n}$.

In ähnlicher Weise sind die Sätze über die Cosinusreihe zu verwerten. Wir legen dazu die Reihe zu Grunde:

$$(15) \qquad \psi(x, y) = \beta_1 \cos x \cos y + \beta_2 \cos 2x \cdot \cos 2y + \cdots,$$

so nimmt die Größe $S^{(u_r)}$ die Form an:

$$(16) \qquad S^{(u_r)} = \beta_r \cdot \cos ry + \sum_1^\infty (-1)^l (\beta_{ln+r} \cdot \cos(ln+r)y + \beta_{ln-r} \cdot \cos(ln-r)y)$$

und es wird für ungerade Werte vor n:

$$(17) \quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = 2 \sum_1^m \psi\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}, y\right) \cos \frac{(2l-1)r\pi}{n} + \psi(\pi, y) \cos r\pi,$$

für gerade Werthe von n:

$$(18) \qquad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = 2 \sum_1^m \psi\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}, y\right) \cos \frac{(2l-1)r\pi}{n}.$$

Um die Funktion $\psi(x, y)$ in eine andere besser sich eignende Form zu bringen, setzen wir:

$$F(z) = \beta_1 \cos z + \beta_2 \cos 2z + \cdots, \tag{19}$$

so folgt, daß $\psi(x, y)$ geschrieben werden kann:

$$\psi(x, y) = \frac{F(x+y) + F(x-y)}{2}, \tag{20}$$

wobei x und y so gewählt sein müssen, daß für $z = x + y$ und $z = x - y$ die Darstellung (19) gilt, mit Ausnahme von $x = \pi$, wo zu setzen ist:

$$\psi(\pi, y) = -\beta_1 \cos y + \beta_2 \cos 2y - \beta_3 \cos 3y \cdots.$$

Ferner wird die seiner Zeit definierte Größe $\Sigma^{(u_r)}$ die Form (21) annehmen:

$$\beta_r \cos ry + \sum_1^m (\beta_{ln+r} \cdot \cos(ln + r)y + \beta_{ln-r} \cdot \cos(ln - r)y),$$

und wir erhalten für dieselbe die Darstellung:

$$\frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = \psi(0, y) + 2 \sum_1^m \psi\left(\frac{2l\pi}{n}, y\right) \cos \frac{2lr\pi}{n}, \tag{22}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, dagegen:

$$\frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = \psi(0, y) + 2 \sum_0^{m-1} \psi\left(\frac{2l\pi}{n}, y\right) \cos \frac{2lr\pi}{n} + \psi(\pi, y) \cos r\pi, \tag{23}$$

wenn n eine gerade Zahl ist. Dabei haben wir für $x = 0$ zu setzen:

$$\psi(o, y) = F(y).$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Kennt man die Darstellung von $F(z)$ im Intervalle von 0 bis 2π:

$$F(z) = \beta_1 \cos z + \beta_2 \cos 2z + \cdots,$$

so sind die Werte der beiden trigonometrischen Reihen:

$$S^{(u_r)} = \beta_r \cos ry + \sum_1^\infty (-1)^l (\beta_{ln+r} \cdot \cos(ln + r)y + \beta_{ln-r} \cdot \cos(ln - r)y)$$

und:

$$\Sigma^{(u_r)} = \beta_r \cos ry + \sum_1^\infty (\beta_{ln+r} \cdot \cos(ln+r)y + \beta_{ln-r} \cdot \cos(ln-r)y)$$

in den Intervallen von 0 *bis* $\frac{\pi}{n}$ *resp.* 0 *bis* $\frac{2\pi}{n}$ *bekannt. Wenn die Entwickelung von* $F(z)$ *nur im Intervalle von* 0 *bis* π *gilt, so muß die Kenntnis der Reihe:*

$$\beta_1 \cos y - \beta_2 \cos 2y + \cdots$$

hinzugenommen werden, es gilt dann die Darstellung von $\Sigma^{(u_r)}$ *jedenfalls im Intervalle von* 0 *bis* $\frac{\pi}{n}$.

Endlich setzen wir:

$$(24) \quad \psi_1(x, y) = \beta_1 \cos x \cdot \sin y + \beta_2 \cos 2x \cdot \sin 2y + \cdots,$$

so nehmen die in § 1 definierten Größen $S^{(u_r)}$ die Form (25) an:

$$\beta_r \sin ry + \sum_1^\infty (-1)^l (\beta_{ln+r} \cdot \sin(ln+r)y + \beta_{ln-r} \cdot \sin(ln-r)y),$$

und wir erhalten für dieselben die Darstellung:

$$(26) \quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = 2 \sum_1^m \psi_1\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}, y\right) \cos \frac{(2l-1)r\pi}{n} + \psi_1(\pi, y) \cos r\pi,$$

wenn n ungerade, dagegen:

$$(27) \quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = 2 \sum_1^m \psi_1\left(\frac{(2l-1)\pi}{n}, y\right) \cos \frac{(2l-1)r\pi}{n},$$

wenn n gerade ist. Ähnlich wird:

$$(28) \quad \Sigma^{(u_r)} = \beta_r \sin ry + \sum_1^\infty (\beta_{ln+r} \cdot \sin(ln+r)y + \beta_{ln-r} \cdot \sin(ln-r)y),$$

und wir erhalten:

$$(29) \quad \frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = \psi(0, y) + 2 \sum_0^m \psi_1\left(\frac{2l\pi}{n}, y\right) \cos \frac{2lr\pi}{n},$$

wenn n ungerade, dagegen:

$$(30) \quad \frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = \psi_1(0, y) + 2 \sum_0^{m-1} \psi_1\left(\frac{2l\pi}{n}, y\right) \cos \frac{2lr\pi}{n} + \psi_1(\pi, y) \cos ry,$$

wenn n eine gerade Zahl ist. Setzen wir:

$$(31) \qquad F_1(z) = \beta_1 \sin z + \beta_2 \sin 2z + \cdots,$$

so wird:

$$(32) \qquad \psi_1(x, y) = \frac{F_1(x+y) - F_1(x-y)}{2},$$

wobei dieselben Voraussetzungen und dieselben Bemerkungen für $x = 0$ und $x = \pi$ gelten, wie vorhin.

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Kennt man die Darstellung von $F_1(z)$ im Intervall von 0 bis 2π durch die Sinusreihe:

$$F_1(z) = \beta_1 \sin z + \beta_2 \sin 2z + \cdots$$

so sind die Werte der trigonometrischen Reihen bekannt:

$$S^{(u_r)} = \beta_r \sin ry + \sum_1^\infty (-1)^l (\beta_{ln+r} \cdot \sin(ln+r)y + \beta_{ln-r} \cdot \sin(ln-r)y)$$

und:

$$\Sigma^{(u_r)} = \beta_r \sin ry + \sum_1^\infty (\beta_{ln+r} \cdot \sin(ln+r)y + \beta_{ln-r} \cdot \sin(ln-r)y)$$

und zwar im Intervalle von 0 bis $\frac{\pi}{n}$ resp. 0 bis $\frac{2\pi}{n}$. Im übrigen gelten dieselben Bemerkungen wie vorhin.

§ 9.

Erste Spezialisierung der Resultate des vorigen Paragraphen. Summierung gewisser trigonometrischer Reihen mit Hülfe der gewöhnlichen Bernoullischen Funktionen.

Wir wollen nun die Konstanten α und β, die in den trigonometrischen Reihen des vorigen Paragraphen vorkommen, in bestimmter Weise spezialisieren. Wir setzen dazu erstens:

$$(1) \qquad f(z) = B_{2\mu}(z) = \frac{\cos z}{1^{2\mu}} + \frac{\cos 2z}{2^{2\mu}} + \cdots,$$

so ergibt die Anwendung des ersten Lehrsatzes die folgenden Resultate:

Die unendlichen Reihen:

$$(2) \quad s^{(u_r)} = \frac{\sin ry}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu}} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu}} \right)$$

und:

$$(3)\quad \sigma^{(u_r)} = \frac{\sin ry}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu}} - \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu}} \right)$$

können mit Hülfe der Bernoullischen Funktionen summiert werden und zwar ergibt sich:

$$\frac{n}{2} s^{(u_r)} =$$

$$(4)\quad \sum_1^m \left(B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} - y \right) - B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} + y \right) \right) \sin \frac{(2l-1)r\pi}{n},$$

$$(5)\quad \frac{n}{2} \sigma^{(u_r)} = \sum_1^m \left(B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{n} - y \right) - B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{n} + y \right) \right) \sin \frac{2lr\pi}{n}.$$

Für den zweiten Satz wählen wir die Funktion:

$$(6)\quad f_1(z) = B_{2\mu+1}(z) = \frac{\sin z}{1^{2\mu+1}} + \frac{\sin 2z}{2^{2\mu+1}} + \cdots$$

Es ergeben sich dann die folgenden Resultate:

Die unendlichen Reihen:

$$(7)\quad s^{(u_r)} = \frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right)$$

und:

$$(8)\quad \sigma^{(u_r)} = \frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right)$$

können mit Hülfe der Bernoullischen Funktionen summiert werden und zwar ergeben sich die Darstellungen:

$$(9)\quad \frac{n}{2} s^{(u_r)} =$$

$$\sum_1^m \left(B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} - y \right) + B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} + y \right) \right) \sin \frac{(2l-1)r\pi}{n},$$

$$(10)\quad \frac{n}{2} \sigma^{(u_r)} = \sum_1^m \left(B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n} - y \right) + B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n} + y \right) \right) \sin \frac{2lr\pi}{n}.$$

Für den dritten Satz wählen wir die Funktion $B_{2\mu}(z)$, um die Resultate zu erhalten:

Die unendlichen Reihen:

$$(11)\quad S^{(u_r)} = \frac{\cos ry}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu}} \right)$$

und:

$$(12)\quad \Sigma^{(u_r)} = \frac{\cos ry}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu}} \right)$$

können mit Hülfe der Bernoullischen Funktionen dargestellt werden und zwar ergeben sich die Formen:

I. $n = 2m+1$

$$3)\quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = \sum_1^m \left(B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} + y\right) + B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} - y\right)\right) \cos \frac{(2l-1)r\pi}{n} + \frac{B_{2\mu}(\pi+y) + B_{2\mu}(\pi-y)}{2} \cos r\pi,$$

$$4)\quad \frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = B_{2\mu}(y) + \sum_1^m \left(B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{n} + y\right) + B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{n} - y\right)\right) \cos \frac{2lr\pi}{n}.$$

II. $n = 2m$

$$5)\quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = \sum_1^m \left(B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} + y\right) + B_{2\mu}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} - y\right)\right) \cos \frac{(2l-1)r\pi}{n},$$

$$6)\quad \frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = B_{2\mu}(y) + \sum_1^{m-1} \left(B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{n} + y\right) + B_{2\mu}\left(\frac{2l\pi}{n} - y\right)\right) \cos \frac{2lr\pi}{n} + \frac{B_{2\mu}(\pi+y) + B_{2\mu}(\pi-y)}{2} \cos r\pi.$$

Endlich wenden wir den vierten Satz auf die Reihe $B_{2\mu+1}(z)$ an, um die Resultate zu erhalten:

Die unendlichen Reihen:

$$(17)\quad S^{(u_r)} = \frac{\sin ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right)$$

und:

$$(18)\quad \Sigma^{(u_r)} = \frac{\sin ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right)$$

können mit Hülfe der Bernoullischen Funktionen summiert werden, und zwar ergeben sich die folgenden Darstellungen.

I. $n = 2m + 1$

$$(19)\quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = \sum_1^m \left(B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} + y\right) - B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} - y\right)\right) \cos\frac{(2l-1)r\pi}{n}$$
$$+ \frac{B_{2\mu+1}(\pi + y) - B_{2\mu+1}(\pi - y)}{2} \cos r\pi,$$

$$(20)\quad \frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = B_{2\mu+1}(y)$$
$$+ \sum_1^m \left(B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n} + y\right) - B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n} - y\right)\right) \cos\frac{2lr\pi}{n}.$$

II. $n = 2m$

$$(21)\quad \frac{n}{2} S^{(u_r)} = \sum_1^m \left(B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} + y\right) - B_{2\mu+1}\left(\frac{(2l-1)\pi}{n} - y\right)\right) \cos\frac{(2l-1)r\pi}{n}$$

$$(22)\quad \frac{n}{2} \Sigma^{(u_r)} = B_{2\mu+1}(y) + \sum_1^{m-1} \left(B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n} + y\right) - B_{2\mu+1}\left(\frac{2l\pi}{n} - y\right)\right) \cos\frac{2lr\pi}{n}$$
$$+ \frac{B_{2\mu+1}(\pi+y) + B_{2\mu+1}(\pi-y)}{2} \cos r\pi.$$

Die Intervalle, in denen die Darstellungen gelten, sind angegeben worden.

Es sind in diesem Paragraphen die allgemeinen Bezeichnungen des ersten Paragraphen beibehalten worden, wo Zweifel stattfinden, wären die Größen $s^{(u_r)}$ etc. etwa zu ersetzen durch $s_{2\mu}^{(u_r)}(y)$ etc. ...

Wir haben hiermit die Aufgabe gelöst, gewisse trigonometrische Reihen mit Hülfe der Bernoullischen Funktionen zu summieren. Dasselbe Problem soll nunmehr auf anderem Wege gelöst werden — die Vergleichung beider Darstellungsarten gibt dann eine Anzahl von Beziehungen für die Bernoullischen Funktionen.

§ 10.

Darstellung der eingeführten ultra-bernoullischen Funktionen durch Fouriersche Reihen.

Wir wollen nun das Problem die trigonometrischen Reihen des vorigen Paragraphen zu summieren noch auf anderem Wege lösen, indem wir von vorneherein das ganze Intervall von 0 bis π ins Auge fassen und folgendermaßen schließen:

Wir nehmen an, daß n eine gerade Zahl sei und setzen eine Funktion $f(y)$ in den Intervallen von:

$$0 \text{ bis } \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{n} \text{ bis } \frac{3\pi}{n}, \quad \cdots$$

$$\frac{(n-3)\pi}{n} \text{ bis } \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \frac{(n-1)\pi}{n} \text{ bis } \pi$$

resp. gleich:

$$\frac{2\pi}{n}(f_1 y + g_1), \quad \frac{2\pi}{n}(f_3 y + g_3), \cdots \quad \frac{2\pi}{n}(f_{n-1} y + g_{n-1}),$$

$$\frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wobei die Größen f und g einstweilen beliebige Konstanten bedeuten. Wir verfügen über dieselben zunächst so, daß die Funktion $f(y)$ in den Punkten $y = 0$ und $y = \pi$ den Wert 0 annimmt, d. h. wir setzen:

$$g_1 = 0, \quad f_n \pi + g_n = 0;$$

ferner soll $f(y)$ eine stetige Funktion werden. Dazu müssen die Gleichungen bestehen:

$$f_1 \frac{\pi}{n} = f_3 \frac{\pi}{n} + g_3,$$

$$f_3 \frac{3\pi}{n} + g_3 = f_5 \frac{3\pi}{n} + g_5,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_{n-1} \frac{(n-1)\pi}{n} + g_{n-1} = f_n \frac{(n-1)\pi}{n} + g_n.$$

Es bleiben dann noch eine Anzahl von Konstanten unbestimmt. Jedenfalls können alle auf diesem Wege definierten Funktionen in eine Sinusreihe entwickelt werden:

(1) $$f(y) = \alpha_1 \sin y + \alpha_2 \sin 2y + \cdots$$

$$\alpha_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin sx \, dx$$

oder also:

$$\frac{n\alpha_s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{n}} (f_1 x + g_1) \sin sx \, dx + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{3\pi}{n}} (f_3 x + g_3) \sin sx \, dx$$

$$+ \cdots \int_{(n-1)\frac{\pi}{n}}^{\pi} (f_n x + g_n) \sin sx \, dx.$$

Nun ist:

$$\int \sin sx\,dx = -\frac{\cos sx}{s},$$

$$\int x \sin sx\,dx = -\frac{x\cos sx}{s} + \frac{\sin sx}{s^2}.$$

Erwägen wir die Beziehungen, die zwischen den Größen f und g bestehen, so folgt als Wert von $\frac{s^2 n \alpha_s}{4}$:

$$(f_1 - f_3)\sin\frac{s\pi}{n} + (f_3 - f_5)\sin\frac{3s\pi}{n} + \cdots (f_{n-1} - f_n)\sin\frac{(n-1)s\pi}{n}.$$

Wir wollen nun die weiteren Festsetzungen treffen:

$$f_1 - f_3 = \sin u_r, \quad f_3 - f_5 = \sin 3u_r,$$

$$\cdots f_{n-3} - f_{n-1} = \sin(n-3)u_r, \quad f_{n-1} - f_n = \sin(n-1)u_r,$$

durch welche in Verbindung mit den vorhin angegebenen Gleichungen die Größen f und g eindeutig bestimmt sind. Bei diesen Festsetzungen folgt dann, daß α_s nur dann von Null verschieden ist, wenn s die Form hat:

$$s = ln \pm r,$$

es folgt ferner:

$$(2) \qquad \begin{aligned} s^2\alpha_s &= \cos l\pi, \quad \text{wenn } s = ln + r, \\ s^2\alpha_s &= -\cos l\pi, \quad \text{wenn } s = ln - r, \end{aligned}$$

oder also wir erhalten die Darstellung:

$$(3) \quad f(y) = \frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right).$$

Die Konstanten f und g sind wie bemerkt aus den angegebenen Gleichungen eindeutig bestimmt, indessen gestaltet sich ihre Bestimmung einfacher, wenn wir von der trigonometrischen Reihe selbst ausgehen. Dieselbe lautet:

$$\frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right).$$

Setzen wir in derselben:

$$y = \frac{(2p-1)\pi}{n},$$

so nimmt sie die Form an:

$$\sin(2p-1)u_r \left(\frac{1}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{(ln+r)^2} + \frac{1}{(ln-r)^2}\right)\right.$$

oder also nach unseren früheren Betrachtungen:

$$\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sin(2p-1)u_r : \sin^2 u_r .$$

Wir erhalten demgemäß für f_{2p+1} und g_{2p+1} die beiden Gleichungen:

$$2\left(f_{2p+1}\frac{(2p-1)\pi}{n} + g_{2p+1}\right) = \frac{\pi}{n}\sin(2p-1)u_r : \sin^2\frac{\pi r}{n},$$

$$2\left(f_{2p+1}\frac{(2p+1)\pi}{n} + g_{2p+1}\right) = \frac{\pi}{n}\sin(2p+1)u_r : \sin^2\frac{\pi r}{n}$$

und hieraus:

$$(4) \qquad f_{2p+1} = \tfrac{1}{2}\cos 2pu_r : \sin u_r .$$

$$(5) \qquad g_{2p+1} = \frac{\pi}{2n}(\sin 2pu_r \operatorname{cotg} u_r - 2p\cos 2pu_r) : \sin u_r .$$

Für das letzte Intervall modifizieren sich die Gleichungen und lauten:

$$2\left(f_n\frac{(n-1)\pi}{n} + g_n\right) = \frac{\pi}{n}\sin(n-1)u_r : \sin^2 u_r ,$$

$$f_n\pi + g_n = 0,$$

aus welchen auch diese Größen bestimmt sind.

Hieraus ergibt sich der Lehrsatz:

Die Sinusreihe:

$$\frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right)$$

stellt für gerade Werte von n im Intervalle von 0 bis π eine Funktion f(y) dar, die in den Intervallen:

$$0 - \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{n} - \frac{3\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-3)\pi}{n} - \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \frac{(n-1)\pi}{n} - \pi$$

die resp. Formen hat:

$$\frac{2\pi}{n}(f_1 y + g_1), \ \frac{2\pi}{n}(f_3 y + g_3), \ \cdots \frac{2\pi}{n}\left(f_{n-1}y + g_{n-1}\right), \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wobei die Konstanten f und g die vorhin angegebenen Werte besitzen.

Wenn n ungerade ist, so modifizieren sich die Resultate so unwesentlich, daß wir von einer besonderen Betrachtung dieses Falles absehen können.

Wir nehmen nun wieder an, daß n eine gerade Zahl sei und setzen fest, daß eine Funktion $f(y)$ in den Intervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-2)\pi}{n} - \pi$$

die resp. Werte annehme:

$$\frac{2\pi}{n}(f_2 y + g_2), \quad \frac{2\pi}{n}(f_4 y + g_4), \quad \cdots \quad \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wobei die Konstanten zunächst beliebig sind. Wir verfügen dann über dieselben in der folgenden Weise. In den Punkten $y = 0$ und $y = \pi$ soll die Funktion verschwinden d. h. werden:

$$g_2 = 0, \quad f_n \pi + g_n = 0,$$

ferner soll die Funktion im Intervalle von 0 bis π stetig sein d. h. es sollen die Gleichungen bestehen:

$$f_2 \frac{2\pi}{n} + g_2 = f_4 \frac{2\pi}{n} + g_4,$$

$$\cdots$$

$$f_{n-2} \frac{(n-2)\pi}{n} + g_{n-2} = f_n \frac{(n-2)\pi}{n} + g_n.$$

Die so definierten Funktionen können in eine Sinusreihe entwickelt werden:

$$f(y) = \alpha_1 \sin y + \alpha_2 \sin 2y + \cdots$$

$$\frac{n\alpha_s}{4} = \int_0^\pi f(x) \sin sx\, dx.$$

Erwägen wir die Beziehungen, die zwischen den Größen f und g bestehen, so folgt:

$$\frac{ns^2\alpha_s}{4} = (f_2 - f_4)\sin\frac{2s\pi}{n} + (f_4 - f_6)\sin\frac{4s\pi}{n} + \cdots (f_{n-2} - f_n)\sin\frac{(n-2)s\pi}{n}.$$

Wir machen nun die weiteren Annahmen:

$$f_2 - f_4 = \sin 2u_r, \quad \cdots \quad f_{n-2} - f_n = \sin(n-2)u_r;$$

so sind nunmehr die Größen f und g eindeutig bestimmt und es folgt, daß α_s Null wird, außer wenn s die Formen hat:

$$s = ln + r \text{ und } s = ln - r.$$

In diesen Fällen wird:

$$(6) \qquad \begin{aligned} s^2\alpha_s &= 1 \quad \text{für} \quad s = ln + r, \\ s^2\alpha_s &= -1 \quad \text{für} \quad s = ln - r, \end{aligned}$$

so daß wir die Darstellung erhalten:

$$(7) \qquad f(y) = \frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln + r)}{(ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r)}{(ln - r)^2} \right).$$

Wie schon bemerkt, sind die Konstanten f und g aus den Bedingungsgleichungen eindeutig bestimmt, indessen empfiehlt es sich auch hier anders vorzugehen. Wir setzen in der trigonometrischen Reihe von $f(y)$ an Stelle von y: $\frac{2pn}{\pi}$, so nimmt sie die Form an:

$$\sin 2pu_r \left(\frac{1}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{(ln + r)^2} + \frac{1}{(ln - r)^2} \right) \right.$$

oder also nach unseren früheren Betrachtungen:

$$\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sin 2pu_r : \sin^2 u_r .$$

Hieraus folgen für f_{2p} und g_{2p} die Gleichungen:

$$2\left(f_{2p} \frac{(2p-2)\pi}{n} + g_{2p}\right) = \frac{\pi}{n} \sin 2(p-1)u_r : \sin^2 u_r ,$$

$$2\left(f_{2p} \frac{2p\pi}{n} + g_{2p}\right) = \frac{\pi}{n} \sin 2pu_r : \sin^2 u_r ,$$

oder also wir erhalten die Werte:

$$(8) \qquad f_{2p} = \tfrac{1}{2} \cos (2p-1)u_r : \sin u_r ,$$

$$(9) \qquad g_{2p} = \frac{\pi}{2n} (\sin 2pu_r - 2p \cos (2p-1)u_r \sin u_r) : \sin^2 u_r .$$

Damit ist alles bestimmt und wir erhalten den Lehrsatz:

Die Sinusreihe:

$$\frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln + r)y}{(ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r)y}{(ln - r)^2} \right)$$

stellt für gerade Werte von n im Intervalle von 0 bis π eine Funktion f(y) dar, die in den Intervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-2)\pi}{n} - \pi$$

die resp. Formen hat:

$$\frac{2\pi}{n}(f_2 y + g_2), \quad \frac{2\pi}{n}(f_4 y + g_4) \cdots \quad \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wobei die Konstanten f und g die vorhin angegebenen Werte besitzen.

Der Fall eines ungeraden n braucht nicht besonders betrachtet zu werden.

Wir nehmen jetzt wieder n als eine gerade Zahl an und setzen eine Funktion $f(y)$ in den Intervallen:

$$0 - \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{n} - \frac{3\pi}{n}, \cdots \quad \frac{(n-3)\pi}{n} - \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad \frac{(n-1)\pi}{n} - \pi$$

resp. gleich:

$$\frac{2\pi}{n}(f_1 y + g_1), \ \frac{2\pi}{n}(f_3 y + g_3), \cdots \frac{2\pi}{n}(f_{n-1} y + g_{n-1}), \ \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wir nehmen ferner wieder an, daß im Intervalle von 0 bis π Stetigkeit herrschen solle.

Alle diese Funktionen können dann in Cosinusreihen von der Form entwickelt werden:

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos y + b_2 \cos 2y + \cdots,$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$b_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \cos sy \, dy,$$

$$\int \cos sy \, dy = \frac{\sin sy}{s}, \quad \int y \cos sy \, dy = \frac{y \sin sy}{s} + \frac{\cos sy}{s^2}$$

oder also:

$$\frac{n s^2 b_s}{4} = -f_1 + \cos\frac{s\pi}{n}(f_1 - f_3) + \cdots$$

$$\cos\frac{(n-1)s\pi}{n}(f_{n-1} - f_n) + (-1)^s f_n, \quad s > 0.$$

Wir setzen nun fest, daß die Konstanten f den Gleichungen genügen:

$$f_1 - f_3 = \cos u_r,$$
$$f_3 - f_5 = \cos 3u_r,$$
$$\cdots$$
$$f_{n-1} - f_n = \cos(n-1)u_r.$$

Dann sind die Konstanten f und g vermöge dieser Gleichungen und der Stetigkeitsbedingungen bis auf zwei bestimmt, etwa f_1 und g_1. In Bezug auf f_1 setzen wir fest, daß es den Wert Null haben soll, dann folgt, daß auch $b_s (s > 0)$ stets gleich Null ist, außer für:

$$s = ln + r \quad \text{und} \quad s = ln - r.$$

Für diese Werte wird:

$$(10) \qquad b_s = \frac{\cos l\pi}{s^2}.$$

Setzen wir schließlich fest, daß auch $b_0 = 0$ sein soll, so sind alle Konstanten eindeutig bestimmt, und wir erhalten für $f(y)$ die Darstellung:

$$(11) \quad f(y) = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^\infty{}'(-1)^l\left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right).$$

Die Konstanten sind am besten durch Spezialisierung aus der trigonometrischen Reihe zu berechnen. Es ergeben sich die Werte:

$$(12) \qquad f_{2p+1} = -\tfrac{1}{2}\sin 2pu_r : \sin u_r,$$

$$(13) \quad g_{2p+1} = \frac{\pi}{2n}(\cos 2pu_r \cdot \operatorname{cotg} u_r + 2p\sin 2pu_r) : \sin u_r,$$

$$p = 0,\ 1,\ \cdots m-1.$$

$$f_n = 0, \quad g_n = \frac{\pi}{2n}\cos r\pi \operatorname{cotg} u_r : \sin u_r.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Die Cosinusreihe:

$$\frac{\cos ry}{r^2} + \sum{}'(-1)^l\left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right)$$

stellt für gerade Werte von n im Intervalle von 0 bis π eine Funktion $f(y)$ dar, die in den Intervallen

$$0 - \frac{\pi}{n}, \qquad \frac{\pi}{n} - \frac{3\pi}{n}, \cdots \qquad \frac{(n-1)\pi}{n} - \pi$$

die resp. Formen hat:

$$\frac{2\pi}{n}(f_1 y + g_1), \qquad \frac{2\pi}{n}(f_3 y + g_3)\cdots \qquad \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wobei die Konstanten f und g die vorhin angegebenen Werte besitzen.

Der Fall eines ungeraden n braucht nicht besonders betrachtet zu werden.

Schließlich nehmen wir wieder an, daß n eine gerade Zahl sei und setzen eine Funktion $f(y)$ in den Intervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{n}, \qquad \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{n}, \cdots \qquad \frac{(n-2)\pi}{n} - \pi$$

resp. gleich:

$$\frac{2\pi}{n}(f_2 y + g_2), \qquad \frac{2\pi}{n}(f_4 y + g_4), \cdots \qquad \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wir nehmen ferner an, daß im Intervalle von 0 bis π Stetigkeit herrschen solle.

Alle diese Funktionen können dann in Cosinusreihen entwickelt werden, die die Form haben:

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos y + b_2 \cos 2y + \cdots$$

$$\frac{n s^2 b_s}{4} = -f_2 + \cos\frac{2\pi s}{n}(f_2 - f_4) + \cdots \cos\frac{(n-2)\pi s}{n}(f_{n-2} - f_n) + (-1)^s f_n .$$

Setzen wir fest, daß $f_2 = -\frac{1}{2}$ sein soll, so folgt, daß für $s > 0$ $b_s = 0$ wird, außer für:

$$s = ln + r \quad \text{und} \quad s = ln - r .$$

Für diese Werte wird:

(18) $$b_s = 1 .$$

Setzen wir schließlich fest, daß auch $b_0 = 0$ sein soll, so sind alle Konstanten eindeutig bestimmt, und wir erhalten für $f(y)$ die Darstellung:

$$f(y) = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos (ln + r)y}{(ln + r)^2} + \frac{\cos (ln - r)y}{(ln - r)^2} \right) .$$

Für die Konstanten ergeben sich die Ausdrücke:

(15) $$f_{2p} = -\tfrac{1}{2} \sin (2p - 1)u_r : \sin u_r ,$$

(16) $$g_{2p} = \frac{\pi}{2n} (\cos 2p u_r + 2p \sin (2p - 1)u_r \cdot \sin u_r) : \sin^2 u_r .$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den *Lehrsatz:*
Die Cosinusreihe:

$$\frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos (ln + r)y}{(ln + r)^2} + \frac{\cos (ln - r)y}{(ln - r)^2} \right)$$

stellt für gerade Werte von n im Intervalle von 0 bis π eine Funktion dar, die in den Intervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{n}, \cdots \quad \frac{(n-2)\pi}{n} - \pi$$

die resp. Formen hat:

$$\frac{2\pi}{n}(f_2 y + g_2), \quad \frac{2\pi}{n}(f_4 y + g_4) \cdots \quad \frac{2\pi}{n}(f_n y + g_n),$$

wobei die Konstanten f und g die vorhin angegebenen Werte besitzen.

Auch hier braucht der Fall eines ungeraden n nicht besonders betrachtet zu werden.

Wir sind nunmehr im stande, die im vorigen Paragraphen eingeführten trigonometrischen Reihen durch die ultra-bernoullischen Funktionen darzustellen. Wir beschränken uns hierbei auf die Intervalle $0 - \frac{\pi}{n}$ resp. $0 - \frac{2\pi}{n}$, indem wir bemerken, daß die weitere Darstellung im Intervalle $0 - \pi$ ebenso einfach gegegeben werden kann.

Wir gehen dazu von der Formel aus:

$$\frac{2\pi}{n} f_1 y = \frac{\sin ry}{r^2} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin (ln + r)y}{(ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r)y}{(ln - r)^2} \right),$$

wobei f_1 den Wert hat:

$$f_1 = \frac{\operatorname{cosec} \frac{u_r}{2}}{2}.$$

Durch wiederholte Integration und unter Wiederaufnahme der Bezeichnung:

$$s^{(u_r)}_{2\mu+1} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{1}{(ln + r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln - r)^{2\mu+1}} \right)$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&(-1)^\mu \left(\frac{2\pi}{n} f_1 \frac{y^{2\mu}}{2\mu!} - s^{(u_r)}_3 \frac{y^{2\mu-2}}{2\mu - 2!} \cdots (-1)^\mu s^{(u_r)}_{2\mu+1} \right) \\
&= \frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos (ln + r)y}{(ln + r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos (ln - r)y}{(ln - r)^{2\mu+1}} \right) \\
(17) \qquad &(-1)^\mu \left(\frac{2\pi}{n} f_1 \frac{y^{2\mu+1}}{2\mu + 1!} - s^{(u_r)}_3 \frac{y^{2\mu-1}}{2\mu - 1!} \cdots (-1)^\mu s^{(u_r)}_{2\mu+1} y \right) \\
&= \frac{\sin ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin (ln + r)y}{(ln + r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin (ln - r)y}{(ln - r)^{2\mu+2}} \right).
\end{aligned}$$

Nun ist aber gefunden worden:

$$s^{(u_r)}_{2\mu+1} = 2 \left(\frac{i\pi}{n} \right)^{2\mu+1} \frac{c_1}{2\mu!} a_{2\mu}, \qquad c_1 = -\frac{i}{2} \operatorname{cosec} u_r,$$

$$2 c_1 a_{2\mu} = c_1' a'_{2\mu}.$$

Hieraus ergibt sich der *Lehrsatz:*

Die beiden trigonometrischen Reihen:

$$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right)$$

und

$$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}} \right)$$

stellen in dem Intervall von 0 *bis* $\frac{\pi}{n}$ *die Funktionen resp. dar:*

$$i \frac{(-1)^\mu}{2\mu!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2\mu+1} A'_{2\mu} \left(\frac{ny}{2\pi}, u^r \right) \text{ und}$$

$$i \frac{(-1)^\mu}{2\mu+1!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2\mu+2} A'_{2\mu+1} \left(\frac{ny}{2\pi}, u_r \right).$$

Wir nehmen zweitens die gefundene Formel:

$$\frac{2\pi}{n} f_2 y = \frac{\sin ry}{r^2} = \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^2} - \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^2} \right)$$

wobei f_2 den Wert hat:

$$f_2 = \frac{\operatorname{cotg} u_r}{2}.$$

Nehmen wir die Bezeichnung wieder auf:

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{1}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right),$$

so erhalten wir durch wiederholte Integration:

$$\begin{aligned} &(-1)^\mu \left(\frac{2\pi}{n} f_2 \frac{y^{2\mu}}{2\mu!} - \sigma_3^{(u_r)} \frac{y^{2\mu-2}}{2\mu-2!} \cdots (-1)^\mu \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} \right) \\ &= \frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right) \\ (18) \quad &\cdot (-1)^\mu \left(\frac{2\pi}{n} f_2 \frac{y^{2\mu+1}}{2\mu+1!} - \sigma_3^{(u_r)} \frac{y^{2\mu-1}}{2\mu-1!} \cdots (-1)^\mu \sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} y \right) \\ &= \frac{\sin ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}} \right). \end{aligned}$$

Nun ist aber gefunden worden:

$$\sigma_{2\mu+1}^{(u_r)} = \frac{(-1)^\mu i}{2\mu!} \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{2\mu+1} c b_{2\mu}, \quad c = -\tfrac{1}{2}(1 + i \operatorname{cotg} u_r).$$

Mithin erhalten wir den *Lehrsatz:*

Die beiden trigonometrischen Reihen:

$$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} - \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}} \right)$$

und:

$$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} - \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}} \right)$$

stellen im Intervalle von 0 *bis* $\frac{2\pi}{n}$ *die resp. Funktionen dar:*

$$\frac{(-1)^\mu}{2\mu!} \frac{i}{2} \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{2\mu+1} B'_{2\mu} \left(\frac{ny}{2\pi}, u_r \right)$$

und

$$\frac{(-1)^\mu}{2\mu+1!} \frac{i}{2} \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{2\mu+2} B'_{2\mu+1} \left(\frac{ny}{2\pi}, u_r \right).$$

Drittens nehmen wir die gefundene Formel;

$$\frac{2\pi}{n} g_1 = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos (ln+r)}{(ln+r)^2} + \frac{\cos (ln-r)}{(ln-r)^2} \right)$$

wobei g_1 den Wert hat:

$$g_1 = \frac{\pi}{2n} \cos u_r : \sin^2 u_r.$$

Es war gesetzt worden:

$$S_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}} \right).$$

Unter solchen Umständen ergibt sich durch wiederholtes Integrieren:

$$(-1)^\mu \left(\frac{2\pi}{n} g_1 \frac{y^{2\mu}}{2\mu!} - S_4^{(u_r)} \frac{y^{2\mu-2}}{2\mu-2!} \cdots (-1)^\mu S_{2\mu+2}^{(u_r)} \right)$$

$$= \frac{\cos ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty (-)^l \left(\frac{\cos (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{\cos (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}} \right)$$

(19)

$$(-1)^\mu \left(\frac{2\pi}{n} g_1 \frac{y^{2\mu+1}}{2\mu+1!} - S_4^{(u_r)} \frac{y^{2\mu-1}}{2\mu-1!} \cdots (-1)^\mu S_{2\mu+2}^{(u_r)} y \right)$$

$$= \frac{\sin ry}{r^{2\mu+3}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin (ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+3}} + \frac{\sin (ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+3}} \right).$$

Nun ist aber gefunden worden:

$$S_{2\mu}^{(\mu_r)} = -2\left(\frac{i\pi}{n}\right)^{2\mu}\frac{c_1}{2\mu-1!}a_{2\mu-1}, \quad 2c_1 a_{2\mu+1} = (2\mu+1)c_1'' a_{2\mu}''.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den Lehrsatz:

Die trigonometrischen Reihen:

$$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right)$$

und:

$$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+3}} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+3}} + \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+3}}\right)$$

stellen im Intervalle 0 *bis* $\frac{\pi}{n}$ *die resp. Funktionen dar:*

$$\frac{(-1)^\mu}{2\mu+1!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+2} A_{2\mu+1}''\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right)$$

und

$$\frac{(-1)^\mu}{2\mu+2!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu+3} A_{2\mu+2}''\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right).$$

Endlich nehmen wir die Beziehung:

$$\frac{2\pi}{n} f_2 y + g_2) = \frac{\cos ry}{r^2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^2} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^2}\right)$$

wobei gesetzt ist:

$$f_2 = -\tfrac{1}{2}, \qquad g_2 = \frac{\pi}{2n} : \sin^2 u_r.$$

Erwägen wir die Beziehungen:

$$\sum_{2\mu}^{(u_r)} = \frac{1}{r^{2\mu}} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{(ln+r)^{2\mu}} + \frac{1}{(ln-r)^{2\mu}}\right)$$

und

$$\sum_{2\mu}^{(u_r)} = -\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2\mu}\frac{(2i)^{2\mu}}{2\mu-1!} c b_{2\mu-1},$$

so erhalten wir den Lehrsatz:

Die trigonometrischen Reihen:

$$\frac{\sin ry}{r^{2\mu+1}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+1}} + \frac{\sin(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+1}}\right)$$

$$\frac{\cos ry}{r^{2\mu+2}} + \sum_1^\infty \left(\frac{\cos(ln+r)y}{(ln+r)^{2\mu+2}} + \frac{\cos(ln-r)y}{(ln-r)^{2\mu+2}}\right)$$

stellen im Intervalle von 0 *bis* $\frac{2\pi}{n}$ *die resp. Funktionen dar:*

$$\frac{(-1)^\mu}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+1} B''_{2\mu}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right)$$

und

$$\frac{(-1)^\mu}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2\mu+2} B''_{2\mu+1}\left(\frac{ny}{2\pi}, u_r\right).$$

§ 12.

Verallgemeinerung der Resultate des vorigen Paragraphen.

Es können noch allgemeinere Reihen als diejenigen des vorigen Paragraphen mit Hülfe unserer Methoden summiert werden. Es soll das kurz in folgender Weise angedeutet werden.

Wir legen die Reihe zu Grunde:

$$\pi \cos kz = \sin k\pi \left(\frac{1}{k} + \sum_1^\infty \frac{2k \cos s\pi \cdot \cos sz}{k^2 - s^2}\right)$$

und wenden auf sie den ersten Teil des ersten Satzes vom achten Paragraphen unter der Voraussetzung an, daß n eine gerade Zahl ist. Dann ergibt sich das Resultat, daß die trigonometrische Reihe:

$$\frac{\sin ry}{k^2 - r^2} + \sum_1^\infty (-1)^l \left(\frac{\sin (ln + r)y}{k^2 - (ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r)y}{k^2 - (ln - r)^2}\right)$$

im Intervalle von 0 bis $\frac{\pi}{n}$ die Funktion darstellt:

$$\frac{\pi \sin ky}{2kn}\left(\operatorname{cosec}\frac{(k-r)\pi}{n} - \operatorname{cosec}\frac{(k+r)\pi}{n}\right).$$

Es schließt sich hieran das Problem, die Summierung der betrachteten trigonometrischen Reihe in dem Intervall von 0 bis π vorzunehmen.

Dazu setzen wir eine Funktion $f(y)$ in den Intervallen:

$$0 - \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{n} - \frac{3\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-1)\pi}{n} - \pi$$

resp. gleich:

$$\frac{2\pi}{n}(f_1 \sin ky + g_1 \cos ky), \quad \cdots \quad \frac{2\pi}{n}(f_n \sin ky + g_n \cos ky),$$

wobei n als gerade Zahl angenommen ist. Die Konstanten f und g unterwerfen wir den Bedingungen:

$$g_1 = 0, \qquad f_n \sin k\pi + g_n \cos k\pi = 0,$$

setzen ferner fest, daß $f(y)$ im Intervalle von 0 bis π stetig ist.

Alle derartigen Funktionen können dann in trigonometrische Reihen entwickelt werden:

$$\alpha_1 \sin y + \alpha_2 \sin 2y + \cdots,$$

wobei die Konstanten ähnlich wie früher bestimmt werden können.

Unterwerfen wir die Größen f den weiteren Bedingungen:

$$f_3 - f_1 = \cos\frac{k\pi}{n} \cdot \sin\frac{r\pi}{n},$$

$$f_5 - f_3 = \cos\frac{3k\pi}{n} \cdot \sin\frac{3r\pi}{n},$$

$$f_n - f_{n-1} = \cos\frac{(n-1)k\pi}{n} \cdot \sin\frac{(n-1)r\pi}{n},$$

so sind die Größen f und g eindeutig bestimmt und die entsprechende Funktion $f(y)$ stellt sich im Intervall von 0 bis π durch die Reihe dar:

$$\frac{k \sin ry}{k^2 - r^2} + k \sum_{\infty}^{1} (-1)^l \left(\frac{\sin (ln + r)y}{k^2 - (ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r)y}{k^2 - (ln - r)^2} \right).$$

Genau so ist es möglich, die Konstanten f und g in eindeutiger Weise so zu bestimmen, daß die entsprechende Funktion im Intervalle von 0 bis π durch die Reihe dargestellt wird:

$$\frac{k \cos ry}{k^2 - r^2} + k \sum_{1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{\cos (ln + r)y}{k^2 - (ln + r)^2} + \frac{\cos (ln - r)y}{k^2 - (ln - r)^2} \right).$$

Setzen wir endlich eine Funktion $F(y)$ in den Intervallen:

$$0 - \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n} - \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(n-2)\pi}{n} - \pi$$

resp. gleich:

$$\frac{2\pi}{n}(f_2 \sin ky + g_2 \cos ky), \quad \cdots \quad \frac{2\pi}{n}(f_n \sin ky + g_n \cos ky),$$

wobei n als gerade Zahl angenommen wird, so können die Konstanten f und g je in eindeutiger Weise so bestimmt werden,

daß die entsprechende Funktion im Intervalle von 0 bis π durch die Reihen dargestellt wird:

$$\frac{k \sin ry}{k^2 - r^2} + k \sum_1^\infty \left(\frac{\sin (ln + r)y}{k^2 - (ln + r)^2} - \frac{\sin (ln - r)y}{k^2 - (ln - r)^2} \right)$$

und

$$\frac{k \cos ry}{k^2 - r^2} + k \sum_1^\infty \left(\frac{\cos (ln + r)y}{k^2 - (ln + r)^2} + \frac{\cos (ln - r)y}{k^2 - (ln - r)^2} \right).$$

Die Konstanten sind am besten durch Spezialisierung der Argumente aus den Reihen zu bestimmen. Für ungerade n lauten die Resultate ähnlich.

Druckfertig erklärt 14. VII. 1902.]

INHALT.

Seite

C. Neumann, Über Metallreflexion und totale Reflexion 92

Paul Stäckel, 1. Beiträge zur Flächentheorie, 2. Darstellung der Minimalflächen 101

Thomae, 1. Lineare Konstruktion einer Raumkurve dritter Ordnung aus drei Paaren konjugiert imaginärer Punkte. 2. Projektiver Beweis einiger elementaren Sätze aus der Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. 3. Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung 121

M. Krause, Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen 139

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

L Soc 1726.7

[illegible]

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

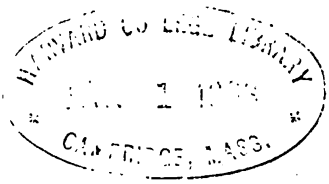
VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

IV.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Einzelpreis 1 Mark 40 Pfg.



SITZUNG VOM 2. JUNI 1902.

Geschäftliches:

1. Herr Wiener berichtet über die von ihm als Vertreter der Klasse besuchte Konferenz der internationalen Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt in Berlin.
2. Der Sekretär berichtet über den von Herrn Windisch und ihm besuchten Kartelltag in Göttingen. Die Klasse beschließt den Beitritt zu den gestellten Anträgen betreffend die Bewilligung eines Beitrages von Mk. 600.— für das Jahr 1904 an die Herausgabe einer chemischen Krystallographie, die abgeänderte Vertretung der kartellierten Gesellschaften bei Verwaltung des Buitenzorgstipendiums, die Aufhebung der Wanderakten des Kartells und den Druck der auf die Vorgeschichte des Kartells bezüglichen, vom Sekretär gesammelten Notizen.
3. Der Sekretär legt zwei Schreiben der Herren Marey und Sir M. Foster vor. Es wird beschlossen, an das unter der Protektion der internationalen Association stehende Mareysche Institut einen *einmaligen Beitrag* von Mk. 500.— zu bewilligen.
4. Der durch den abgeänderten Setzertarif notwendig gewordene Zusatz zum bisherigen Vertrag mit der Firma B. G. Teubner wird genehmigt.
5. Zu der Abelfeier in Christiania soll ein Begrüßungsschreiben erlassen werden, das Herr Engel hinzubringen sich anerbietet.
6. Bei den Beratungen über die vom Ministerium gestellte Frage betr. die Errichtung eines akademischen Beirates zur Herausgabe der Monumenta Germaniae paedagogica sollen auch Mitglieder der math.-phys. Klasse beigezogen werden.

Vorträge hielten:

Herr A. Mayer: „Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung".

Herr C. Neumann: „Über die Maxwell-Hertzsche Theorie". Zweite Abhandlung. (Für die „Abhandlungen".)

Herr F. Engel teilt einen Aufsatz von Herrn H. Liebmann mit: „Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie".

Herr H. Bruns: Selenographische Koordinaten.

Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung.

Von

A. MAYER.

Unter den Problemen, mit denen sich die mechanische Theorie des Stoßes befaßt, bietet kaum ein anderes soviel Interesse dar, wie der Zusammenstoß zweier rauher Körper, d. h. wie die Aufgabe, unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung den Bewegungszustand zweier Körper am Ende eines Zusammenstoßes zu ermitteln, in den sie mit gegebenen Geschwindigkeiten gerieten. Auf spezielle Fälle dieser Aufgabe, vor allem auf den Zusammenstoß in der Ebene (S. 171—177), geht ROUTH im ersten Bande seiner *Dynamik der Systeme starrer Körper* äußerst gründlich und ausführlich ein. Dem allgemeinen Problem im Raume dagegen läßt er (S. 293—297) nur eine weit kürzere und nichts weniger als erschöpfende Behandlung angedeihen. Ja hier trifft man sogar gerade an einer der interessantesten Stellen auf eine ganz falsche Behauptung, zu der ROUTH offenbar nur durch die Ungenauigkeit seiner Definitionen und durch einen unstatthaften Analogieschluß verführt worden ist. In seiner historischen Übersicht über das Problem des Zusammenstoßes (S. 168—169) fehlt aber auch gerade die wichtigste Arbeit, die *Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps* von DARBOUX, obgleich dieselbe nicht bloß im Jahrgang 1880 des Bulletin des sciences mathématiques veröffentlicht wurde, sondern sich auch als Note in DESPEYROUS, *Cours de Mécanique* t. II, Paris 1886, wieder abgedruckt findet.[1]) Diese ausgezeichnete Abhandlung untersucht ganz allgemein den Zusammenstoß zweier unelastischer Körper, gleichviel ob derselbe bei freier oder bei unfreier Bewegung erfolgt. Obgleich aber die Lösung ebenso richtig wie erschöpfend ist, so erhält man aus ihr doch nicht einen so klaren Einblick in den Verlauf des Zusammen-

1) Im folgenden beziehen sich die Zitate unter R. auf ROUTH, die unter D. auf den angegebenen Band des Bulletins.

stoßes, wie bei der Routhschen Diskussion des ebenen Problems, weil sie das Phänomen nicht wie diese immer von Anfang bis zum Ende hin Schritt für Schritt durch seine verschiedenen Phasen verfolgt.

Die Routhsche Art, das Problem zu behandeln, verdankt ihre vorzügliche Klarheit und Anschaulichkeit ganz wesentlich der Einführung ihres *darstellenden Punktes*. In gewissem Sinne kommt ein solcher Punkt allerdings auch bei Darboux vor, aber dort wird derselbe nur benutzt, um den Verlauf des Zusammenstoßes während des anfänglichen Aufeinandergleitens der beiden Körper zu veranschaulichen, und der Punkt daher von vornherein auch auf die gemeinsame Berührungsebene beschränkt.[1]) Der darstellende Punkt von Routh dagegen bewegt sich nur beim ebenen Probleme in der Ebene, sonst aber im Raume, und liefert durch seine Bewegung ein ungemein anschauliches Bild der Art, wie sich der ganze Zusammenstoß abspielt.

Nimmt man noch hinzu, daß gerade die merkwürdigsten Erscheinungen, die der Zusammenstoß darbietet, eigentlich erst bei elastischen Körpern zum Vorschein kommen, so wird man den Versuch, in engstem Anschluß an Darboux, aber sozusagen in Routhscher Darstellungsweise eine vollständige Lösung des Problems sowohl für unelastische, wie auch für elastische Körper zu geben, wohl kaum ganz zwecklos oder überflüssig finden.

Um aber von allem Anfang an die Formeln vollständig ableiten und damit ohne allzu weitläufige Vorbereitungen die ganze Sache so darstellen zu können, daß sie jeder zu verstehen vermag, der überhaupt die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers und die mit ihnen zusammenhängenden Formeln kennt, scheint es mir zweckmäßig, unter Verzicht auf unbeschränkte Allgemeinheit, die Betrachtungen von vornherein auf den Hauptfall des *freien* Zusammenstoßes zu beschränken, also die bestimmte Voraussetzung zu Grunde zu legen, daß die beiden Körper bei freier Bewegung gegeneinander anprallen.

Überdies darf man nie übersehen, daß die ganze mechanische Theorie des Stoßes, so wertvoll und wichtig sie auch ist, im Grunde doch immer nur als eine erste Annäherung an die Wirklichkeit angesehen werden kann, und daß eine genauere Einsicht in die Natur des Stoßes erst von der Theorie der Elastizität zu

1) D. p. 151.

erhoffen steht, die nur zur Zeit noch nicht weit genug ausgebildet ist, um andere als ganz spezielle Stoßprobleme lösen zu können. Bei dieser Unvollkommenheit der angewandten Methode lohnt es sich aber entschieden nicht der Mühe, alle und jede Einzelheit ergründen zu wollen. Ich schließe mich daher auch meinen Vorgängern insoweit vollständig an, daß ich den Grenzfall ganz außer Betracht lasse, in welchem es ohne weiteres zunächst zweifelhaft bleibt, ob das Aufeinandergleiten der beiden Körper während des Zusammenstoßes aufhören oder aber sich wiederherstellen muß. —

§. 1.

Präzise Stellung des Problems.

Zwei rauhe Körper von den Massen M und M', die in bekannter freier Bewegung begriffen sind, stoßen in einem Punkte O zusammen, der für ihre beiderseitigen Oberflächen kein singulärer Punkt ist, so daß diese in O zur Berührung kommen. Es handelt sich darum, aus dem gegebenen Bewegungszustande beider Körper beim Beginn des Zusammenstoßes ihren Bewegungszustand am Ende desselben zu finden.

Wir nehmen den Berührungspunkt O zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems xyz, die gemeinsame Berührungsebene beider Körper zur yz-Ebene und ihre Berührungsnormale, von M' nach M hin gerichtet, zur $+x$-Achse, und rechnen die Zeit t vom Beginn des Zusammenstoßes an. Wegen der außerordentlich kurzen Dauer τ des Zusammenstoßes werden während desselben die beiden Körper und damit auch die Achsen x, y, z als unbeweglich betrachtet, so daß in jedem Momente t des sehr kleinen Zeitintervalles τ alle Punkte der beiden Körper noch dieselben Koordinaten besitzen, wie zur Zeit $t = 0$.

In dieser gegebenen Lage der beiden Körper seien

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

die Koordinaten des Schwerpunktes S des Körpers M, und

$$A_{11}, \quad A_{22}, \quad A_{33}, \quad -A_{23}, \quad -A_{31}, \quad -A_{12}$$

die Trägheits-Momente und Produkte dieses Körpers um Achsen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, die den Achsen x, y, z gleichsinnig parallel von S ausgehen, so daß also für den Körper M das Trägheitsellipsoid seines

Schwerpunkts in den Achsen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ durch die Gleichung gegeben ist:

$$(1)\qquad 2\Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \equiv A_{11}\bar{x}^2 + A_{22}\bar{y}^2 + A_{33}\bar{z}^2 + 2A_{23}\bar{y}\bar{z} + 2A_{31}\bar{z}\bar{x} + A_{12}\bar{x}\bar{y} = 1.$$

Es seien ferner

$$u_0,\ v_0,\ w_0 \text{ und } u,\ v,\ w$$

die Komponenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit, und

$$p_0,\ q_0,\ r_0 \text{ und } p,\ q,\ r$$

die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Körpers M unmittelbar vor dem Zusammenstoße und in dem beliebigen Momente t desselben.

Die entsprechenden Größen für den zweiten Körper M' mögen durch dieselben Buchstaben, aber mit einem Accent versehen, bezeichnet werden, sodaß also im besonderen für diesen Körper, bezogen auf Achsen $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$, die den Achsen x, y, z gleichsinnig parallel von seinem Schwerpunkte ausgehen, die Gleichung:

$$(1')\qquad 2\Phi'(\bar{x}',\bar{y}',\bar{z}') \equiv A'_{11}\bar{x}'^2 + A'_{22}\bar{y}'^2 + A'_{33}\bar{z}'^2 + 2A'_{23}\bar{y}'\bar{z}' + 2A'_{31}\bar{z}'\bar{x}' + 2A'_{12}\bar{x}'\bar{y}' = 1$$

das Trägheitsellipsoid des Schwerpunkts darstellt.

Endlich seien:

$$N,\quad P,\quad Q$$

die Komponenten der unbekannten, am Berührungspunkte O angreifenden Kraft, die im Momente t des Zusammenstoßes vom Körper M' auf den Körper M ausgeübt wird. Umgekehrt übt dann in diesem Momente M die Kraft

$$-N,\quad -P,\quad -Q$$

auf M' aus, und es ist N der normale Widerstand oder Druck und

$$R \equiv \sqrt{P^2 + Q^2}$$

die Reibung, welche im Momente t zwischen den beiden Körpern wirken.

Wegen des festgesetzten Sinnes der $+x$-Achse ist hiernach während des ganzen Zusammenstoßes

$$N > 0.$$

Es handelt sich darum, auf Grund der Gesetze der gleitenden Reibung und der NEWTONschen Hypothese über den Effekt, den

die Elastizität der Körper bei ihrem Zusammenstoße hervorbringt, aus den gegebenen Werten der Anfangsgeschwindigkeiten:

$$u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0, u_0', v_0', w_0', p_0', q_0', r_0'$$

die Werte zu berechnen, welche die zwölf Größen:

(2) $$u, v, w, p, q, r, u', v', w', p', q', r'$$

am Ende des Zusammenstoßes erlangt haben.

§ 2.

Die grundlegenden Formeln und Sätze.

Setzt man in Bezug auf die im Raume festen Achsen x, y, z die Differentialgleichungen der Bewegung der beiden Körper während des Zusammenstoßes in rechtwinkligen Koordinaten an, integriert diese Gleichungen sodann von 0 bis t, indem man wegen der außerordentlichen Kleinheit von t sowohl die Koordinaten eines jeden Punktes der beiden Körper als konstant betrachtet, als auch die Impulse:

$$\int_0^t F_x dt, \quad \int_0^t F_y dt, \quad \int_0^t F_z dt$$

der Komponenten F_x, F_y, F_z einer jeden bewegenden Kraft der beiden Körper außer der Reibung und dem normalen Widerstande vernachlässigt, und wendet schließlich die bekannten Formeln an, welche die Geschwindigkeitskomponenten der Punkte eines starren Körpers durch die Schwerpunkts- und Winkelgeschwindigkeiten des Körpers ausdrücken, so erhält man zwischen den zwölf Unbekannten (2) und den gleichfalls unbekannten Impulsen:

(3) $$X \equiv \int_0^t N dt, \quad Y \equiv \int_0^t P dt, \quad Z \equiv \int_0^t Q dt$$

des normalen Widerstandes und der Komponenten der Reibung die zwölf Gleichungen[1]):

(4) $$M\Delta u = X, \quad M\Delta v = Y, \quad M\Delta w = Z,$$

(4′) $$M'\Delta u' = -X, \quad M'\Delta v' = -Y, \quad M'\Delta w' = -Z,$$

1) R. p. 294.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial \Delta p} = \gamma Y - \beta Z, \\ \dfrac{\partial\Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial \Delta q} = \alpha Z - \gamma X, \\ \dfrac{\partial\Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial \Delta r} = \beta X - \alpha Y, \end{cases}$$

$$(5')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi'(\Delta p', \Delta q', \Delta r')}{\partial \Delta p'} = -(\gamma' Y - \beta' Z), \\ \dfrac{\partial\Phi'(\Delta p', \Delta q', \Delta r')}{\partial \Delta q'} = -(\alpha' Z - \gamma' X), \\ \dfrac{\partial\Phi'(\Delta p', \Delta q', \Delta r')}{\partial \Delta r'} = -(\beta' X - \alpha' Y), \end{cases}$$

in denen, unter λ irgend eine der zwölf Größen (2) verstanden, zur Abkürzung:

$$(6)\qquad \lambda - \lambda_0 \equiv \Delta\lambda$$

gesetzt worden ist.

Zerlegt man weiter die relative Geschwindigkeit, welche im Momente t des Zusammenstoßes der Berührungspunkt des Körpers M gegen den von M' besitzt, nach der x-Achse und nach der yz-Ebene in die *normale Komponente* U und in die, stets absolut, also positiv zu nehmende, *tangentiale Komponente* V, und nennt θ den Winkel, den die Richtung von V mit der $+y$-Achse bildet, so hat man für U, V, θ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} U &= u - q\gamma + r\beta - (u' - q'\gamma' + r'\beta'), \\ V\cos\theta &= v - r\alpha + p\gamma - (v' - r'\alpha' + p'\gamma'), \\ V\sin\theta &= w - p\beta + q\alpha - (w' - p'\beta' + q'\alpha'). \end{aligned}$$

Daraus folgt nach (6), wenn man unter U_0, V_0, θ_0 die durch die Formeln:

$$(7)\qquad \begin{cases} U_0 = u_0 - q_0\gamma + r_0\beta - (u_0' - q_0'\gamma' + r_0'\beta'), \\ V_0\cos\theta_0 = v_0 - r_0\alpha + p_0\gamma - (v_0' - r_0'\alpha' + p_0'\gamma'), \\ V_0\sin\theta_0 = w_0 - p_0\beta + q_0\alpha - (w_0' - p_0'\beta' + q_0'\alpha') \end{cases}$$

gegebenen Werte von U, V, θ beim Beginn des Zusammenstoßes, also zur Zeit $t = 0$ versteht:

$$(8)\qquad \begin{cases} U - U_0 = \Delta u - \Delta u' + \beta\Delta r - \gamma\Delta q - (\beta'\Delta r' - \gamma'\Delta q'), \\ V\cos\theta - V_0\cos\theta_0 = \Delta v - \Delta v' + \gamma\Delta p - \alpha\Delta r - (\gamma'\Delta p' - \alpha'\Delta r'), \\ V\sin\theta - V_0\sin\theta_0 = \Delta w - \Delta w' + \alpha\Delta q - \beta\Delta r - (\alpha'\Delta q' - \beta'\Delta r'). \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, daß, infolge des Sinnes der $+x$-Achse, der *Anfangswert* U_0 der relativen normalen Geschwindigkeit des Berührungspunktes von M gegen den von M' notwendig *negativ* sein muß, da ja sonst die beiden Körper im Momente $t = 0$ gar nicht zusammenstoßen würden.

Es kommt nun zunächst darauf an, mit Hilfe der Gleichungen (4) bis (5′) U, $V\cos\theta$ und $V\sin\theta$ durch die Unbekannten X, Y, Z allein auszudrücken, dabei zugleich aber auch einige, für die ganze Untersuchung wesentliche Eigenschaften dieser Ausdrücke zu erkennen. Des letzteren Zieles wegen löse ich die Gleichungen (4) bis (5′) nicht direkt nach ihren Unbekannten $\Delta\lambda$ auf, sondern führe vielmehr die Elimination der $\Delta\lambda$ aus diesen und den Gleichungen (8) auf indirektem Wege aus.

Es sei $2\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)$ die reziproke Funktion der durch (1) definierten Funktion $2\Phi(\bar x, \bar y, \bar z)$, also diejenige quadratische Form der Variabeln $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$, die man erhält, wenn man die drei linearen Gleichungen:

$$(9)\qquad \frac{\partial\Phi(\bar x, \bar y, \bar z)}{\partial\bar x} = \bar\xi, \quad \frac{\partial\Phi(\bar x, \bar y, \bar z)}{\partial\bar y} = \bar\eta, \quad \frac{\partial\Phi(\bar x, \bar y, \bar z)}{\partial\bar z} = \bar\zeta,$$

nach $\bar x$, $\bar y$, $\bar z$ auflöst und die Auflösungen in:

$$(10)\qquad 2\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta) = 2\Phi(\bar x, \bar y, \bar z) = \bar\xi\bar x + \bar\eta\bar y + \bar\zeta\bar z$$

substituiert. Die Gleichungen (9) sind stets auflösbar, weil ihre Determinante nichts anderes ist als die HESSESche Determinante der definit positiven Form $2\Phi(\bar x, \bar y, \bar z)$, und infolge der Definition der reziproken Funktion sind bekanntlich:

$$\bar x = \frac{\partial\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)}{\partial\bar\xi}, \quad \bar y = \frac{\partial\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)}{\partial\bar\eta}, \quad \bar z = \frac{\partial\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)}{\partial\bar\zeta}$$

diese Auflösungen selbst.

Nun unterscheiden sich die linken Seiten der Gleichungen (5) nur in der Bezeichnung der Unbekannten von den linken Seiten der Gleichungen (9). Nimmt man also:

$$\bar\xi \equiv \gamma Y - \beta Z, \quad \bar\eta \equiv \alpha Z - \gamma X, \quad \bar\zeta \equiv \beta X - \alpha Y,$$

so kann man die Auflösungen der Gleichungen (5) einfach so schreiben:

$$\Delta p = \frac{\partial\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)}{\partial\bar\xi}, \quad \Delta q = \frac{\partial\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)}{\partial\bar\eta}, \quad \Delta r = \frac{\partial\Psi(\bar\xi, \bar\eta, \bar\zeta)}{\partial\bar\zeta}.$$

Versteht man daher unter $2\Omega(X, Y, Z)$ die in X, Y, Z quadratische Form:

$$(11)\quad 2\Omega(X, Y, Z) \equiv 2\Psi(\gamma Y - \beta Z, \alpha Z - \gamma X, \beta X - \alpha Y),$$

so wird nach (10) durch diese Auflösungen:

$$(\gamma Y - \beta Z)\Delta p + (\alpha Z - \gamma X)\Delta q + (\beta X - \alpha Y)\Delta r = 2\Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r) = 2\Omega(X, Y, Z).$$

Diese, durch die Gleichungen (5) identische Gleichung lehrt zunächst, daß die quadratische Form (11) niemals negativ werden kann.

Bezeichnet man ferner durch W eine beliebige der Variabeln X, Y, Z, so folgt aus den Gleichungen (5) und aus der letzten Gleichung:

$$(\gamma Y - \beta Z)\frac{\partial \Delta p}{\partial W} + (\alpha Z - \gamma X)\frac{\partial \Delta q}{\partial W} + (\beta X - \alpha Y)\frac{\partial \Delta r}{\partial W}$$
$$= \frac{\partial \Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial \Delta p}\frac{\partial \Delta p}{\partial W} + \frac{\partial \Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial \Delta q}\frac{\partial \Delta q}{\partial W}$$
$$+ \frac{\partial \Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial \Delta r}\frac{\partial \Delta r}{\partial W} = \frac{\partial \Phi(\Delta p, \Delta q, \Delta r)}{\partial W} = \frac{\partial \Omega(X, Y, Z)}{\partial W}.$$

Schreibt man daher die vorhergehende Gleichung in der Form:

$$(\gamma Y - \beta Z)\Delta p + (\alpha Z - \gamma X)\Delta q + (\beta X - \alpha Y)\Delta r - \Omega(X, Y, Z) = \Omega(X, Y, Z)$$

und differentiiert sie dann partiell nach X, Y, Z, so sieht man, daß sich aus den Gleichungen (5) ergibt:

$$\beta \Delta r - \gamma \Delta q = \frac{\partial \Omega(X, Y, Z)}{\partial X},$$

$$\gamma \Delta p - \alpha \Delta r = \frac{\partial \Omega(X, Y, Z)}{\partial Y},$$

$$\alpha \Delta q - \beta \Delta p = \frac{\partial \Omega(X, Y, Z)}{\partial Z},$$

und nun zeigt der Vergleich der Gleichungen (5) und (5′) unmittelbar, daß die letzteren Gleichungen die folgenden nach sich ziehen:

$$\beta' \Delta r' - \gamma' \Delta q' = -\frac{\partial \Omega'(X, Y, Z)}{\partial X},$$

$$\gamma' \Delta p' - \alpha' \Delta r' = -\frac{\partial \Omega'(X, Y, Z)}{\partial Y},$$

$$\alpha' \Delta q' - \beta' \Delta p' = -\frac{\partial \Omega'(X, Y, Z)}{\partial Z},$$

sobald man nur unter $2\Omega'(X, Y, Z)$ die in den Variabeln X, Y, Z

quadratische und wiederum niemals negative Form versteht, die aus der reziproken Funktion $2\Psi'(\bar{\xi}', \bar{\eta}', \bar{\zeta}')$ der durch (1′) definierten Funktion $2\Phi'(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ durch die Substitutionen entspringt:

$$\bar{\xi}' = \gamma' Y - \beta' Z, \quad \bar{\eta}' = \alpha' Z - \gamma' X, \quad \bar{\zeta}' = \beta' X - \alpha' Y.$$

Berücksichtigt man endlich noch, daß die Gleichungen (4) und (4′) unmittelbar ergeben:

$$\Delta u - \Delta u' = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right) X,$$

$$\Delta v - \Delta v' = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right) Y,$$

$$\Delta w - \Delta w' = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right) Z,$$

und führt unter den Festsetzungen:

$$a_{ki} \equiv a_{ik}$$

die quadratische Form ein:

$$(12)\quad 2F(X, Y, Z) \equiv \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}\right)(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2\Omega(X, Y, Z) + 2\Omega'(X, Y, Z) \equiv a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY,$$

so erkennt man, daß die Substitution der Auflösungen der Gleichungen (4) bis (5) die Gleichungen (8) überführt in[1]):

$$(13)\quad \begin{cases} U - U_0 = \dfrac{\partial F}{\partial X} \equiv a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, \\ V\cos\theta - V_0\cos\theta_0 = \dfrac{\partial F}{\partial Y} \equiv a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, \\ V\sin\theta - V_0\sin\theta_0 = \dfrac{\partial F}{\partial Z} \equiv a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z. \end{cases}$$

Dabei ist es für alles Folgende von fundamentaler Wichtigkeit, daß, weil keine der beiden Funktionen 2Ω und $2\Omega' < 0$ werden kann, nach ihrer Definition (12) *die Funktion* $2F(X, Y, Z)$ *eine definit positive quadratische Form der Variabeln* X, Y, Z *ist.*[2])

1) R. p. 294.

2) D. p. 149. Vorausgesetzt, daß keine andere Reibung als die am Berührungspunkte der beiden Körper wirkende in Betracht zu ziehen ist, gelten, nur mit anderen Werten der Koeffizienten a_{ik}, die

Hiernach ist jede der quadratischen Formen in zwei Variabeln, die aus (12) entstehen, wenn man eine der drei Variabeln X, Y oder $Z = 0$ setzt, gleichfalls definit positiv, und es sind nicht nur die drei Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33}, sondern auch die Determinanten:

$$(14) \qquad \nabla \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \nabla}{\partial a_{11}} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \text{ u. s. w.}$$

sämmtlich positiv und von Null verschieden.

Ihrer Entstehung zufolge hängen die 6 Koeffizienten $a_{ki} \equiv a_{ik}$ von den 20 Größen ab:

$$M,\ A_{ik},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad M',\ A'_{ik},\ \alpha',\ \beta',\ \gamma',$$

und sind mit diesen während des Zusammenstoßes als gegebene Konstanten zu betrachten. —

§ 3.

Der darstellende Punkt und die zur Lösung des Problems benutzten Hypothesen.

Die 12 Gleichungen (4) bis (5′) bestimmen eindeutig die 12 Unbekannten (2) durch die unbekannten Impulse X, Y, Z des normalen Widerstandes und der Reibungskomponenten. Hat man also die Werte dieser Impulse in einem beliebigen Momente des Zusammenstoßes gefunden, so kennt man damit zugleich auch die gleichzeitigen Werte der Schwerpunkts- und der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper, und um den Verlauf des Zusammenstoßes zu verfolgen, genügt es, zu untersuchen, wie sich während desselben X, Y, Z ändern. Das aber wieder tritt am anschaulichsten zu Tage, wenn man nach dem Vorgange von ROUTH diese Impulse, oder also die Zeitintegrale:

$$(3) \qquad X \equiv \int_0^1 N dt, \quad Y \equiv \int_0^1 P dt, \quad Z \equiv \int_0^1 Q dt$$

in den Achsen x, y, z als Koordinaten eines Punktes m, *des dar-*

Formeln (13) auch für den unfreien Zusammenstoß, und ebenso bleibt die Funktion $2F$ auch dann noch definit positiv; dies ist der Grund, weshalb die im folgenden abgeleiteten Resultate überhaupt für jeden einpunktigen Zusammenstoß Gültigkeit behalten, gleichviel ob derselbe bei freier oder bei unfreier Bewegung erfolgt.

stellenden Punktes des Zusammenstoßes[1]), sich aufgetragen denkt und nun zusieht, wie sich dieser Punkt während des Zusammenstoßes bewegt.

Beim Beginn desselben, also zur Zeit $t = 0$, befindet sich der Punkt m im Anfangspunkt O; während aber der Zusammenstoß fortschreitet, entfernt sich m mehr und mehr von O und zwar, da der normale Widerstand N während des ganzen Zusammenstoßes > 0 bleiben muß, immer in der Weise, *daß seine Abscisse X beständig wächst.* Man kann daher, was wir später benutzen werden, auch X an Stelle der Zeit t als unabhängige Variable einführen.

Infolge des Zusammenstoßes erleidet nun zunächst jeder der beiden Körper durch den andern in der Umgebung des Berührungspunktes eine kleine Zusammendrückung. Die relative normale Geschwindigkeit U, die der Berührungspunkt von M gegen den von M' besitzt, wird also nicht plötzlich Null, sondern wächst von ihrem negativen Anfangswerte U_0 aus immer stetig, wenn auch äußerst rasch, und erlangt den Wert Null erst in dem Momente, wo die beiden Körper ihre *stärkste Kompression* erlitten haben.

Mit der Erreichung dieser stärksten Kompression hat zugleich auch der Zusammenstoß selbst sein Ende erreicht, wenn die beiden Körper *vollkommen unelastisch* sind. Sind sie dagegen mehr oder weniger *elastisch*, so entwickelt die Elastizität nunmehr ihre Kräfte in ihnen, und diese suchen die erlittenen Deformationen in jedem Körper möglichst wieder auszugleichen, ihnen die ursprüngliche Gestalt zurückzugeben und die Körper voneinander zu trennen.

Bei *elastischen* Körpern zerfällt hiernach der ganze Zusammenstoß in zwei verschiedene Perioden. Er beginnt mit der *Periode der Kompression:* während derselben nimmt der absolute Wert von U beständig ab, bis er im Momente der stärksten Kompression Null geworden und damit diese erste Periode beendigt ist. Nunmehr tritt der Zusammenstoß in seine zweite Periode, die *Periode der Restitution*, ein, bei der U positiv wird und beständig wächst, und die erst mit dem Zusammenstoße selbst ihr Ende erreicht.

Zur Bestimmung dieses Endes nimmt man auf Grund von Versuchen, die bereits von NEWTON angestellt und seitdem öfters wiederholt wurden, die folgende *Hypothese* zu Hülfe:

1) R. p. 172, 290, 294.

Bezeichnet $\overline{X}$ den vollen Impuls, den der normale Widerstand des Körpers M' während der ganzen Kompressionsperiode auf den Körper M ausgeübt hat, so erreicht der ganze Zusammenstoß in dem Momente sein Ende, in welchem der Impuls dieses normalen Widerstandes die Größe

$$X = (1 + \mu)\,\overline{X}$$

erreicht hat. Dabei bedeutet μ eine von dem Elastizitätsgrade der beiden Körper abhängige, im Intervall 0 bis 1 gelegene Zahl, den s. g. *Restitutionskoeffizienten* der beiden Körper. Nach dem Vorhergehenden ist $\mu = 0$ bei vollkommen unelastischen Körpern, bei sehr stark elastischen Körpern dagegen haben die Beobachtungen μ sehr nahezu $= 1$ ergeben.[1])

Nach (13) wird im Moment der stärksten Kompression, dem Endmomente der ersten Periode des Zusammenstoßes:

$$a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + U_0 = 0. \tag{15}$$

Die stärkste Kompression tritt also in dem Augenblicke ein, wo der darstellende Punkt m an die Ebene (15) gelangt. Diese Ebene wird daher von ROUTH die Ebene der stärksten Kompression genannt, ich werde sie im folgenden einfach *die Ebene* $U = 0$ nennen.

Solange ferner die tangentiale Komponente V der relativen Geschwindigkeit des Berührungspunktes von M gegen den von M' nicht verschwindet, *gleiten* die beiden Körper aufeinander und dann haben, den *Reibungsgesetzen* zufolge, die Komponenten der Reibung die Werte:

$$P = -fN\cos\theta, \quad Q = -fN\sin\theta, \tag{16}$$

wo f eine positive Konstante, der *Reibungskoeffizient* zwischen den beiden Körperoberflächen ist.

Sobald dagegen V Null wird und auch Null bleibt, verwandelt sich dies Gleiten in ein bloßes *Rollen*, und nach (13) bewegt sich dann der darstellende Punkt m auf der Geraden:

$$\begin{cases} a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + V_0\cos\theta_0 = 0, \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + V_0\sin\theta_0 = 0, \end{cases} \tag{17}$$

die ROUTH die Gerade keines Gleitens nennt und die ich kürzer *die Gerade* $V = 0$ nennen will.

---

1) Ausführlicheres über die vorhergehenden Angaben findet man bei R. p. 163—164 und p. 166—168.

Nach den Reibungsgesetzen bleibt aber die relative tangentiale Geschwindigkeit V von einem Momente an, wo sie Null wurde, nur dann sicher Null, wenn in diesem Momente

$$f^2N^2 - P^2 - Q^2 > 0$$

ist, während sie im entgegengesetzten Falle

$$f^2N^2 - P^2 - Q^2 < 0$$

notwendig wieder positiv werden muß. Von dem Grenzfalle

$$f^2N^2 - P^2 - Q^2 = 0,$$

in welchem man nicht mehr von vornherein sicher weiß, ob V Null bleiben oder wieder positiv werden muß, sehe ich aus dem in der Einleitung angeführten Grunde im folgenden immer ab.

Die Differentiation der Gleichungen (17) nach t lehrt nun nach (3), daß, solange $V = 0$ bleibt:

$$a_{21}N + a_{22}P + a_{23}Q = 0,$$
$$a_{31}N + a_{32}P + a_{33}Q = 0$$

sein muß, und diese Gleichungen ergeben:

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)P = (a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33})N,$$
$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)Q = -(a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22})N,$$

also, wenn man:

(18) $$K \equiv f^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)^2 - (a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33})^2 - (a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22})^2$$

setzt:

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)^2(f^2N^2 - P^2 - Q^2) = KN^2.$$

Während des Zusammenstoßes bleibt nun N stets > 0, unsere obigen Ungleichungen verlangen also einfach

$$K > 0 \quad \text{oder} \quad < 0,$$

während der Grenzfall $K = 0$ dem von der Betrachtung ausgeschlossenen Falle entspricht. Und da K eine bloße Konstante ist, so folgt:

Gelangt während des Zusammenstoßes der darstellende Punkt m überhaupt an die Gerade $V = 0$, so bleibt er nunmehr beständig auf ihr, oder verläßt dieselbe sofort wieder, je nachdem

$$K > 0 \quad \textit{oder} \quad < 0$$

ist. Im ersten Falle geht von dem Momente an, wo $V = 0$ wurde, das Aufeinandergleiten der beiden Körper in ein bloßes Rollen

über, im zweiten dagegen wird V nur augenblicklich Null und die beiden Körper müssen nach wie vor aufeinander gleiten.[1])

§ 4.

Die analytischen Formeln für das Gleiten. Diskussion der Gleichung $\Delta(\theta) = 0$.

Solange die beiden Körper aufeinander gleiten, gelten zwischen den Reibungskomponenten und dem normalen Widerstande die Formeln (16) und damit nach (3) zugleich für die Bewegung des darstellenden Punktes die Formeln:

$$\frac{dY}{dt} = -f\frac{dX}{dt}\cos\theta, \quad \frac{dZ}{dt} = -f\frac{dX}{dt}\sin\theta.$$

Daraus folgt, weil

$$\frac{dX}{dt} \equiv N$$

während des Zusammenstoßes immer > 0 bleiben muß, für die Bahn des darstellenden Punktes m während des Gleitens:

$$\frac{dY}{dX} = -f\cos\theta, \quad \frac{dZ}{dX} = -f\sin\theta. \tag{19}$$

Hiernach erhält man aus den Formeln (13) durch Differentiation nach X die Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dX} = a_{11} - f(a_{12}\cos\theta + a_{13}\sin\theta) \equiv A(\theta), \\ \dfrac{dV}{dX}\cos\theta - V\sin\theta\dfrac{d\theta}{dX} = a_{21} - f(a_{22}\cos\theta + a_{23}\sin\theta) \equiv B(\theta), \\ \dfrac{dV}{dX}\sin\theta + V\cos\theta\dfrac{d\theta}{dX} = a_{31} - f(a_{32}\cos\theta + a_{33}\sin\theta) \equiv C(\theta), \end{cases} \tag{20}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen weiter:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dX} = B(\theta)\cos\theta + C(\theta)\sin\theta \equiv H(\theta), \\ V\dfrac{d\theta}{dX} = -B(\theta)\sin\theta + C(\theta)\cos\theta \equiv \Delta(\theta). \end{cases} \tag{21}$$

Alle diese Gleichungen müssen also gleichzeitig mit den Gleichungen (16) für jede Phase des Zusammenstoßes gelten, in welcher die beiden Körper aufeinander gleiten.

---

1) D. p. 156.

Auf den Verlauf des Zusammenstoßes oder die Bewegung des darstellenden Punktes während desselben hat nun die Gleichung

$$\Delta(\theta) = 0 \tag{22}$$

und das Verhalten ihrer Wurzeln zum Vorzeichen der Funktion $H(\theta)$ einen ganz wesentlichen Einfluß. Ehe ich daher weiter gehe, will ich zunächst dasjenige hier einschalten, was wir von den Wurzeln dieser Gleichung wissen müssen.

Aus den Definitionsgleichungen (21) der beiden Funktionen $H(\theta)$ und $\Delta(\theta)$ folgt, wenn man $\Delta(\theta) = 0$ setzt und die Funktion $H(\theta)$ kurz durch H bezeichnet:

$$B(\theta) = H\cos\theta, \quad C(\theta) = H\sin\theta,$$

d. i. nach den Definitionen (20) von $B(\theta)$ und $C(\theta)$:

$$\begin{cases} (H + fa_{22})\cos\theta + fa_{23}\sin\theta = a_{21}, \\ fa_{32}\cos\theta + (H + fa_{33})\sin\theta = a_{31}. \end{cases} \tag{23}$$

Solange wir nun den allgemeinen Fall im Auge behalten, also weder die beiden Körper selbst, noch auch ihre gegenseitige Lage während des Zusammenstoßes spezialisieren, sind die beiden Konstanten a_{31} und a_{12} (von denen man durch passende Wahl der Achsen y, z in der gemeinsamen Berührungsebene immer eine zum Verschwinden bringen kann), nicht beide Null. Die Annahme $a_{31} = a_{12} = 0$ ruft beträchtliche Vereinfachungen hervor, die ich im letzten Paragraph kurz andeuten werde. Bis dahin aber schließe ich diesen besonderen Fall immer von der Betrachtung aus. Dann erhält man aus den Gleichungen (23) weiter:

$$\begin{cases} [(H+fa_{22})(H+fa_{33}) - f^2a_{23}^2]\cos\theta = a_{12}(H+fa_{33}) - fa_{23}a_{31}, \\ [(H+fa_{22})(H+fa_{33}) - f^2a_{23}^2]\sin\theta = a_{31}(H+fa_{22}) - fa_{12}a_{23}, \end{cases} \tag{24}$$

also durch Quadrieren und Addieren schließlich[1]):

$$\begin{aligned} \varphi(H) \equiv {} & [(H+fa_{22})(H+fa_{33}) - f^2a_{23}^2]^2 \\ & - [a_{12}H + f(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{31})]^2 - [a_{31}H + f(a_{31}a_{22} - a_{12}a_{23})]^2 = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Damit ist die Gleichung (22) zurückgeführt auf diese Gleichung vierten Grades in H. Jeder Wurzel H der Gleichung (25) entspricht durch die Gleichungen (24) eine, bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmte Wurzel θ der Gleichung (22), und umgekehrt ergibt sich der Wert, den die Funktion $H \equiv H(\theta)$

1) Vgl. D. p. 157.

für irgend eine Wurzel θ der Gleichung (22) annimmt, nach Substitution dieser Wurzel eindeutig aus einer der beiden Gleichungen (23).

Nun wird der Ausdruck:

$$\psi(H) \equiv (H + fa_{22})(H + fa_{33}) - f^2 a_{23}^2$$

> 0 für $H = \pm\infty$, und $\leqq 0$ für $H = -fa_{22}$ und $H = -fa_{33}$. Die Gleichung $\psi(H) = 0$ besitzt also stets zwei reelle Wurzeln, von denen eine beliebige durch H' bezeichnet werde. Diese beiden Wurzeln sind überdies stets negativ. Denn nach dem bei (14) Gesagten sind in

$$\psi(H) \equiv H^2 + f(a_{22} + a_{33})H + f^2(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)$$

alle Koeffizienten positiv. Nach (25) ist nun:

$$\varphi(-\infty) > 0, \quad \varphi(H') < 0, \quad \varphi(+\infty) > 0.$$

Die Gleichung (25) besitzt also stets wenigstens zwei reelle Wurzeln. Nach (25) und (18) ist ferner:

$$\varphi(0) \equiv f^2 K.$$

Also läßt die Gleichung (25) zwei negative, oder aber eine negative und eine positive Wurzel zu (die niemals miteinander zusammenfallen können), je nachdem:

$$K > 0 \quad \text{oder} \quad < 0$$

ist, und sie besitzt nur dann die Wurzel $H = 0$, wenn $K = 0$ ist.

Mit der Ausschließung dieses Grenzfalles ist also zugleich auch die Möglichkeit ausgeschlossen, daß die beiden Funktionen $\Delta(\theta)$ und $H(\theta)$ gleichzeitig verschwinden könnten.

Im Falle $K < 0$ oder $\varphi(0) < 0$ kann ferner die Gleichung (25) Wurzeln desselben Zeichens immer nur in ungerader Anzahl besitzen. Nun ist nach (21)

$$H(\theta) + \Delta'\theta \equiv -B'\theta \sin\theta + C'\theta \cos\theta$$

und nach (20)

$$B'\theta \equiv f(a_{22}\sin\theta - a_{23}\cos\theta), \quad C'\theta \equiv f(a_{23}\sin\theta - a_{33}\cos\theta),$$

also hat man:

$$H(\theta) + \Delta'\theta \equiv -f(a_{22}\sin^2\theta - 2a_{23}\sin\theta\cos\theta + a_{33}\cos^2\theta),$$

und hierin ist, nach einer den Formeln (14) unmittelbar voran-

gehenden Bemerkung, der Faktor von $-f$ definit positiv. Es besteht daher für jedes θ die Ungleichung[1]):

$$H(\theta) + \Delta'\theta < 0. \tag{26}$$

Im besonderen wird folglich $H(\theta)$ sicher < 0 für jede Wurzel θ der Gleichung (22), welche den Differentialquotienten $\Delta'\theta \geqq 0$ macht. Sind aber alle vier Wurzeln der Gleichung (25) und also auch der Gleichung (22) reell, so schneidet die Kurve, deren Gleichung, in den rechtwinkligen Koordinaten θ und ϑ, $\vartheta = \Delta(\theta)$ ist, die θ-Achse viermal im Intervall 0 bis 2π (wobei von den vier Schnittpunkten niemals mehr als höchstens je zwei zusammenfallen können), und die Gleichung $\Delta(\theta) = 0$ hat daher immer zwei (von einander verschiedene) Wurzeln, für welche $\Delta'\theta \geqq 0$ wird. Die Gleichung (25) muß dann also stets wenigstens zwei negative Wurzeln, muß also im Falle $K < 0$, wo diese Wurzeln nur in ungerader Anzahl auftreten können, notwendig drei negative Wurzeln besitzen.[2])

Damit sind wir zu dem wichtigen Resultate gelangt:

In einem Intervall von der Länge 2π besitzt die Gleichung $\Delta(\theta) = 0$ stets entweder zwei oder vier reelle Wurzeln. Läßt sie nur zwei reelle Wurzeln zu, so entsprechen denselben, je nachdem $K > 0$ oder < 0 ist, zwei negative oder ein negativer und ein positiver Wert der Funktion $H(\theta)$. Sind alle vier Wurzeln reell und ist $K < 0$, so gehören diesen vier Wurzeln drei negative und ein einziger positiver Wert von $H(\theta)$ zu. Wegen der Ausschließung des Grenzfalles $K = 0$ existiert überdies kein Wert von θ, der $\Delta(\theta)$ und $H(\theta)$ gleichzeitig zum Verschwinden brächte.

§ 5.

Der Verlauf des Zusammenstoßes in dem allgemeinen Falle, wo weder V_0 noch $\Delta(\theta_0) = 0$ ist.

Nunmehr können wir an unsere eigentliche Aufgabe gehen, die Bewegung des darstellenden Punktes m während des Zusammenstoßes und namentlich seine Lage am Ende desselben zu bestimmen, die ja unmittelbar die gesuchten Endwerte von X, Y, Z liefert. Dabei haben wir immer wohl im Auge zu behalten, *daß nach § 3 bei der Bewegung von m seine Abscisse X beständig wachsen muß*, und wollen zunächst die besonderen Fälle ausschließen, wo V_0 oder $\Delta(\theta_0) = 0$ sein sollte, also voraussetzen, daß die ge-

1) D. p. 157. 2) D. p. 158.

gebenen Anfangswerte V_0 und $\Delta(\theta_0)$ beide von Null verschieden seien.

Da alsdann die relative tangentiale Geschwindigkeit V des Berührungspunktes von M gegen den von M' beim Beginn des Zusammenstoßes nicht Null ist, so *gleiten* jedenfalls anfangs die beiden Körper aufeinander und es gelten daher zunächst sicher die Formeln (19), (20) und (21).

Die zweite Formel (21) lehrt nun erstens unmittelbar:

Sowohl V als auch $\frac{d\theta}{dX}$ kann immer nur gleichzeitig mit $\Delta(\theta)$ verschwinden,

und zweitens, da V nie < 0 werden kann und X beständig wachsen muß:

Solange $\Delta(\theta)$ nicht verschwindet, muß stets $\frac{d\theta}{dX}$ das Zeichen von $\Delta(\theta)$ besitzen und $\frac{d\theta}{\Delta(\theta)} > 0$ bleiben.[1])

Da auch $\Delta(\theta_0) \neq 0$ sein soll, so fixiert diese Bedingung den Sinn, in welchem der Winkel θ von seinem gegebenen Anfangswerte θ_0 aus sich ändern muß. θ wächst oder nimmt ab, je nachdem $\Delta(\theta_0) > 0$ oder < 0 ist.

Endlich ergibt sich aus den beiden Gleichungen (21) zusammen, daß anfangs und, vorausgesetzt, daß der Zusammenstoß nicht etwa schon vorher sein Ende erreicht habe, jedenfalls bis zu dem Momente, wo zum ersten Male $\Delta(\theta) = 0$ wird, die Gleichung:

$$\frac{d \log V}{d\theta} = \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)},$$

oder:

$$V = V_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta} \equiv V(\theta) \tag{27}$$

und mit ihr zugleich die Formel gilt:

$$X = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta \equiv X(\theta), \tag{28}$$

sodaß umgekehrt X positiv bleibt und beständig wächst, solange θ sich in dem eben bestimmten Sinne bewegt und $\Delta(\theta)$ nicht verschwindet.

---

1) D. p. 153.

Substituiert man diese Werte von V und X in die drei Gleichungen (13), so liefern die beiden letzten, die nach dem bei (14) Bemerkten stets nach Y und Z auflösbar sind, auch diese Impulse als Funktionen von θ, und man erhält damit für die anfängliche Bahn des darstellenden Punktes m, oder die *Linie des anfänglichen Gleitens* Gleichungen von der Form:

$$(29) \qquad X = X(\theta), \quad X = Y(\theta), \quad Z = Z(\theta),$$

während schließlich die erste Gleichung (13) nach Substitution der so erhaltenen Werte von X, Y, Z unmittelbar auch noch U als Funktion von θ ergibt.

Übrigens kann man mit Hilfe der Gleichungen (19), (21) und der ersten Gleichung (20) diese aus (27), (28) und (13) folgenden Werte von Y, Z, U auch direkt durch die bestimmten Integrale darstellen[1]):

$$(30) \begin{cases} Y(\theta) \equiv -f\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)\cos\theta}{\Delta(\theta)}\,d\theta, \quad Z(\theta) \equiv -f\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)\sin\theta}{\Delta(\theta)}\,d\theta, \\ U = U_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)A(\theta)}{\Delta(\theta)}\,d\theta \equiv U(\theta). \end{cases}$$

Alle diese Formeln gelten also, falls nicht etwa der Zusammenstoß schon früher sein Ende erreicht haben sollte, sicher bis zu dem Momente, wo zum ersten Male $\Delta(\theta) = 0$ wird.

Wie verläuft nun aber der Zusammenstoß nach diesem Momente?

Sei also $\theta = \theta_1$ die erste Wurzel der Gleichung $\Delta(\theta) = 0$, welche θ erreicht, wenn es sich in dem durch das Vorzeichen von $\Delta(\theta_0)$ bestimmten Sinne von seinem Anfangswerte θ_0 aus ändert.

Nach dem Schlußsatze von § 4 ist $H(\theta_1)$ sicher nicht Null und daher auch

$$\lim_{\theta=\theta_1} \frac{(\theta-\theta_1)H(\theta)}{\Delta(\theta)} = H(\theta_1)\lim\frac{1}{\Delta'\theta} \text{ keinesfalls} = 0.$$

Überdies ist $\frac{d\theta}{\Delta(\theta)}$ stets > 0. *In der Grenze für $\theta = \theta_1$ wird daher das Integral:*

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)}\,d\theta$$

1) D. p. 150.

positiv oder negativ unendlich und damit nach (27) $V(\theta)$ selbst $= +\infty$ oder $= 0$, je nachdem $H(\theta_1) > 0$ oder < 0 ist.

Im Falle $H(\theta_1) > 0$ kann daher das anfängliche Gleiten unmöglich fortdauern, bis θ den Wert θ_1 erreicht hat, es muß vielmehr der ganze Zusammenstoß notwendig schon vorher zu Ende gekommen sein.

In der Tat, die Form (12) oder, was dasselbe ist, der Ausdruck:

$$(a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z)X + (a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z)Y + (a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z)Z$$

ist definit positiv. Für:

$$X = 1, \quad Y = -f\cos\theta, \quad Z = -f\sin\theta$$

geht aber nach (20) und (21) dieser Ausdruck über in:

$$A(\theta) - f(B(\theta)\cos\theta + C(\theta)\sin\theta) \equiv A(\theta) - fH(\theta);$$

es ist folglich für jedes θ:

$$A(\theta) - fH(\theta) > 0. \tag{31}$$

Nach (20) und (21) lehrt dies, daß während des anfänglichen Gleitens beständig:

$$\frac{dU}{dX} - f\frac{dV}{dX} > 0$$

und damit zugleich:

$$U - U_0 - f(V - V_0) > 0, \quad \text{oder} \quad U > U_0 + f(V - V_0)$$

bleiben muß.[1])

Wenn daher θ von θ_0 bis θ_1 ginge, so würde, indem hierbei V und also auch $f(V - V_0)$ über alle Grenzen wächst, umsomehr auch U über alle Grenzen wachsen. Nach § 2 ist aber der Anfangswert U_0 von $U < 0$, also muß notwendig während des anfänglichen Gleitens die relative normale Geschwindigkeit U der beiden Berührungspunkte gegen einander den Wert 0 erreichen, noch bevor $\theta = \theta_1$ wurde.

In dem betrachteten Falle $H(\theta_1) > 0$ trifft also der darstellende Punkt m, jedenfalls noch ehe $\theta = \theta_1$ wurde, mit der Ebene $U = 0$ zusammen.

---

1) D. p. 154.

Es sei $\theta = \theta'$ der Wert von θ, für den dies Zusammentreffen eintritt, *sodaß nach (30) die Gleichung*

$$U_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)\, A(\theta)}{H(\theta)}\, d\theta = 0 \tag{32}$$

zwischen θ_0 und θ_1 die Wurzel $\theta = \theta'$ besitzen muß.

Bei *unelastischen* Körpern endet dann der Zusammenstoß in dem Momente, wo $\theta = \theta'$ wurde, und es haben daher am Ende des Zusammenstoßes die Impulse X, Y, Z die Werte erhalten:

$$X = X(\theta'), \quad Y = Y(\theta'), \quad Z = Z(\theta'). \tag{33}$$

Sind dagegen die Körper *elastisch*, so erreicht nach den in § 3 angegebenen Prinzipien der Zusammenstoß sein Ende erst dann, wenn der darstellende Punkt auf der Linie (29) des anfänglichen Gleitens die Abscisse

$$X = (1 + \mu)\, X(\theta') \tag{34}$$

gewonnen hat. Die Körper gleiten also auch dann während des ganzen Zusammenstoßes aufeinander, und wenn $\theta = \theta''$ die zunächst an θ' gelegene Wurzel der Gleichung:

$$X(\theta) = (1 + \mu)\, X(\theta')$$

ist, so erhalten am Ende desselben X, Y, Z die Werte:

$$X = (1 + \mu)\, X(\theta') = X(\theta''), \quad Y = Y(\theta''), \quad Z = Z(\theta''). \tag{35}$$

Daß die Wurzel θ'' stets existiert und auch stets zwischen θ' und θ_1 liegt, folgt unmittelbar daraus, daß nach (28) mit $V(\theta)$ zugleich auch $X(\theta)$ über alle Grenzen wächst, wenn θ der Grenze θ_1 zustrebt.

Damit ist der Fall $H(\theta_1) > 0$ erledigt.[1])

Ist dagegen $H(\theta_1)$ negativ, so wird mit $\Delta(\theta)$ zugleich auch $V(\theta) = 0$ für $\theta = \theta_1$ und daher an dieser Stelle

$$\frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} = \frac{0}{0}.$$

Es scheint nicht leicht zu sein, sicher festzustellen, welcher Grenze (0 oder ∞) dieser Bruch sich für $\lim \theta = \theta_1$ nähert.

1) D. p. 158—160 wird gezeigt, daß im Falle $K > 0$ die Gleichung (25) niemals positive Wurzeln besitzt. Der Fall $H(\theta_1) > 0$ kann hiernach nur eintreten, wenn $K < 0$ ist.

Zum Glück ist das aber auch für unsere Zwecke gar nicht nötig. Nach der Ableitung der Formel (27) ist nämlich:

$$\frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} H(\theta) \equiv \frac{dV(\theta)}{d\theta}$$

und die Funktion $V(\theta)$ bleibt jetzt endlich und stetig im ganzen Intervall θ_0 bis θ_1. Daher gilt die Formel:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} H(\theta)\, d\theta \equiv V(\theta) - V_0$$

für jedes θ in diesem Intervalle und mit ihrer rechten Seite bleibt also, selbst wenn

$$\lim_{\theta = \theta_1} \frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} = \infty$$

sein sollte, das Integral links doch jedenfalls bestimmt und endlich auch in der Grenze für $\theta = \theta_1$. Da aber in dieser Grenze $H(\theta)$ nicht Null wird, so kann dieser Faktor unmöglich etwas zur Endlicherhaltung des Integrales beitragen, und es müssen daher notwendig auch das Integral

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta$$

und mit ihm zugleich die drei Integrale der Formeln (30) auch in der Grenze für $\theta = \theta_1$ bestimmt und endlich bleiben[1]), d. h. geometrisch ausgedrückt: Im Falle $H(\theta_1) < 0$ trifft die Linie des anfänglichen Gleitens, wenn sie von ihrem Ausgangspunkte O mit wachsendem X durchlaufen wird, die Gerade $V = 0$ stets in einem, im Endlichen gelegenen Punkte von den Koordinaten:

$$X = X(\theta_1), \quad Y = Y(\theta_1), \quad Z = Z(\theta_1). \tag{36}$$

Weiter kann es jetzt unter Umständen zwar natürlich wieder einen Wert θ' von θ zwischen θ_0 und θ_1 geben, der die Gleichung (32) erfüllt, also $U = 0$ macht, aber man sieht sofort, *daß ein solcher Wert θ' nun nicht mehr notwendig zu existieren braucht.*

---

1) Vgl. STOLZ, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I p. 402.

In der That, da das Integral in der Gleichung (32) nunmehr im ganzen Intervall θ_0 bis θ_1 bestimmt und endlich bleibt, so ist auch sein größter absoluter Wert M in diesem Intervall bestimmt und endlich, und man kann daher den absoluten Wert von $U_0 > M$ annehmen. Dann aber wird sicher die Gleichung (32) für kein θ im Intervall θ_0 bis θ_1 erfüllt.[1])

Wir sehen somit hier von vornherein zwei verschiedene Fälle sich absondern, *je nachdem der Wert θ' existiert oder nicht existiert*, oder, wie wir uns anschaulicher ausdrücken können, *je nachdem zwischen ihrem Ausgangspunkte O und ihrem Schnittpunkte (36) mit der Geraden $V = 0$ die Linie des anfänglichen Gleitens die Ebene $U = 0$ durchkreuzt, oder aber ihr gar nicht begegnet.*

Ist ersteres der Fall, *existiert also θ'*, und bestehen damit zugleich die Ungleichungen:

$$0 < X(\theta') < X(\theta_1),$$

so endet bei *unelastischen* Körpern der Zusammenstoß wieder in dem Momente, wo $\theta = \theta'$ wurde. Bei *elastischen* Körpern dagegen muß der darstellende Punkt noch über die Lage (33) hinaus bis zu einem Punkte von der Abscisse (34) fortwandern. Er überschreitet also, wie im Falle $H(\theta_1) > 0$ die Ebene $U = 0$ und bleibt dabei auch zunächst jedenfalls noch auf der Linie (29).

Erreicht er auf dieser jene Endabscisse eher als die Gerade $V = 0$, *ist also auch noch*:

$$(1 + \mu)\, X(\theta') < X(\theta_1),$$

so verläuft der ganze Zusammenstoß genau so wie im Falle $H(\theta_1) > 0$; beide Körper gleiten während desselben beständig aufeinander, und am Ende des Zusammenstoßes haben die Impulse X, Y, Z die Werte (35) erhalten.

Anders dagegen gestaltet sich der Verlauf, *sowohl wenn*

$$X(\theta_1) < (1 + \mu)\, X(\theta')$$

ist, als auch, wenn θ' überhaupt nicht existiert, und zwar zeigen sich dann wesentliche Unterschiede, *je nachdem $K > 0$ oder $K < 0$ ist.*

Wir wollen zunächst *den einfacheren Fall:*

$$K > 0$$

---

1) D. p. 155.

untersuchen, in welchem nach § 3 die relative tangentiale Geschwindigkeit $V = 0$ bleiben muß, sobald sie einmal Null wurde.

Ist dann $X(\theta_1) < (1 + \mu) X(\theta')$, erreicht also die Linie des anfänglichen Gleitens bei wachsendem X nach Durchkreuzung der Ebene $U = 0$ die Gerade $V = 0$ eher als den Punkt (35), so geht der darstellende Punkt, nachdem er auf der Linie (29) an die Gerade $V = 0$ gekommen ist, nunmehr, immer mit wachsendem X, auf dieser Geraden weiter, bis seine Abscisse den Wert (34) angenommen hat. Man erhält daher jetzt die Werte der Impulse X, Y, Z am Ende des Zusammenstoßes, indem man für X den Wert (34) nimmt und hierauf die Gleichungen (17) der Geraden $V = 0$ auflöst. Das Gleiten erhält sich nunmehr zwar die ganze Kompressionsperiode hindurch, geht aber während der Restitutionsperiode in ein reines Rollen über, das nun bis zum Ende des Zusammenstoßes dauert. Daraus erklärt sich unmittelbar, daß man in diesem Falle die Endwerte (33) der Impulse bei unelastischen Körpern nicht durch die Annahme $\mu = 0$ aus denen für elastische Körper erhalten kann. In der Tat sind ja die Voraussetzungen des Falles:

$$X(\theta') < X(\theta_1) < (1 + \mu)\, X(\theta')$$

eben nur möglich, solange $\mu > 0$ ist.

Wenn andererseits θ' *nicht existiert*, die Linie des anfänglichen Gleitens also zwischen ihrem Ausgangspunkte und ihrem Schnittpunkte mit der Geraden $V = 0$ überhaupt gar nicht an die Ebene $U = 0$ gelangt, so verfolgt zwar der darstellende Punkt m wieder die Linie (29), bis er im Punkte (36) die Gerade $V = 0$ erreicht hat, und geht dann auch wieder beständig auf dieser Geraden weiter, aber nunmehr wird für das Ende des Zusammenstoßes entscheidend der Schnittpunkt der Geraden $V = 0$ mit der Ebene $U = 0$, dessen Koordinaten

$$X = X_2, \quad Y = Y_2, \quad Z = Z_2 \tag{37}$$

sich durch Auflösung der drei linearen Gleichungen (15) und (17) ergeben. Diese Koordinaten sind dann zugleich die Werte der Impulse X, Y, Z am Ende des Zusammenstoßes, sooft die Körper *unelastisch* sind. Sind sie aber *elastisch*, so endet der Zusammenstoß erst in dem Momente, wo m auf der Geraden $V = 0$ die Abscisse

$$X = (1 + \mu) X_2 \tag{38}$$

gewonnen hat, und man erhält dann also die Endwerte von X, Y, Z, indem man für X den Wert (38) setzt und sodann die Gleichungen (17) nach Y und Z auflöst. Das Gleiten hört jetzt bereits während der Kompressionsperiode auf.

In diesem Falle ist aber zunächst noch ein Bedenken zu beseitigen. Da nämlich der darstellende Punkt m sich stets so bewegen muß, daß seine Abscisse X beständig wächst, so könnte er gar nicht vom Punkte (36) aus zum Punkte (37) gelangen, wenn $X_2 < X(\theta_1)$ wäre. Um also zu konstatieren, daß der Zusammenstoß wirklich den angegebenen Verlauf nimmt, bleibt noch übrig zu zeigen, daß in dem betrachteten Falle in der Tat

$$X_2 > X(\theta_1)$$

ist. Nun bestimmen sich die Koordinaten (37) aus den Gleichungen (15) und (17), d. h. aus den Gleichungen (13), nachdem darin $U = 0$ und $V = 0$ gesetzt wurde, und andererseits müssen die Koordinaten (36) des Schnittpunktes der Linie (29) und der Geraden $V = 0$ den Gleichungen (13) für $V = 0$ und $\theta = \theta_1$ genügen. Zieht man die entsprechenden Gleichungen voneinander ab, so folgt:

$$\begin{aligned}
a_{11}(X(\theta_1) - X_2) + a_{12}(Y(\theta_1) - Y_2) + a_{13}(Z(\theta_1) - Z_2) &= U(\theta_1),\\
a_{21}(X(\theta_1) - X_2) + a_{22}(Y(\theta_1) - Y_2) + a_{23}(Z(\theta_1) - Z_2) &= 0,\\
a_{31}(X(\theta_1) - X_2) + a_{32}(Y(\theta_1) - Y_2) + a_{33}(Z(\theta_1) - Z_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen aber ergeben, wenn man sie mittelst ihrer Determinante (14) auflöst:

$$\nabla(X(\theta_1) - X_2) = \frac{\partial \nabla}{\partial a_{11}} U(\theta_1).$$

Nun sind ∇ und $\frac{\partial \nabla}{\partial a_{11}}$ beide positiv. Da ferner in unserem Falle $U(\theta)$ im Intervalle θ_0 bis θ_1 allenthalben endlich und stetig bleibt und nirgends Null wird, so besitzt diese Funktion für $\theta = \theta_1$ noch dasselbe Zeichen wie $U(\theta_0)$ oder U_0. Mit U_0 ist demnach auch $U(\theta_1) < 0$ und somit in der Tat:

$$X(\theta_1) - X_2 < 0.$$

Damit sind die beiden Fälle, daß entweder θ' existiert und $X(\theta_1) < (1 + \mu) X(\theta')$ ist, oder aber θ' überhaupt nicht existiert, unter der Voraussetzung $K > 0$ absolviert. *Wie gestaltet sich*

in denselben nun aber der Verlauf des Zusammenstoßes, wenn $K < 0$ *ist?*

Nach dem Schlußsatze von § 3 kann dann von dem Momente $t = t_1$ an, wo θ den Wert θ_1 erreichte, für den $\Delta(\theta_1) = 0$, $H(\theta_1) < 0$ und $V = 0$ wird, die Geschwindigkeit V nicht Null bleiben, sondern muß sofort wieder ins Positive übergehen und die beiden Körper müssen fortfahren, aufeinander zu gleiten. Es müssen jetzt also die Gleichungen

$$\frac{dV}{dX} = H(\theta), \quad V\frac{d\theta}{dX} = \Delta(\theta) \tag{21}$$

nicht bloß, wie im Falle $K > 0$, bis zum Momente t_1, sondern auch nach demselben wieder gelten.

Während aber t den Wert t_1 passiert, kann der Winkel θ weder den Wert θ_1 behalten, noch auch stetig durch ihn hindurchgehen, denn da die erste Gleichung (21) für $\theta = \theta_1$

$$\frac{dV}{dX} = H(\theta_1) < 0$$

ergibt, so müßte sonst V im Momente t_1 durch Null ins Negative übergehen, was unmöglich ist.

In diesem Momente wird aber auch $\frac{d\theta}{dX} = \frac{0}{0}$, und, weil die Geschwindigkeit V verschwindet, ihre Richtung oder der Winkel θ selbst unbestimmt. Es braucht also in diesem Momente θ sich auch gar nicht mehr stetig zu ändern, dagegen ist V immer nur stetiger Änderungen fähig und muß durch Null wieder ins Positive gelangen. Daher muß notwendig in dem Momente, wo t den Wert t_1 passiert,

$$\Delta(\theta) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dV}{dX} = H(\theta) > 0$$

werden, und es bleibt hiernach gar keine andere Möglichkeit übrig, *als daß in diesem Momente der Winkel* θ *plötzlich von dem Werte* θ_1 *zu derjenigen Wurzel* $\theta = \theta_2$ *der Gleichung* $\Delta(\theta) = 0$ *überspringt, für welche* $H(\theta) > 0$ *wird*, eine Wurzel, die, wie wir in § 4 sahen, im vorliegenden Falle $K < 0$ immer existiert und auch immer einzig ist.

Da der normale Widerstand N sich ebenso wie die Geschwindigkeit V immer nur stetig ändern kann, so muß auch

sein Impuls von diesem Sprunge unberührt bleiben und daher im Intervall t_1 bis τ von demselben Anfangswerte

$$\int_0^{t_1} N dt = X(\theta_1)$$

aus wachsen, der seinen Endwert im Intervalle 0 bis t_1 bildet. Hiernach ist unmittelbar klar, daß die Gleichungen (21) vom Momente $t = t_1$ an die Lösungen zulassen:

$$(39) \qquad \theta = \text{konst} = \theta_2, \quad V = H(\theta_2)(X - X(\theta_1)),$$

und daß diese Lösungen auch der Forderung genügen, daß in diesem Momente die Geschwindigkeit V stetig von 0 aus wachsen muß. Man überzeugt sich aber auch leicht, daß umgekehrt diese Lösungen die einzigen sind, welche dieser Forderung entsprechen.[1])

Denn bliebe θ nicht konstant, so müßte nach (21) vom Momente t_1 an notwendig wieder:

$$\Delta(\theta) \frac{dV}{d\theta} = V H(\theta)$$

und daher für irgend ein konstantes c

$$(27') \qquad V = c e^{\int \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta}$$

werden. Nun lehrt die Untersuchung des früheren bestimmten Integrales

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta$$

im Anfange dieses Paragraphen unmittelbar, daß wegen $\Delta(\theta_2) = 0$ und $H(\theta_2) > 0$ auch das unbestimmte Integral

$$\nu \equiv \int \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta$$

für $\theta = \theta_2$ sicher unendlich wird. Nicht so unmittelbar klar ist es aber, ob dasselbe an dieser Stelle $+$ oder $-\infty$ wird. Indeß wird bei hinreichend kleinem absoluten Werte von ε für $\theta = \theta_2 + \varepsilon$

$$\frac{d\nu}{d\theta} = \frac{H(\theta_2 + \varepsilon)}{\Delta(\theta_2 + \varepsilon)} = \frac{H(\theta_2) + \varepsilon H' \theta_2}{\varepsilon \Delta' \theta_2},$$

1) Letzteres wird D. p. 156 unmittelbar als selbstverständlich angenommen.

und wegen $H(\theta_2) > 0$ ist der Ungleichung (26) zufolge $\Delta'\theta_2 < 0$. Demnach geht $\frac{dv}{d\theta}$ aus dem Positiven (durch ∞) ins Negative, v selbst also aus dem Wachsen ins Abnehmen über, wenn θ wachsend den Wert θ_2 passiert. An der Stelle $\theta = \theta_2$ kann daher das Integral v nicht $-\infty$, sondern muß notwendig $+\infty$ werden. Infolge dessen würde der Wert (27′) von V nur dann der Bedingung $V = 0$ für $\theta = \theta_2$ genügen, wenn man die Konstante $c = 0$ nehmen wollte; hierdurch aber würde V identisch Null werden, und das widerspricht der Forderung, daß $V > 0$ werden muß für $t > t_1$.

Die erhaltenen Lösungen (39) sind also in der Tat die einzigen, welche unser Problem vom Momente t_1 an zuläßt, und da nach denselben V nunmehr beständig wächst, also nie wieder Null werden kann, so behalten dieselben auch notwendig bis zum Ende des Zusammenstoßes Geltung.[1])

Hieraus folgt zunächst, daß die Reibungskomponenten P und Q in dem Momente t_1, wo der darstellende Punkt m an die Gerade $V = 0$ gelangt, von den Werten:

$$P = -fN\cos\theta_1, \quad Q = -fN\sin\theta_1$$

plötzlich zu den Werten

$$P = -fN\cos\theta_2, \quad Q = -fN\sin\theta_2$$

überspringen, um diese nun bis ans Ende beizubehalten. Trotz dieser sprungweisen Änderung bleiben aber ihre Impulse doch auch in diesem Momente stetig. Denn für $t > t_1$ wird:

$$Y = -f\int_0^{t_1} N\cos\theta\,dt - f\int_{t_1}^{t} N\cos\theta_2\,dt$$

$$= Y(\theta_1) - f\cos\theta_2\left(\int_0^{t} N dt - \int_0^{t_1} N dt\right),$$

d. h. man erhält für $t \gtreqless t_1$ oder $X \gtreqless X(\theta_1)$:

---

1) Vgl. dagegen die unrichtigen Angaben R. p. 295, Z. 13—17 v. o. R. hat aber auch weder die positive Richtung der z-Achse fixiert, noch die Geschwindigkeit S (die ihr Vorzeichen soll wechseln können) und ihre Richtung θ präzis definiert.

$$(40)\qquad \begin{cases} Y = Y(\theta_1) - f(X - X(\theta_1))\cos\theta_2, & \text{und ebenso:} \\ Z = Z(\theta_1) - f(X - X(\theta_1))\sin\theta_2. \end{cases}$$

Weiter aber können wir nunmehr auch leicht angeben, wie sich bei unserer jetzigen Voraussetzung $K < 0$ der weitere Verlauf des Zusammenstoßes in den beiden, allein nur noch fraglich gebliebenen Fällen gestaltet, wo die Linie des anfänglichen Gleitens entweder, nachdem sie die Ebene $U = 0$ mit dem Werte θ' von θ durchkreuzt hat, bei wachsendem X die Gerade $V = 0$ im Punkte (36) eher erreicht als den Punkt (35), oder aber zwischen ihrem Ausgangspunkte O und dem Punkte (36) überhaupt nicht an die Ebene $U = 0$ gelangt.

Beide Male wandert der darstellende Punkt m auf der Linie (29), bis er im Punkte (36) die Gerade $V = 0$ erreicht hat, verläßt nun aber diese Gerade sofort wieder, um eine *neue Bahn des Gleitens* einzuschlagen, nämlich die Gerade (40) zu durchlaufen.

Hatte er die Ebene $U = 0$ schon vor Erreichung der Geraden $V = 0$ passiert $[X(\theta') < X(\theta_1) < (1 + \mu)\, X(\theta')]$, so geht er nun auf der Geraden (40) weiter bis zum Punkte:

$$(41)\qquad \begin{cases} X = (1 + \mu)\, X(\theta'), \\ Y = Y(\theta_1) - f[(1 + \mu)\, X(\theta') - X(\theta_1)]\cos\theta_2, \\ Z = Z(\theta_1) - f[(1 + \mu)\, X(\theta') - X(\theta_1)]\sin\theta_2, \end{cases}$$

dessen Koordinaten zugleich die Werte der Impulse X, Y, Z am Ende des Zusammenstoßes sind.

War dagegen der darstellende Punkt m auf der Linie (29) an die Gerade $V = 0$ gekommen, ohne die Ebene $U = 0$ anzutreffen [existiert θ' nicht], so verfolgt er nunmehr die Gerade (40) zunächst bis zu ihrem Schnittpunkte mit jener Ebene. Die Abscisse $X = X_3$ dieses Schnittpunktes wird nach Substitution der Werte (40) von Y und Z durch die Gleichung (15) bestimmt, und mit der Erreichung desselben hat bei *unelastischen* Körpern zugleich auch der Zusammenstoß sein Ende erreicht. Sind aber die Körper *elastisch*, so überschreitet m die Ebene $U = 0$ und wandert immer auf der Geraden (40) weiter, bis er die Lage:

$$(42)\qquad \begin{cases} X = (1 + \mu)\, X_3, \\ Y = Y(\theta_1) - f[(1 + \mu)\, X_3 - X(\theta_1)]\cos\theta_2, \\ Z = Z(\theta_1) - f[(1 + \mu)\, X_3 - X(\theta_1)]\sin\theta_2 \end{cases}$$

erreicht hat, womit nun erst der Zusammenstoß zu Ende gekommen ist.

Beide Male gleiten die beiden Körper bis zum Ende des Zusammenstoßes fortwährend aufeinander, in dem Momente aber, wo der darstellende Punkt die Gerade $V = 0$ erreicht, ändert sich die Richtung des Gleitens (und also auch der Reibung) sprungweise, indem sie zugleich konstant wird, und nach (39) wächst die Geschwindigkeit V nunmehr von 0 an bis zum Ende des Zusammenstoßes. Der Moment aber, in welchem V durch 0 hindurchgeht, tritt im ersten Falle erst in der Restitutionsperiode, im zweiten bereits während der Kompressionsperiode ein, daher sich denn auch im ersten Falle die Endwerte (33) der Impulse bei unelastischen Körpern wiederum nicht durch die Annahme $\mu = 0$ aus den entsprechenden Werten (41) für elastische Körper ableiten lassen.

Ebenso wie früher für $K > 0$ bedarf aber auch jetzt wieder der zweite Fall noch sozusagen einer Verifikation. Denn da in diesem Falle der darstellende Punkt m von der Abscisse $X(\theta_1)$ aus, mit der er an die Gerade $V = 0$ gelangte, die Abscisse X_3 erreichen soll, so bleibt noch zu zeigen, daß auch wirklich

$$X_3 > X(\theta_1)$$

ist. Nach (15) und (40) ist nun $X = X_3$ der aus der Gleichung:

$$[a_{11} - f(a_{12}\cos\theta_2 + a_{13}\sin\theta_2)]\,X + f(a_{12}\cos\theta_2 + a_{13}\sin\theta_2)\,X(\theta_1) + a_{12}\,Y(\theta_1) + a_{13}\,Z(\theta_1) + U_0 = 0$$

folgende Wert von X. Nach (13) und (20) ergibt sich hieraus:

$$X_3 - X(\theta_1) = -\frac{U(\theta_1)}{A(\theta_2)}.$$

Nach (31) ist aber:

$$A(\theta_2) > fH(\theta_2) > 0,$$

während aus demselben Grunde, wie früher beim Beweise der Ungleichung $X_2 > X(\theta_1)$, $U(\theta_1) < 0$ ist. Man hat also in der Tat

$$X_3 - X(\theta_1) > 0.$$

§ 6.

Die besonderen Fälle $\Delta(\theta_0) = 0$ und $V_0 = 0$.

Bisher hatten wir immer angenommen, daß weder V_0 noch $\Delta(\theta_0) = 0$ sein sollte. Es bleiben also jetzt noch die beiden

Spezialfälle zu untersuchen, wo entweder $\Delta(\theta_0)$ oder $V_0 = 0$ ist. Da im Falle $V_0 = 0$ der Anfangswert θ_0 des Winkels θ an und für sich noch ganz unbestimmt ist, so ist klar, daß man nicht von vornherein gleichzeitig

$$V_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta(\theta_0) = 0$$

vorschreiben kann, während, wie sich zeigen wird, nachträglich diese beiden Annahmen sehr wohl mit einander bestehen können.

Sei nun zunächst gegeben $V_0 > 0$ *und* $\Delta(\theta_0) = 0$.

Dann müssen die beiden Körper notwendig wenigstens anfangs aufeinander gleiten, ihre Bewegung zunächst also jedenfalls den Gleichungen genügen:

$$\frac{dV}{dX} = H(\theta), \quad \frac{d\theta}{dX} = \frac{\Delta(\theta)}{V}.$$

Diese Differentialgleichungen werden befriedigt durch:

$$\theta = \text{const.} = \theta_0, \quad V - V_0 = H(\theta_0)\, X, \tag{43}$$

und da ihre rechten Seiten ebenso wie die ersten partiellen Differentialquotienten derselben nach den abhängigen Variabeln V und θ endlich und stetig bleiben, solange V nicht verschwindet, so sind diese Lösungen zugleich die einzigen, welche die gegebenen Anfangswerte θ_0 und V_0 besitzen.[1])

Es tritt somit gegen den allgemeinen Fall nur der Unterschied ein, daß schon gleich die anfängliche Bahn des darstellenden Punktes m eine gerade Linie, (nach (43) und (19)) nämlich die, vom Anfangspunkte O aus nach der Seite der $+ x$ gehende Gerade wird:

$$Y = - f X \cos\theta_0, \quad Z = - f X \sin\theta_0, \tag{44}$$

die somit jetzt an die Stelle der Linie (29) des anfänglichen Gleitens tritt. Sonst aber bleibt, mutatis mutandis, alles ganz so wie früher, nur daß die Vereinfachung der anfänglichen Bahn von m manches unmittelbar erkennen läßt, was im allgemeinen Falle eines besonderen Beweises bedurfte.

So sieht man aus der zweiten Formel (43) sofort, daß im Falle $H(\theta_0) > 0$ mit X zugleich auch V beständig wächst, m also niemals an die Gerade $V = 0$ gelangt, nach (15), (44) und (20) dagegen die Ebene $U = 0$ in dem Punkte:

---

1) Vgl. PEANO, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1892, p. 79.

$$(45)\quad X = -\frac{U_0}{A(\theta_0)} \equiv X', \quad Y = -fX'\cos\theta_0, \quad Z = -fX'\sin\theta_0$$

erreicht. In der That ist nach (31):

$$A(\theta_0) > fH(\theta_0) > 0$$

und wegen $U_0 < 0$ also auch $X' > 0$.

Im Falle $H(\theta_0) < 0$ dagegen nimmt der Wert (43) von V mit wachsendem X beständig ab, und die Gerade (44) trifft die Gerade $V = 0$ in dem Punkte:

$$(46)\quad X = -\frac{V_0}{H(\theta_0)} \equiv X_1 > 0, \quad Y = -fX_1\cos\theta_0, \quad Z = -fX_1\sin\theta_0.$$

Ist auch jetzt noch $A(\theta_0)$ und damit zugleich $X' > 0$, so kann man das Verhältnis der Anfangsgeschwindigkeiten V_0 und $-U_0$ doch immer so wählen, daß nach Belieben:

$$X_1 > \quad \text{oder} \quad < X'$$

wird, daß also die Gerade (44) zwischen ihrem Ausgangspunkte O und ihrem Schnittpunkt mit der Geraden $V = 0$ die Ebene $U = 0$ passiert, oder ihr nicht begegnet, und der letztere Fall tritt auch dann ein, wenn $A(\theta_0)$ oder $X' < 0$ ist, die Gerade (44) also auf der Seite der $+x$ überhaupt nicht an die Ebene $U = 0$ gelangt.

Man braucht hiernach, um aus den Resultaten des allgemeinen Falles sofort zu erkennen, wie der Zusammenstoß im vorliegenden Spezialfalle verläuft, nur

die Koordinaten (33) durch die Koordinaten (45),
„ „ (36) „ „ „ (46),
und „ „ (35) „ $(1+\mu)X'$, $-f(1+\mu)X'\cos\theta_0$, $-f(1+\mu)X'\sin\theta_0$

zu ersetzen. —

Noch einfacher gestaltet sich die Diskussion *des Falles* $V_0 = 0$[1]), in welchem nach (17) die Gerade $V = 0$ vom Anfangspunkte O ausgeht.

Ist K positiv, so durchläuft der darstellende Punkt m diese Gerade mit beständig wachsender Abscisse X, trifft im Punkte

$$(47)\qquad X = X_2^0, \quad Y = Y_2^0, \quad Z = Z_2^0,$$

dessen Koordinaten sich nach der Substitution $V_0 = 0$ aus den Gleichungen (15) und (17) bestimmen, mit der Ebene $U = 0$

1) R. p. 296.

zusammen, durchkreuzt dieselbe und wandert, immer auf der Geraden $V = 0$ weiter, bis er die Abscisse

$$X = (1 + \mu)\, X_2^0$$

erreicht hat, in welchem Momente der Zusammenstoß beendet ist. Die beiden Körper gleiten überhaupt gar nicht, sondern rollen gleich von Anfang an aufeinander.

Im Falle $K < 0$ dagegen kann m nicht auf der Geraden $V = 0$ bleiben. Die Geschwindigkeit V muß vielmehr von ihrem Anfangswerte Null aus sofort wachsen; ihre Anfangsrichtung θ_0 muß daher notwendig diejenige einzige Wurzel der Gleichung $\Delta(\theta) = 0$ sein, die $H(\theta) > 0$ macht. Nach dem, was wir in § 5 über den Fall $K < 0$ sahen, behält überdies die Geschwindigkeit V diese vollständig bestimmte Anfangsrichtung θ_0 konstant bei. Der darstellende Punkt durchläuft daher vom Anfangspunkte O aus die Gerade (44) mit beständig wachsender Abszisse X, wobei zugleich auch die Geschwindigkeit

$$V = H(\theta_0)\, X$$

beständig wächst. Es tritt also anhaltendes Gleiten und zwar immer in derselben Richtung ein, und am Ende des Zusammenstoßes haben die Impulse X, Y, Z die Werte gewonnen:

$$X = (1+\mu)\, X', \quad Y = -f(1+\mu)\, X' \cos\theta_0, \quad Z = -f(1+\mu)\, X' \sin\theta_0.$$

Beide Male sind gleich elastische Körper ins Auge gefaßt worden. Für unelastische hat man in beiden Fällen nur den Restitutionskoeffizienten $\mu = 0$ zu setzen.

§ 7.

Vereinfachungen im Falle $a_{31} = a_{12} = 0$.

Es bleibt zum Schlusse nur noch übrig, ein paar Worte über die Vereinfachungen hinzuzufügen, welche die Annahme $a_{31} = a_{12} = 0$ herbeiführt.

Zunächst wird dann:

$$K = f^2 (a_{22} a_{33} - a_{23}^2)^2 > 0,$$

und nach (20) vereinfachen sich die Gleichungen (21) zu:

$$\frac{dV}{dX} = -f(a_{22}\cos^2\theta + 2a_{23}\cos\theta\sin\theta + a_{33}\sin^2\theta) \equiv H(\theta),$$

$$V\frac{d\theta}{dX} = -f(a_{23}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{33} - a_{22})\cos\theta\sin\theta) \equiv \Delta(\theta).$$

Die Funktion $H(\theta)$ bleibt jetzt also beständig < 0 und man sieht auch ohne die Reibungsgesetze direkt, daß die Geschwindigkeit V, falls ihr Anfangswert V_0 nicht selbst schon $= 0$ war, beständig abnimmt, bis sie Null wird und dann auch dauernd Null bleibt.

Weiter fällt X aus den Gleichungen (17) ganz heraus, die Gerade $V = 0$ wird also parallel der Berührungsnormalen der beiden Körper und ihre Gleichungen liefern konstante Werte von Y und Z, sodaß die im allgemeinen Falle durch $Y(\theta_1)$ und Y_2, $Z(\theta_1)$ und Z_2 bezeichneten Koordinaten jetzt paarweise zusammenfallen.

Außerdem reduziert sich die erste Gleichung (20) auf:

$$\frac{dU}{d\overline{X}} = a_{11}$$

und gibt damit sofort:

$$U = U_0 + a_{11} X.$$

Die Ebene $U = 0$ wird also parallel der gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper und ihre Gleichung liefert unmittelbar:

$$X = -\frac{U_0}{a_{11}} > 0,$$

sodaß auch noch die früheren Abscissen $X(\theta')$ und X_2 zusammenfallen.

Die Gleichung $\Delta(\theta) = 0$ ferner wird unabhängig vom Reibungskoeffizienten f, und die Gleichung (25) reduziert sich, wenn man

$$H = f\overline{H}$$

setzt, auf das Quadrat der Gleichung:

$$(\overline{H} + a_{22})(\overline{H} + a_{33}) - a_{23}^2 = 0.$$

Den beiden Wurzeln H dieser Gleichung entsprechen in jedem Intervall von der Größe 2π vier Wurzeln θ der Gleichung $\Delta(\theta) = 0$, die nach (23), falls $a_{23} \neq 0$ ist, mit ihnen durch die Formel:

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\overline{H} + a_{22}}{a_{23}} = -\frac{a_{23}}{\overline{H} + a_{33}}$$

verbunden sind, dagegen, wenn auch $a_{23} = 0$ ist, mit jenen Wurzeln zusammen durch die Gleichungen gegeben werden:

$$\bar{H} = -a_{33}, \quad \cos\theta = 0,$$

und

$$\bar{H} = -a_{22}, \quad \sin\theta = 0.$$

Den letzten Fall $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$ findet man bei ROUTH I, p. 288—293 direkt behandelt.

Ist endlich:

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = a_{33} - a_{22} = 0,$$

so wird $\Delta(\theta)$ identisch Null und die Gleichungen (21) reduzieren sich auf:

$$\frac{dV}{dX} = -fa_{22}, \quad V\frac{d\theta}{dX} = 0,$$

ergeben also, falls $V_0 > 0$ ist:

$$V = V_0 - fa_{22}X, \quad \theta = \text{const.} = \theta_0,$$

sodaß nach (19) als Linie des anfänglichen Gleitens wieder die Gerade (44) auftritt und die Richtung des Gleitens konstant bleibt. V wird Null für:

$$X = \frac{V_0}{fa_{22}} > 0,$$

welcher Wert nunmehr an die Stelle des früheren $X(\theta_1)$ tritt, und die Gleichungen der Geraden $V = 0$ werden:

$$Y = -\frac{V_0\cos\theta_0}{a_{22}}, \quad Z = -\frac{V_0\sin\theta_0}{a_{22}}.$$

Aus § 5 ergibt sich daher im letzten Falle, der dem freien Zusammenstoße zweier homogenen Kugeln entspricht, für Körper vom Restitutionskoeffizienten μ sofort das einfache Resultat:

Je nachdem

$$-(1+\mu)\frac{U_0}{a_{11}} < \text{ oder } > \frac{V_0}{fa_{22}}$$

ist, erhalten am Ende des Zusammenstoßes die Impulse X, Y, Z die Werte[1]):

---

1) Setzt man die beiden Kugeln als gleich voraus, so erhält man aus den ersten Werten genau dieselben Formeln, die CORIOLIS in seiner *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* (p. 126) für den Zusammenstoß zweier Bälle auf dem Billard angibt. Im Kapitel VII, wo gezeigt werden soll, wie die früheren Formeln zu modifizieren sind, wenn das Gleiten während des Zusammenstoßes aufhört, hätte er eigentlich auch zu den Formeln gelangen müssen, die sich in dem genannten Spezialfalle aus dem zweiten der obigen Wertsysteme

$$X = -(1+\mu)\frac{U_0}{a_{11}},\quad Y = f(1+\mu)\frac{U_0}{a_{11}}\cos\theta_0,\quad Z = f(1+\mu)\frac{U_0}{a_{11}}\sin\theta_0,$$

oder die Werte:

$$X = -(1+\mu)\frac{U_0}{a_{11}},\quad Y = -\frac{V_0\cos\theta_0}{a_{22}},\quad Z = -\frac{V_0\sin\theta_0}{a_{22}}.$$ —

ergeben. Hier aber wird entschieden übersehen, daß es beim Zusammenstoß zweier Bälle nicht, wie beim Stoß eines Balles gegen die Bande, auf die absolute tangentiale Geschwindigkeit des Berührungspunktes eines einzigen Balles, sondern auf die relative tangentiale Geschwindigkeit der Berührungspunkte beider Bälle gegen einander ankommt. Die p. 144 gegebenen Formeln dürfen nur auf den Stoß gegen die Bande bezogen werden. Will man sie auf den Zusammenstoß zweier Bälle anwenden, so muß man in ihnen den Faktor $\frac{2}{7}$ durch $\frac{1}{7}$ ersetzen. Überhaupt aber muß ich gestehen, daß mir die ganze Betrachtungsweise von CORIOLIS, die darauf hinausläuft, den Einfluß der Billardebene völlig zu vernachlässigen, also die Zusammenstöße auf dem Billard als freie zu betrachten, noch nicht als absolut einwurfsfrei erscheinen will.

Druckfertig erklärt 20. VII. 1902.]

Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie.

Von

Heinrich Liebmann.

In einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung[1]) habe ich von einer Zuordnung zweier gewisser rechtwinkligen Dreiecke mehrfach Gebrauch gemacht, die Lobatschefskij angegeben hat.[2]) Mit Hilfe dieser zugeordneten Dreiecke wurde eine bestimmte involutorische Transformation der nichteuklidischen Ebene untersucht, die in folgender Weise definiert war.[3]) Der Punkt P und sein Bildpunkt P_1 liegen beide auf demselben Lot zu einer bestimmten Geraden, der Fundamentalachse f, und die beiden Abstände y und y_1 der Punkte P und P_1 von der Fundamentalachse sind durch die Gleichung

$$\Pi(y) + \Pi(y_1) = \tfrac{1}{2}\pi$$

miteinander verknüpft. $\Pi(y)$ bedeutet dabei in bekannter Weise den zum Lote y gehörigen Parallelwinkel.[4])

Die Geraden der Ebene (soweit sie in der Halbebene oberhalb f gelegen sind), verwandeln sich dabei in *Cykeln*.[5]) Jede Gerade g, die f nicht schneidet[6]) und die ein gemeinsames Lot

---

1) „Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln" (diese Berichte 1901 S. 477—491). Im folgenden angeführt mit „Li".

2) N. J. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen. Deutsch mit Anmerkungen von F. Engel. (Leipzig 1899.) S. 18. — Im folgenden wird das Buch angeführt mit „Lo".

3) „Li" S. 483. 4) „Lo" S. 167.

5) Wir wollen Kreise, Grenzkreise und Überkreise mit dem gemeinsamen Namen „Cykeln" bezeichnen.

6) „Li" § 3, 1 (S. 483).

$p = FG$ mit f hat (F sei der Fußpunkt des Lotes p auf f, G der auf g), verwandelt sich in einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt F und dem Halbmesser p_1 (wo $\Pi(p) + \Pi(p_1) = \frac{1}{2}\pi$).

Eine Gerade g, die zur Fundamentalachse parallel ist[1]), verwandelt sich in einen (halben) Grenzkreis (Grenzlinie, Paracykl), von dem f eine Achse ist und der Fußpunkt des zu g parallelen Lotes i auf f der zugehörige Scheitel.

Eine Gerade g endlich, die f unter dem Winkel $\alpha = \Pi(a)$ schneidet[2]), verwandelt sich in einen (halben) Überkreis (Abstandslinie, Hypercykl), dessen Mittellinie im Punkte (g, f) auf f senkrecht steht, und bei dem der Abstand von der Mittellinie gleich a ist.

Am einfachsten übersieht man das Verhalten der geraden Linien bei der Abbildung in den Figuren 1a und 1b. Den drei

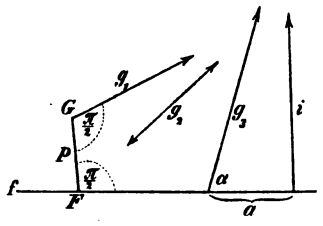


Fig. 1a.

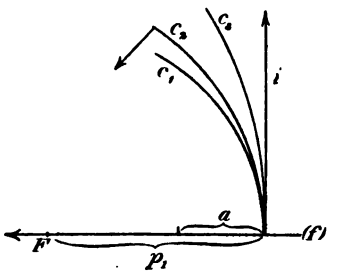


Fig. 1b.

Geraden g_1 (hat mit f ein gemeinsames Lot), g_2 (ist parallel zu f), g_3 (schneidet f), die alle drei zu dem auf f errichteten Lote i parallel sind, entsprechen die drei Halbcyklen c_1 (Kreis mit dem Mittelpunkt F), c_2 (Grenzkreis), c_3 (Überkreis mit dem Mittellinienabstand a, wo $\alpha = \Pi(a)$), die in dem Punkt f, i einander berühren und die auf f senkrecht stehen. —

Diese Ergebnisse sollen nun hier ergänzt werden. Man kann nämlich zeigen, daß bei der L.-transformation[3]) nicht nur die Geraden in Cyklen übergehen, sondern daß überhaupt *jeder* Cykl sich wieder in einen Cykl verwandelt. Die L.-transformation ist also eine *Kreisverwandtschaft.*

---

1) „Li" § 3, 2 (S. 484). 2) „Li" § 3, 3 (S. 484).

3) Als „L.-transformation" wollen wir die besprochene T. von jetzt an bezeichnen.

Indem man die L.-transformation zuerst auf den Raum ausdehnt (§ 1) und sich ferner einer einfachen Abbildung der Ebenen des Raumes auf die Cyklen der Ebene (§ 2) bedient, kann man dies leicht beweisen (§ 3).

Im Zusammenhang hiermit gelingt es dann auch, *alle* anderen Kreisverwandtschaften auf rein synthetischem Wege abzuleiten und zu zeigen, daß die Winkel erhalten bleiben. Von besonderer Wichtigkeit ist, daß die Kreisverwandtschaften mit den Spiegelungen und den Bewegungen des Raumes der nichteuklidischen Geometrie in sehr einfacher Weise zusammenhängen (§ 4).

Bemerkt sei noch, daß viele der hier abgeleiteten Sätze von Herrn HAUSDORFF[1]) auf analytischem Wege bewiesen worden sind.

§ 1.

Die L.-transformation des Raumes.

Wir wollen die L.-transformation auf den Raum ausdehnen, und vor allem untersuchen, wie sich dabei die Ebenen je nach ihrer Lage zur Fundamentalebene transformieren (1—3). Im Zusammenhang damit ergibt sich noch ein Satz über die Schnittkurven von *Sphären.*[2]) —

Man erweitert die L.-transformation in folgender Weise auf den Raum:

Man fällt vom Punkte P aus das Lot z auf die Fundamentalebene F. Auf diesem Lot trage man dann die Strecke z_1, die gegeben ist durch die Gleichung

$$\Pi(z) + \Pi(z_1) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

vom Fußpunkt aus nach derselben Seite des Raumes ab, wo P gelegen ist. Der Endpunkt P_1 dieser Strecke ist dann das Bild des Punktes P.

Mit Hilfe der L.-transformation der Ebene kann man nun die L.-transformation des Raumes leicht untersuchen. Schneidet man den Raum nämlich durch eine Ebene I, die auf F senkrecht steht, so bekommt man in dieser Ebene eine L.-transformation, wobei die Gerade (I, F) Fundamentalachse ist.

---

1) „Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie". (Diese Berichte 1899, S. 161—214.) Im folgenden angeführt mit „Ha".

2) Mit dem gemeinsamen Namen „Sphären" bezeichnen wir fortan Kugeln, Grenzkugeln und Überkugeln.

1. Ebenen, die ein *gemeinsames* Lot mit F haben: Man lege durch das gemeinsame Lot p eine Ebene I. I schneidet dann E und F senkrecht, und es verwandelt sich bei der L.-transformation die Gerade (F, E) in einen Halbkreis mit dem Halbmesser p_1 (wo $\Pi(p) + \Pi(p_1) = \frac{1}{2}\pi$), dessen Mittelpunkt der Fußpunkt von p auf F ist.

Hieraus folgt:

Eine Ebene E, welche von F den kürzesten Abstand p hat, verwandelt sich bei der Transformation in eine Halbkugel vom Halbmesser p_1, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt von p auf F ist.

2. *Schneidende* Ebenen: Durch einen beliebigen Punkt der Schnittgeraden (E, F) lege man die Ebene I, die (E, F), also die beiden Ebenen E und F senkrecht schneidet. Ist $\alpha = \Pi(a)$ der Neigungswinkel von E und F, so verwandelt sich die Gerade (E, I) in einen (halben) Überkreis, dessen Mittellinie das in dem Punkte (E, I, F) auf F errichtete Lot ist, und dessen Mittellinienabstand gleich a ist.

Es folgt daraus:

Die Ebene E, die die Fundamentalebene F in der Geraden (E, F) und unter dem Neigungswinkel α schneidet ($\alpha = \Pi(a)$), verwandelt sich in eine Überkugel, deren Mittelebene auf F in (F, E) senkrecht steht, während der Mittelebenenabstand gleich a ist.

Folgerung: Man kann nun leicht zeigen, daß jeder Schnitt einer Überkugel mit einer beliebigen Ebene I ein *Cykl* ist. Man fälle von einem beliebigen Punkte der Ebene I aus ein Lot auf die Mittelebene M der Überkugel und von dem Fußpunkt dieses Lotes aus wieder ein Lot auf I. Durch diese beiden Lote ist eine Ebene F bestimmt (oder unendlich viele, wenn die beiden Lote zusammenfallen), die einerseits Durchmesserebene der Überkugel ist, außerdem aber sowohl auf I wie auf M senkrecht steht. Nun führe man die L.-transformation aus, wobei F als Fundamentalebene dient.

Die Überkugel verwandelt sich in eine Ebene, jeder auf I gelegene Punkt geht wieder in einen auf I gelegenen Punkt über, also geht der Schnitt von I mit der Überkugel in eine Gerade über, d. h. er ist ein Cykl.

Im einzelnen ergibt sich folgendes:

Schneidet I die Mittelebene, so verwandelt der Schnitt mit der Überkugel sich durch die L.-transformation in eine Gerade, die (F, J) schneidet, d. h. er ist ein Überkreis.

Ist I parallel zu M (über parallele Ebenen vgl. auch unter 3), so sind (I, F) und (F, M) zwei parallele Gerade. Das Bild der Schnittkurve von I und der Überkugel wird dann eine Gerade, die zu (I, F) parallel ist; denn das Bild der Überkugel, die Ebene F und die Ebene I sind dann drei Ebenen, von denen die erste die zweite und die zweite die dritte in je einer Geraden trifft, die zu einander parallel sind; die dritte Schnittgerade muß also auch dazu parallel sein.[1])

Schneidet endlich I die Mittelebene nicht (und trifft I überhaupt die Überkugel in mehr als einem Punkt), so wird die Schnittkurve ein Kreis.

3. *Parallele* Ebenen[2]): Betrachten wir nun endlich eine Ebene E, die F nicht schneidet und auch kein gemeinsames Lot mit F besitzt.

Wir benützen wieder eine Hilfsebene I, die die beiden Ebenen senkrecht schneidet. Die Geraden (E, I) und (F, I) sind dann parallel. Würden sie sich nämlich schneiden oder ein gemeinsames Lot haben, so würden gegen die Voraussetzung auch E und F sich schneiden oder ein gemeinsames Lot haben. — Man errichte noch auf (E, I) die in der Ebene E gelegenen Lote und wende nun die L.-transformation des Raumes an. Dabei wird aus (E, I) ein Grenzkreis, aus jenen Loten aber Halbkreise; die entstehende Fläche kann man also durch Drehung eines Grenzkreises um seine Achse erhalten, d. h.:

Das Bild der Ebene ist eine Grenzkugel, wovon die in F gelegene zu E parallele Gerade EI eine Achse ist; der Scheitel auf dieser Achse ist der Fußpunkt des auf (IF) parallel zu (IE) errichteten Lotes. —

Bei dieser Abbildung tritt übrigens mit besonderer Deutlichkeit ein Unterschied zwischen der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie hervor:

Sind in der euklidischen Geometrie zwei parallele Ebenen gegeben, so gibt es zu *jeder* Geraden in der ersten Ebene eine Schar von parallelen Geraden in der zweiten Ebene.

1) Zwei Parallelen sind der dritten Geraden parallel, in der zwei durch die beiden ersten Geraden gelegte Ebenen einander schneiden („Lo" S. 169).

2) Herr SIMON nennt solche Ebenen, die wir hier mit HAUSDORFF als parallele bezeichnet haben, „Zwischenebenen". (Jahresbericht der D. Math. Vereinigung 1899, S. 67.)

Anders in der nichteuklidischen! Hier schließt man aus dem Umstand, daß die Grenzkugel nur an den Durchmesserebenen in Grenzkreisen getroffen wird (von den andern Ebenen in Kreisen), daß es nur eine *einzige* Richtung gibt derart, daß Parallelen dazu in beiden Ebenen vorhanden sind.

4. *Die Schnittkurven von zwei Sphären:* Die abgeleiteten Sätze ermöglichen es, zu beweisen, daß zwei Sphären, die sich schneiden, sich in einem Cykl schneiden.[1]) — Dieser Satz ist nur dann unmittelbar aus der Definition der Sphären abzuleiten, sobald eine von ihnen eine Kugel ist; die Schnittkurve muß dann notwendig ein Kreis sein. —

Zum Beweise hat man eine gemeinsame Diametralebene zu bestimmen, was immer möglich ist: Sind die beiden Sphären Überkugeln, so nehme man eine der Ebenen, die auf beiden Mittelebenen senkrecht stehen. Ist eine davon Grenzkugel, so lege man durch eine beliebige Achse der Grenzkugel eine Ebene, die auf der Mittelebene der Überkugel senkrecht steht. Sind endlich beide Flächen Grenzkugeln, so bestimmen die durch einen beliebigen Raumpunkt zu den beiden Achsenrichtungen gelegten Parallelen eine solche Ebene F.

Benützt man nun F als Fundamentalebene einer L.-transformation, so verwandeln sich die beiden Sphären in Ebenen, ihre Schnittkurve also in eine Gerade, d. h. sie ist ein Cykl.

Eine genauere Betrachtung der einzelnen Fälle lehrt folgendes:

Zwei Überkugeln, die sich längs einer Kurve schneiden, schneiden sich in einem Kreis, einem Grenzkreis oder einem Überkreis, je nachdem ihre Mittelebenen ein gemeinsames Lot haben, parallel sind oder sich schneiden.

Eine Überkugel und eine Grenzkugel, die eine Kurve gemein haben, schneiden sich in einem Grenzkreis oder in einem Kreis, je nachdem die Achsenrichtung der Grenzkugel zur Mittelebene des Überkugel parallel ist oder nicht.

---

1) Bedient man sich der Cayley-Kleinschen Darstellung der nichteuklidischen Geometrie, so kommt der Satz darauf zurück, daß zwei Flächen zweiten Grades, die von derselben Fläche zweiten Grades umhüllt werden, einander in Kegelschnitten treffen, die die gemeinsame Umhüllungsfläche berühren (Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes I. Leipzig 1898. S. 243).

Zwei Grenzkugeln, die eine Kurve gemein haben, schneiden sich in einem Grenzkreis oder in einem Kreis, je nachdem ihre Achsenrichtungen parallel sind oder nicht.

§ 2.

Die Lehre von den Randbildern.

Die Untersuchung der L.-transformation des Raumes hat gelehrt, daß die drei verschiedenen Arten von Ebenen sich in (halbe) Sphären verwandeln. Die Spuren dieser Sphären auf der Fundamentalbene F sind Cykeln, die wir die *Randbilder* der Ebenen des Raumes auf F (oder kurzweg die Randbilder) nennen wollen.[1])

Die Definition der Randbilder läßt sich auch so aussprechen: Man bestimme in jeder der Ebenen I, die zu E und F senkrecht stehen, den Fußpunkt des auf (I, F) errichteten zu (I, E) parallelen Lotes. Der Ort dieser Fußpunkte ist dann das Randbild von E auf F.

Je nachdem E die Ebene F schneidet, zu ihr parallel ist, oder ein gemeinsames Lot mit F besitzt, wird das Randbild ein Überkreis, ein Grenzkreis oder ein Kreis sein. — Die Randbilder der auf F senkrecht stehenden Ebenen I fallen mit den Geraden (F, I) zusammen. —

Wie zu jeder Ebene ein Randbild gehört, so bestimmt umgekehrt jeder Cykl eine Ebene, deren Randbild er ist. (Beim Überkreis erhält man eine Halbebene.)

1. *Die Winkel der Randbilder.* Von besonderer Wichtigkeit für die weiteren Untersuchungen ist der Satz: *Der Winkel zweier Ebenen E_1 und E_2 ist gleich dem Winkel ihrer Randbilder r_1 und r_2.*

Beim Beweis dieses Satzes brauchen wir nur den Hilfssatz, daß die Summe der Kantenwinkel des Parallel-n-Kantes gleich $2n - 4$ rechten Winkeln ist.[2]) Ferner ist natürlich immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die Ebenen sich schneiden, nicht etwa parallel sind (in diesem Falle würden die Randbilder sich berühren) oder sich nicht schneiden (dann haben auch r_1 und r_2 keinen Punkt gemein).

---

1) Vgl. „Ha" S. 177.

2) „Lo" S. 172.

Behandeln wir zuerst den Fall, wo beide Kreise Überkreise sind (Fig. 2). In dem einen der beiden Schnittpunkte von r_1 und r_2, dem Punkte S, errichten wir das Lot SS' auf F.

Die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes p_1 auf E_1 und F bezeichnen wir mit P_1 (auf E_1) und Q_1 (auf F). Die entsprechende Bedeutung in Bezug auf E_2 und F haben P_2 und Q_2.

$P_1Q_1Q_2P_2$ bestimmen eine Ebene, die die Schnittgerade von E_1 und E_2 in dem Punkte T trifft. Die Schnittgerade TT' ist dann parallel zu SS'. Ferner ist die Schnittgerade der Ebene E_1 und der Ebene R_1 $(= S'SQ_1P_1)$ parallel zu SS'; wir wollen sie mit P_1P_1' bezeichnen.

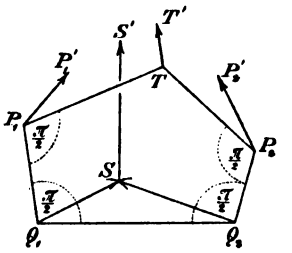


Fig. 2.

Ziehen wir weiter $P_2P_2' \parallel SS'$, so liegen $S'SQ_2P_2P_2'$ in einer Ebene R_2.

Nun ist $R_1 \perp E_1$ und $R_2 \perp E_2$.

Da jetzt die vier Kanten des Vierkants aus den Ebenen E_1, R_1, R_2 und E_2, nämlich die Geraden P_1P_1', SS', P_2P_2' und TT' untereinander parallel sind, so ist nach dem vorausgeschickten Satze

$$\sphericalangle(E_1E_2) + \sphericalangle(E_2R_2) + \sphericalangle(R_2R_1) + \sphericalangle(R_1E_1) = 2\pi,$$

also

$$\sphericalangle(R_1R_2) + \sphericalangle(E_1E_2) = \pi.$$

Es folgt:

$$\sphericalangle(E_1E_2) = \sphericalangle(r_1r_2),$$

da ja auch, weil Q_1S auf r_1 und Q_2S auf r_2 in S senkrecht steht und daher

$$\sphericalangle(R_1R_2) + \sphericalangle(r_1r_2) = \pi.$$

Wenn also die Randbilder der beiden Ebenen zwei sich schneidende Kreise sind, dann ist der Winkel der Ebenen dem Winkel der Randbilder gleich, w. z. b. w. —

Wenn E_1 und F ein gemeinsames Lot haben $(p_1 = P_1Q_1)$, während E_2 und F sich in einer Geraden schneiden, so benützen wir eine Hilfsebene, die p_1 enthält und (E_2F) senkrecht schneidet, etwa in dem Punkte Q_2. Ferner errichten wir noch das in der Ebene E_2 liegende Lot P_2P_2' auf (E_2, F), das zu der Schnittlinie TT' von E_1 und E_2 parallel ist.

Indem man nun das aus den Ebenen

$$E_1,\ (P_1'P_1Q_1SS'),\ (S'SP_2P_2')\ \text{und}\ E_2$$

gebildete Parallelvierkant betrachtet, gelangt man zu dem zu beweisenden Satz. —

Schneiden sich E_1 und E_2 in einer Geraden TT', die F in dem Punkte T trifft, und bezeichnen wir den einen Schnittpunkt der Randbilder mit S, das in ihm auf F errichtete Lot mit SS', die Fußpunkte der von S auf (E_1F) und (E_2F) gefällten Lote mit P_1 und P_2, ferner mit P_1P_1' und P_2P_2' die auf (E_1F) bezw. (E_2F) in E_1 bezw. E_2 errichteten Lote, so erhält man den Satz durch Betrachtung des Parallelvierkants, dessen Kanten SS', P_1P_1', TT' und P_2P_2' sind. —

Sind E_1 und E_2 beide parallel zu F, so hat man zuerst das gemeinsame Lot von F und der Schnittgeraden (E_1E_2) zu bestimmen und durch dieses dann eine Hilfsebene zu legen, die (E_1E_2) senkrecht schneidet. SS' sei wieder das auf F in dem einen Schnittpunkt S der Randbilder senkrecht stehende Lot, R_1 und R_2 zwei Hilfsebenen, die durch SS' gehen, und von denen die eine auf E_1, die andere auf E_2 senkrecht steht. $R_1E_1E_2R_2$ sind die vier Ebenen, die das Parallelvierkant bilden, mit Hilfe dessen der Satz zu beweisen ist. —

Ähnlich hat man in allen noch übrig bleibenden Fällen zu verfahren, und wird immer auch zum Ziele gelangen, indem man allein den Satz von der Winkelsumme im Parallel-n-Kant anwendet.

Zusatz: Während also zwei Ebenen sich immer unter demselben Winkel schneiden wie ihre Randbilder, gibt es dagegen *keine* einfachen Beziehungen zwischen den sich nicht schneidenden Ebenen und ihren Randbildern.

Wenn z. B. zwei Ebenen E_1 und E_2 gegeben sind, die den kürzesten Abstand $p = P_1P_2$ haben (P_1 sei der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes auf E_1, P_2 auf E_2) und die die Fundamentalebene F unter den Winkeln $\alpha_1 = \Pi(a_1)$ und $\alpha_2 = \Pi(a_2)$ schneiden, so ist p nicht etwa in der Ebene F der kürzeste Abstand oder die Länge der gemeinsamen Tangente der beiden Randbilder. Fällt man aber von P_1 auf (E_1, F) das Lot P_1Q_1 und ebenso von P_2 das Lot P_2Q_2 auf (E_2, F), so ist p die Länge der inneren Tangente der Kreise, die mit den Halbmessern a_1 und a_2 um P_1 und P_2 als Mittelpunkte beschrieben sind.

2. *Kreisbüschel* und *Kreisbündel.* Der Umstand, daß die einfache Zuordnung zwischen den Randbildern und den Ebenen vorhanden ist, ermöglicht es, in der LOBATSCHEFSKIJschen Geo-

metrie sehr leicht, die Übersicht über die Kreissysteme zu bekommen.[1])

Als Büschel von Kreisen werden wir eine Schar bezeichnen, die die Randbilder der Ebenen eines Büschels sind. Je nach der Art des Ebenenbüschels (reelle Achse, Parallelbüschel, Ebenen senkrecht zu einer Geraden) sind drei Fälle zu unterscheiden, und weiter je drei Fälle nach der Lage des Büschels zur Fundamentalebene. Im ganzen gibt es also neun Arten von Kreisbüscheln (genauer: von *Cyklen*büscheln), unter denen sich auch die drei Arten von Geradenbüscheln befinden.

Aus dem Zusammenhang mit den Ebenenbüscheln ergeben sich unmittelbar die Sätze:

Sind in einem Cyklenbüschel zwei Gerade enthalten, so besteht er aus lauter Geraden. (Denn wenn zwei Ebenen eines Büschels auf einer Ebene senkrecht stehen, so stehen alle Ebenen des Büschels auf ihr senkrecht.)

Ebenso:

Zu jedem Büschel von Cyklen gibt es einen Orthogonalbüschel, so daß jeder Cykl des einen Büschels jeden Cykl des andern Büschels orthogonal schneidet. —

Die Übersicht über die Kreisbündel (genauer: Bündel von Cyklen) läßt sich in gleicher Weise gewinnen, wie die über die Büschel.[2])

§ 3.

Weiteres über die L.-transformation der Ebene.

Die gefundenen Sätze reichen aus, um zu zeigen, daß die L.-transformation der Ebene eine Kreisverwandtschaft ist, d. h. daß sie *jeden* Cykl wieder in einen Cykl verwandelt (1) und hieraus folgt weiter, daß die L.-transformation des Raumes jede Sphäre in eine Sphäre verwandelt (2). Hieraus ergeben sich weitere Folgerungen. —

1) Wenn in einer Ebene F eine L.-transformation mit der Fundamentalachse f gegeben ist, so ergänze man sie zu einer L.-transformation des Raumes, wobei die auf F in f senkrecht stehende Ebene G zur Fundamentalebene zu nehmen ist.

---

1) „Ha" S. 178 findet man eine eingehende Untersuchung der einzelnen Fälle.

2) „Ha" S. 178.

Ein auf F in einem Punkt P errichtetes Lot PP' verwandelt sich in einen Halbkreis, der die Ebene F in dem Bildpunkt P_1 von P durchdringt.

Da nun unter einander parallele Gerade sich in Cyklen verwandeln, die die Fundamentalebene G in demselben Punkte senkrecht treffen, da ferner die Lote auf G in sich übergehen, so wird die Gerade QQ' (die auf G senkrecht steht und zu PP' parallel ist), die Ebene G in demselben Punkte treffen, wie der erwähnte Halbkreis, d. h. man braucht die Ebene G nur um die Achse f umzuklappen, um aus Q das Bild P_1 von P zu erhalten.

Wendet man den Begriff des „Randbildes" an, so ergibt sich hieraus die Regel:

Man erhält das Bild eines Cykls, indem man die zu dem Cykl als Rand gehörige Ebene E konstruiert, dann auf der Ebene G, die in der Fundamentalachse f senkrecht zu F errichtet ist, das Randbild von E konstruiert und dieses in F umklappt.

Hieraus folgt, daß jeder Cykl wieder in einen Cykl übergeht, d. h. daß die L.-transformation eine Kreisverwandtschaft ist. —

Drei Fälle sind zu unterscheiden, wenn man danach fragt, in was für einen Cykl ein gegebener Cykl übergeht.

a) Wenn der Cykl (c) mit der Achse (f) überhaupt keinen Punkt gemein hat, so ist sein Bild ein *Kreis*, denn die Ebene E schneidet in diesem Fall die Hilfsebene G nicht; ihr Randbild auf G wird also ein Kreis und demnach das Bild c_1 von c auch ein Kreis.

b) Ein Cykl, der f berührt, wird ein Grenzkreis; denn die Ebene E ist in diesem Fall zur Hilfsebene G parallel, ihr Randbild auf G also ein Grenzkreis.

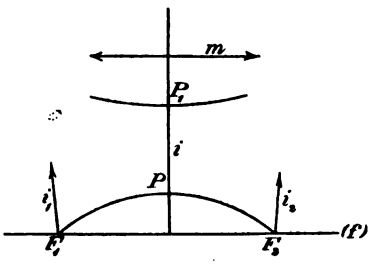


Fig. 3.

c) Ein Cykl, der mit f einen Punkt gemein hat, aber f nicht berührt, ist das Randbild einer Ebene, die G schneidet, sein Bild ist demnach ein Überkreis. —

Hiernach kann man nun in jedem einzelnen Falle das Bild eines gegebenen Cykls leicht konstruieren.

Ist z. B. (Fig. 3) in der Halbebene ein Kreissegment F_1PF_2 gegeben, wo P der Schnittpunkt des Mittellotes von F_1F_2 mit dem Bogen ist, so muß das Bild ein Überkreis sein, dessen

Mittellinie m in der einen Richtung zu i_1 ($i_1 \perp f$) und in der andern Richtung zu i_2 parallel ist. Man braucht nun nur noch den Bildpunkt P_1 von P zu konstruieren, in dem das Mittellot von F_1F_2 den Überkreis senkrecht schneidet; dadurch ist er dann vollständig bestimmt.

2. Folgerungen für die L.-transformation des Raumes: Man kann nun leicht zeigen, daß bei der L.-transformation des Raumes jede Sphäre sich in eine Sphäre verwandelt.

a) Gibt es einen Durchmesser d der Sphäre, der auf F senkrecht steht, so schneiden alle Ebenen senkrecht zu d die Sphäre in Kreisen, die als Schnitte von Ebenen, welche mit F ein gemeinsames Lot haben, und von Halbkugeln, die auf F senkrecht stehen, betrachtet werden können, die also bei der Transformation wieder in Kreise übergehen. Jeder Meridianschnitt mit einer Ebene I ($\perp F$) aber verwandelt sich in einen Cykl, von dem d wieder Durchmesser ist, d. h. das Bild der Sphäre wird eine durch Rotation eines Cykls um einen Durchmesser gebildete Fläche, also wieder eine Sphäre.

Hieraus folgt z. B., daß jede Kugel sich wieder in eine Sphäre verwandelt, und zwar nur dann in eine Kugel, wenn sie die Fundamentalebene nicht schneidet. — Jeder Kreis verwandelt sich wieder in einen Cykl, da er ja ein Schnitt von einer Ebene mit einer Kugel ist. Jeder Cykl kann als Schnitt einer Ebene mit einer Sphäre aufgefaßt werden, die eine auf F senkrecht stehende Durchmesserebene besitzt, verwandelt sich also wieder in einen Cykl.

b) Gibt es einen derartigen Durchmesser d nicht, so doch eine Durchmesserebene I der Sphäre S, die auf F senkrecht steht. In dieser Ebene I lege man nun durch einen beliebigen Punkt P des Cykls (S, I) denjenigen Cykl c_i, der sowohl auf F wie auf (S, I) senkrecht steht. Dann lege man durch c_i die Sphären, die auf F senkrecht stehen; ihre Schnitte mit S seien die Cyklen c_s. c_i verwandelt sich in eine Gerade; die c_s in lauter Cyklen, welche diese Gerade zum Durchmesser haben und zu einander kongruent sind; denn man kann S mit Sphären schneiden, die auf c_i senkrecht stehen und S in Kreisen treffen, die sich bei der Transformation wieder in Kreise verwandeln.

Das Bild der Sphäre ist also eine Fläche, die durch Umdrehung des Bildes von (S, I) um die Gerade entsteht, die das Bild von c_i ist, d. h. wieder eine *Sphäre*.

Zusatz 1. Die L.-transformation der Ebene ist *winkeltreu*; denn der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel ihrer Randbilder, sowohl auf F wie auf G, die Bilder der Cykeln c in F bei der L.-transformation sind aber einfach die Randbilder in G, wenn man dieselben noch um die Achse f nach F umklappt.

Zusatz 2. Alle Cyklen, die auf der Abstandslinie $y = \Pi(\frac{1}{4}\pi)$ senkrecht stehen, gehen in sich über; durch einen Punkt und eine Tangente in ihm ist ein solcher Cykl vollkommen bestimmt.

Der erste Teil dieses Satzes ergibt sich aus folgender Betrachtung: Ein Cykl, der die Abstandslinie $y = \Pi(\frac{1}{4}\pi)$ senkrecht schneidet, ist das Randbild einer Ebene, die die Mittelebene M von F und G senkrecht schneidet. Schneidet man nun mit einer Ebene I, die auf f senkrecht steht und E trifft, so steht die Gerade (E, I) auf der Geraden (M, I) senkrecht. Außerdem ist die Gerade (E, I) nach der einen Seite hin parallel zu QQ' ($\perp (I, G)$) und zu PP' ($\perp (I, F)$). Spiegelt man nun an der Geraden (M, I), so geht Q in P_1, den Bildpunkt von P, über, die Gerade (E, I) aber in sich selbst (Fig. 4). Aus Symmetrie folgt nun sofort, daß P umgekehrt das Bild von P_1 ist, d. h. jeder Punkt P eines die Abstandslinie (den Überkreis) $y = \Pi(\frac{1}{4}\pi)$ schneidenden Cykls geht in einen Punkt desselben Cykls über.

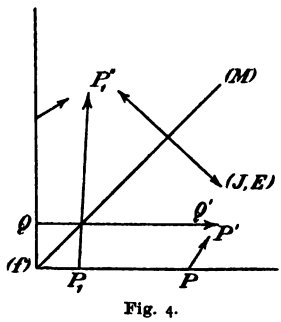


Fig. 4.

Mit Hilfe von Fig. 4 kann man auch den zweiten Teil der Behauptung beweisen. Die Gerade, die zu PP' und P_1P_1'' parallel ist, ist Achse eines Büschels von Ebenen, die auf M senkrecht stehen, und diejenige unter den Ebenen, welche das innerhalb F in P auf der vorgeschriebenen Tangentialrichtung errichtete Lot senkrecht schneidet, hat den gesuchten Cykl zum Randbild.

Zusatz 3. Man kann jetzt die L.-transformation auch so definieren, daß die Ebene G gar nicht benutzt wird, sondern nur die Ebene M:

Um das Bild eines Cykls c zu finden, spiegele man die Ebene E, deren Randbild c ist, an der Ebene M, die in der Fundamentalachse f unter dem Winkel $\frac{1}{4}\pi$ gegen F geneigt ist. Das Randbild c_1 der gespiegelten Ebene E_1 ist dann das Bild von c.

§ 4.

Die allgemeinen Kreisverwandtschaften und die Raumkongruenzen.

Der einfache Zusammenhang, in dem, wie wir soeben gesehen haben, die L.-transformation der Ebene mit der Spiegelung des Raumes steht, führt dazu, überhaupt die kongruenten Raumtransformationen (Bewegungen und Spiegelungen) zum Ausgangspunkt für die Untersuchung der allgemeinen Kreisverwandtschaften zu wählen (1); umgekehrt kann man zeigen, daß man auf diesem Wege notwendig zu allen Kreisverwandtschaften gelangen muß (2), und endlich ergiebt sich eine Zerlegung jeder vorgelegten Kreisverwandtschaft in eine „einfache Kreisverwandtschaft" und eine kongruente Transformation der Ebene (3).

1. Ableitung der Kreisverwandtschaften aus den kongruenten Raumtransformationen.[1])

Ordnet man den Cyklen c der Ebene F die Ebenen E zu, deren Randbilder sie sind, führt dann eine kongruente Raumtransformation zu, bei der E in E_1 übergeht und ordnet nun das Randbild c_1 von E_1 dem Cykl c zu, so erhält man eine Kreisverwandtschaft. Man sieht sofort, daß alle auf diesem Wege erhaltenen Punkttransformationen *winkeltreu* sind, weil ja der Winkel zweier Ebenen dem Winkel ihrer Randbilder gleich ist.

Wir wollen einige Beispiele von Kreisverwandtschaften betrachten, die sich auf diese Art ergeben und jedesmal darauf achten, daß eine Kreisverwandtschaft in der Ebene allein, ohne Mitbenutzung des Raumes, sich ableiten läßt.

Erstes Beispiel: Spiegelung an einer Ebene M, die F nicht schneidet.

Dabei gehen die Ebenen, welche M senkrecht schneiden, in sich über, d. h. die Cyklen, die das Randbild von M, einen Kreis, senkrecht schneiden, gehen in sich über.

Also: Es gibt eine Kreisverwandtschaft, bei der alle Cyklen, die einen gegebenen Kreis senkrecht schneiden, in sich übergehen.

Ist die Ebene M zur Ebene F parallel, so wird ihr Randbild ein Grenzkreis, und wir erhalten also eine Kreisverwandtschaft, bei der alle Cyklen, die einen gegebenen Grenzkreis senkrecht schneiden, in sich übergehen.

Zweites Beispiel: Drehung des Raumes um eine in F liegende Achse.

1) Vgl. „Ha" S. 210 ff.

Ist φ der Drehungswinkel, y der Abstand des Punktes P_1 in der Fundamentalebene von der Achse, y_1 der Abstand des Bildpunktes P_1 von der Achse f, so ist, wie ein Schnitt mit einer auf f senkrechten Ebene zeigt:

$$\Pi(y_1) = \Pi(y) + \varphi.$$

Ferner liegen P_1 und P auf demselben Lot zur Fundamentalachse f. Dadurch ist die Kreisverwandtschaft vollkommen bestimmt.

Drittes Beispiel: Spiegelung an einem Punkt A. Hierbei geht jede den Punkt A enthaltende Ebene in sich über. Jede solche Ebene enthält eine bestimmte Gerade b, die auf dem von A nach F gefällten Lote a senkrecht steht: errichtet man in der Ebene $(a_1 b)$ die beiden auf F senkrecht stehenden, zu b parallelen Lote, so ist der Abstand der Fußpunkte dieser Lote vom Fußpunkt von a gleich a_1, wo $\Pi(a) + \Pi(a_1) = \frac{1}{2}\pi$. Die Bilder der in sich übergehenden Ebenen schneiden also den Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt von a auf F und dessen Halbmesser a_1 ist, in den Endpunkten eines Durchmessers.

Also: Es gibt eine Kreisverwandtschaft, bei der alle einen bestimmten Kreis diametral schneidenden Kreise in sich übergehen.

Diese Beispiele mögen genügen. Sie ließen sich leicht noch vermehren und man könnte weitere solche *einfache*[1]) Kreisverwandtschaften angeben (als *einfach* wollen wir eine Kreisverwandtschaft bezeichnen, wenn, wie in den drei Beispielen, die Geraden eines bestimmten Büschels in sich übergehen).

2. *Umkehrung.* Man kann nun umgekehrt zeigen, daß alle Kreisverwandtschaften sich aus den Bewegungen und Spiegelungen des Raumes durch Vermittelung von Randbildern ableiten lassen. Dabei gehen wir aus von dem Satz:

Jede Punkttransformation, die Cyklen in Cyklen überführt, muß winkeltreu sein.

Beweis: Je zwei Cyklen, die sich in einem Punkt berühren, gehen wieder in zwei Cyklen über, die sich in einem Punkt berühren. Ferner gehen je *zwei untereinander gleiche* Winkel wieder in *zwei untereinander gleiche* Winkel über: Liegen die beiden Winkel symmetrisch zu dem Mittellot, das auf der Verbindungslinie der Schnittpunkte errichtet ist, so gibt es zwei bestimmte Cyklen, die jenes Mittellot zum gemeinsamen Durchmesser

1) Mit dem Namen „einfache" Kreisverwandtschaften fassen wir also die „Strahlungen" und „Inversionen" zusammen („*Ha*" S. 203).

haben und durch die beiden Schnitte gehen, wo sie die Schenkel der Winkel zu Tangenten haben. Sie gehen wieder in zwei Cyklen über, also jene Winkel in zwei untereinander gleiche Winkel, da ja zwei Cyklen sich unter zwei gleichen Winkeln treffen. — Haben die beiden Winkel nicht die symmetrische Lage, so kommt man zu demselben Ergebnis, wenn man geeignete Winkel hinzunimmt. Diese Winkel müssen den beiden gegebenen gleich sein und so liegen, daß sie, wenn man die gegebenen als ersten und letzten hinzufügt, eine Reihe bilden, wo je zwei aufeinanderfolgende symmetrisch liegen. (Es genügt, wie man leicht einsieht, zwei Winkel hinzuzunehmen.) Damit ist der Satz auch für den allgemeinen Fall bewiesen.

Hieraus folgt: Jeder *rechte* Winkel geht wieder in einen *rechten* über; denn er ist die Hälfte eines gestreckten, und da ein gestreckter Winkel in einen gestreckten übergeht, so muß also auch der Winkel $\frac{1}{2}\pi$ wieder in den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ übergehen.

Ebenso beweist man, daß überhaupt jeder mit π kommensurable Winkel in sich übergeht, und hieraus weiter, daß überhaupt jeder Winkel ungeändert bleibt, d. h.

Jede Kreisverwandtschaft ist eine winkeltreue Punkttransformation.

b) Ordnen wir nun den Cyklen c die Ebenen E des (Halb-) Raums zu, deren Randbilder sie sind, so wird der Kreisverwandtschaft eine Raumtransformation zugeordnet. Bei dieser Raumtransformation gehen zwei Ebenen, die einen bestimmten Winkel α bilden, wieder in Ebenen über, die denselben Winkel α miteinander bilden.

Ferner geht jede Gerade (Bild in der Ebene: ein Kreisbüschel) wieder in eine Gerade über; endlich jeder Punkt (Bild in der Ebene: ein Diametralbündel von Cyklen) wieder in einen Punkt über.

Die der Kreisverwandtschaft entsprechende Raumtransformation ist also eine Punkttransformation, bei der gerade Linien in gerade Linien übergehen und die überdies *winkeltreu* ist, d. h. sie ist eine Bewegung (oder Spiegelung), also:

Jede Kreisverwandtschaft ist das Bild einer kongruenten Raumtransformation.

3. *Zerlegung der Kreisverwandtschaften.*

Jede allgemeine Kreisverwandtschaft kann in eine einfache Kreisverwandtschaft und eine kongruente Transformation der Ebene zerlegt werden.

Beweis: Da man durch jede auf F nicht senkrecht stehende Gerade eine und nur eine Ebene legen kann, die auf F senkrecht steht, so wird unter den Cyklen eines Büschels mit reellen Grundpunkten sich immer eine und nur eine Gerade befinden (vgl. § 2,2). Jedes Geradenbüschel verwandelt sich also im allgemeinen in ein Büschel von Cyklen, unter denen sich *eine* Gerade befindet.

Ferner: Betrachten wir zwei Gerade, die sich wieder in Gerade verwandeln, so gehören die Geraden einem Büschel an, und jede Gerade des Büschels λ verwandelt sich in eine Gerade eines bestimmten zweiten Büschels (λ_1). Diese beiden Geradenbüschel lassen sich durch Bewegung (oder Spiegelung) zur Deckung bringen, weil die Transformation das Bild einer Bewegung oder Spiegelung des Raumes ist. Nun kann man durch eine kongruente Transformation der Ebene F die Geraden λ mit den Geraden $\tilde{\lambda}_1$ zur Deckung bringen. Ein Punkt P möge dabei in Q übergehen. Die Beziehung zwischen Q und P_1 (die Punkte P_1 seien die Bilder von den Punkten P bei der gegebenen Transformation) ist dann wieder eine Kreisverwandtschaft, und zwar eine *einfache*. Hiermit ist die behauptete Zerlegung nachgewiesen.

Zugleich sieht man, daß bei jeder kongruenten Transformation ein bestimmtes Büschel von Ebenen, die auf F senkrecht stehen, in ein bestimmtes Büschel von derselben Eigenschaft übergeht.

Beispiele:

a) Drehung um eine Achse a, die die Fundamentalebene schneidet. Durch den Schnittpunkt (a, F) geht eine ganz bestimmte Gerade g, der wieder eine in F gelegene, durch diesen Schnittpunkt gehende Gerade entspricht. — Das erwähnte Ebenenbüschel wird hier aus der Gesamtheit aller Ebenen gebildet, die auf g senkrecht stehen.

b) Schiebung längs einer Geraden a, die F nicht schneidet. Auf a gibt es unter den sich entsprechenden Punkten zwei ganz bestimmte P und P_1, die zu dem Fußpunkt des gemeinsamen Lotes von a und F symmetrisch liegen Legen wir durch P und P_1 die Ebenen E und E_1, die zu a senkrecht stehen, so geht das Büschel der auf E und F senkrechten Ebenen in das Büschel der auf F und E_1 senkrechten über.

So kann man in jedem einzelnen Fall leicht die Richtigkeit des bewiesenen allgemeinen Satzes bestätigen.

Druckfertig erklärt 17. VII. 1902.]

INHALT.

Seite

A. Mayer, Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung 208

Heinrich Liebmann, Synthetische Ableitung der Kreisverwandtschaften in der Lobatschefskijschen Geometrie 244

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

L Sax 1726.9

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

V.

MIT ZWEI TAFELN UND VIER TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Einzelpreis 1 Mark 50 Pfg.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 30. JUNI 1902.

Geschäftliches:

Erledigung der Eingänge und des Tauschverkehres. Ablage der Jahresrechnung.

Beschluß der Klasse, abgesehen von besonderen Fällen, zu Festfeiern auswärtiger Körperschaften keine Delegierten zu entsenden.

Beschluß, zur Beratung über Errichtung eines akademischen Beirates zu den Monumenta Germaniae paedagogica, zu der die phil.-hist. Klasse Herrn HEINZE abgeordnet hat, auch seitens der math.-phys. Klasse einen Delegierten, Herrn O. HÖLDER, zu entsenden und dem Herrn Reichskanzler hiervon Kenntnis zu geben.

Es erfolgt die Beratung des Schreibens an das Kgl. Ministerium betr. die F. W. Mendestiftung.

Vorträge:

Herr WIENER teilt eine Arbeit von Herrn KIRCHNER mit: „Über beobachtete Absorptions- und Farbenänderungen infolge von Abstandsänderungen der absorbierenden Teilchen".

Herr ENGEL teilt eine Arbeit von Herrn KOWALEWSKI mit: „Über das KRONECKERSche Integral für die Charakteristik eines Funktionensystems".

Herr NEUMANN gibt einen Nachtrag zu seiner am 2. Juni mitgeteilten Arbeit über die MAXWELL-HERTZsche Theorie.

Herr MAYER teilt eine Note von Herrn RIQUIER mit: „Über Systeme partieller Differentialgleichungen".

Über beobachtete Absorptions- und Farbenänderungen infolge von Abstandsänderungen der absorbierenden Teilchen.

Von

F. KIRCHNER.

Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die optischen Eigenschaften der LIPPMANNschen Farbenphotographien machte ich die Beobachtung, daß die Bromsilberplatten beim Trocknen ihr

Aussehen änderten. Am auffälligsten war die Erscheinung bei solchen Präparaten, die in trockenem Zustande in der Durchsicht blaue Farben zeigten; diese nahmen beim Benetzen rote oder orangefarbene Töne an.

Ich verfolgte die Erscheinung weiter, und fand, daß *alle* Platten, gleichgültig welche Farbe die Emulsion besaß, was wesentlich von der Art des Entwicklers abhing, diesen Farbenumschlag mehr oder weniger ausgeprägt zeigten. Die Aufnahme der Absorptionskurven ergab nun, daß einerseits die Absorption beim Aufquellen überhaupt geringer geworden war, was auch die bloße Ansicht schon sehr deutlich zu zeigen pflegte, ferner, daß sich gleichzeitig das Absorptionsmaximum nach dem blauen Ende des Spektrums hin verschoben hatte. Schon die Luftfeuchtigkeit war imstande, diese Erscheinung, wenn auch nur in geringem Maße, hervorzubringen.

Daß es sich hierbei um einen physikalischen Vorgang handelte, und nicht um einen chemischen, läßt sich daraus schließen, daß es ganz gleichgültig war, ob man zur Aufquellung reines Wasser oder Eisessig verwendete, vielleicht auch aus dem Umstand, daß beim Wiedereintrocknen der Schicht die Erscheinung wieder vollständig zurückging, und sich dann beliebig oft wiederholen ließ.

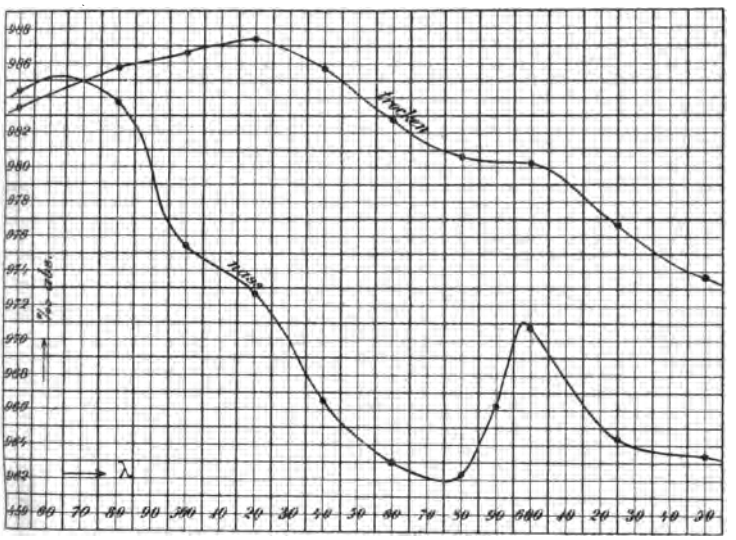
Es sollen nun für zwei Präparate die Messungsdaten gegeben werden. Die zuerst angeführte Platte war mit Rodinal unter reichlichem Alkalizusatz entwickelt und hatte trocken eine purpurbraune Farbe, naß war sie bedeutend heller und gleichzeitig grünlich.

λ in $\mu\mu$		450	480	500	520	540	560	580	589,5	600	625	650
‰ absorb.	naß	984,4	983,8	975,5	972,7	966,5	963,0	962,3	966,2	970,8	964,3	963,3
	trocken	983,4	985,6	986,6	987,3	985,8	982,8	981,7	—	980,2	976,0	973,8

Die beistehende Tafel 1 gibt eine graphische Darstellung der Tabelle. Wie deutlich aus diesen beiden Kurven hervorgeht, ist beim Trocknen der Platte das Absorptionsmaximum sowohl nach Rot hin verschoben, als auch bedeutend verbreitert, so daß das zweite kleine Maximum, das die nasse Platte bei 600 $\mu\mu$ zeigt, im untersuchten Gebiet nicht mehr zum Ausdruck kommt.

Die zweite Platte war mit schon stark gebräuntem Metol entwickelt und war in trockenem Zustande rein blau, naß rot. Die Messungen ergaben:

λ in $\mu\mu$		446	450	475	500	525	550	575	600	625	650
% absorb.	naß	—	84,86	87,26	88,80	90,02	91,08	90,60	89,78	85,66	81,22
	trocken	85,4	—	87,70	89,44	90,84	91,66	92,50	92,94	91,98	91,40



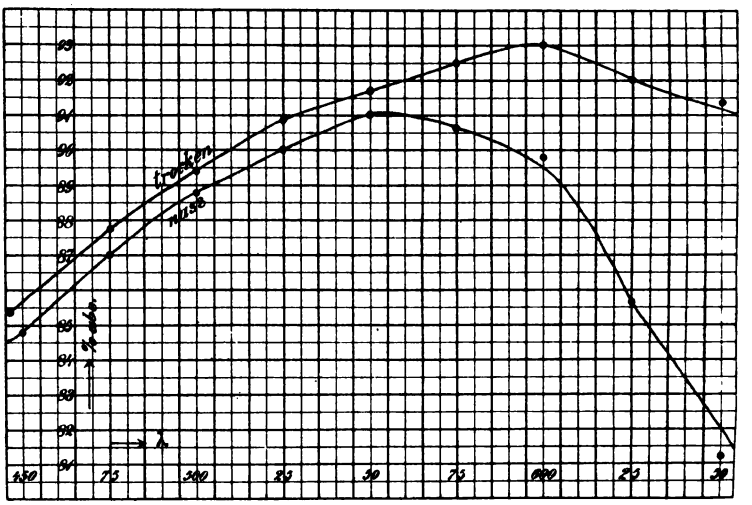
Tafel 1.

Aus der beistehenden graphischen Darstellung auf Tafel 2 wird sofort klar, daß die trockene Platte blau, die nasse dagegen rot aussehen mußte. Auch hier zeigen also die Kurven dieselben Erscheinungen wie bei dem vorigen Präparat: Verschiebung und Erhöhung des Absorptionsmaximums, sowie Abflachung bez. Verbreiterung der ganzen Kurve beim Eintrocknen.

Die Erklärung der beschriebenen Erscheinung suche ich in der Veränderung einer Art Resonanzwirkung der in der Gelatine suspendierten Silberteilchen auf die Lichtschwingungen. Garbasso[1]) und später Aschkinass und Schaefer[2]) haben experimentell für längere elektrische Wellen nachgewiesen, daß sowohl *ein* Resonator wie ein *System* von gleichen Resonatoren aus einem Wellenzuge diejenigen Schwingungen absorbiert, die der Eigenschwingung der

1) Garbasso, Atti del Acc. di Torino 28, p. 475 (1898).
2) Aschkinass und Schaefer, Drudes Ann. V, p. 489.

Resonatoren entsprechen. Wenn man nun die kleinen Silberteilchen als Resonatoren ansprechen darf, so hängt ihre Schwingungsdauer offenbar ab von ihrer Größe, von der Dielektrizitätskonstante des sie umgebenden Mediums, und schließlich, und das wohl hauptsächlich, von der größeren oder geringeren gegenseitigen Beeinflussung der einzelnen schwingenden Systeme. Eine Größenänderung der Resonatoren wird man beim Aufquellen kaum annehmen können, eher schon eine Änderung der Dielektrizitätskonstante der Gelatine, aber darüber läßt sich etwas Bestimmtes kaum aussagen. Sicher ist jedenfalls, daß bei der großen Aufnahmefähigkeit der Gelatine



Tafel 2.

für Wasser eine ganz bedeutende Zunahme der Entfernung der Teilchen von einander statthaben wird. Der Erfolg ist nun naturgemäß der, daß die gegenseitige elektrische Beeinflussung und damit die Dämpfung geringer wird, also die Schwingungsdauer ebenfalls abnimmt; auch ist anzunehmen, daß die Schwingungen reiner, d. h. weniger kompliziert werden, und damit das Absorptionsband an Breite verliert.

Daraus folgt also ohne weiteres, daß eine derartige Entfernung der Resonatoren von einander einen Farbenumschlag zur Folge haben muß, der von kleinen Wellen zu größeren geht, was der Beobachtung vollständig entspricht.

Nun hat M. Planck[1]) schon vor einiger Zeit theoretisch den Satz entwickelt, daß die Größe der Absorption eines Resonators „proportional ist der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität der Eigenschwingung des Resonators, ferner seinem logarithmischen Dekrement und dem Kubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional der Schwingungszahl."

Wenn unsere Vorstellung von den Vorgängen bei der Aufquellung richtig ist, so folgt aus diesem Satze, daß die Absorption beim Aufquellen der Emulsion überhaupt geringer werden muß, was ebenfalls den Thatsachen entspricht.

Als obige Untersuchungen abgeschlossen waren, erschienen zwei Arbeiten, welche in gewisser Weise dasselbe Thema behandeln: eine experimentelle von Prof. Wood[2]) und eine theoretische von M. Planck.[3]) Wood beobachtete eine der hier beschriebenen analoge Erscheinung an dünnen Häuten von Alkalimetallen, die er durch Destillation im Vakuum herstellte. Er erklärt den Farbenumschlag, der bei seinen Präparaten eintritt, und sehr glänzend gewesen zu sein scheint, auf dieselbe Weise wie ich.

Planck entwickelt eine Dispersionstheorie in isotropen Nichtleitern, indem er im Äther verteilte, ruhende Resonatoren annimmt, und kommt zu dem Schluß, daß mit zunehmender Dichtigkeit der Verteilung sich der Absorptionsstreifen verbreitert, und zwar nach der Seite der längeren Wellen hin schneller, als nach der entgegengesetzten. Mit abnehmender Dichtigkeit dagegen zieht sich der Absorptionsstreifen auf eine Absorptionslinie zusammen, die der Eigenschwingung des Resonators entspricht.

Die hier geforderten Erscheinungen finden sich alle deutlich bei meinen Präparaten ausgeprägt, sodaß, wenn man die auf gewissen vereinfachenden Voraussetzungen aufgebaute Theorie Plancks auf meine Präparate anwenden darf, man meine Beobachtungen als eine Bestätigung dieser Theorie ansehen kann.

Ob im vorliegenden Falle die angenommenen Resonatoren aus ausgedehnten, wenn auch absolut kleinen Silbermassen bestehen, oder ob die einzelnen Silbermoleküle selbst als solche Resonatoren aufzufassen sind, läßt sich vorläufig nicht entscheiden.

---

1) M. Planck, Drudes Ann. I, p. 92 (1900).
2) W. Wood, Phil. Mag. VI, vol. 3, p. 396 (1902).
3) M. Planck, Ber. d. Berl. Ak. 1902, 1. Mai.

Im letzteren Falle würde die Erklärung auf die bereits von WERNICKE[1]) geäußerten Vorstellungen zurückführen, welcher die normale bez. anomale Phasenänderung bei Reflexion des Lichtes an Metallen davon abhängen läßt, ob das Metall in „kohärentem" oder „molekularem" Zustande vorliegt. Nach den Untersuchungen von WERNICKE „bewirkt die Kohäsionskraft eines Metalles eine Verschiebung des Absorptionsgebietes nach der Seite der größeren Schwingungsdauer." Man müßte sich also in unserem Falle vorstellen, daß die trockene Platte das Silber in einer der *kohärenten* näher liegenden Modifikation enthält, die aufgequellte Platte dagegen in einer dem *molekularen* Zustande näher liegenden. Ob der Niederschlag in der LIPPMANNschen Platte aus reinem Silber oder irgend einer Verbindung des Silbers besteht, ist noch nicht mit Sicherheit festgestellt. Die in einem Falle erreichte blaue Farbe des Niederschlags, welche also der des reinen kohärenten Silbers sich nähert, macht es wahrscheinlich, daß man es thatsächlich mit reinem Silber zu thun hat, das eben nur je nach dem Grade der molekularen Verteilung verschiedene Farben annehmen kann.

1) W. WERNICKE, W. A. 52, p. 527 (1894).

Druckfertig erklärt 31. VII. 1902.]

Über das Kroneckersche Integral für die Charakteristik eines Funktionensystems.

Von

GERHARD KOWALEWSKI.

Im folgenden wird ein Satz bewiesen, der in sehr einfacher Weise zu dem KRONECKERschen Integral[1]) für die Charakteristik eines Funktionensystems führt. KRONECKERS Integral läßt sich, wie er selbst bemerkt (a. a. O. S. 171), als eine Verallgemeinerung des bekannten GAUSSschen Integrals $\int \frac{\cos(r\,n)\,d\sigma}{r^2}$ auffassen. In demselben Sinne ist der hier zu beweisende Satz eine Verallgemeinerung der ebenfalls von GAUSS herrührenden Formel[2]):

$$3\int\int\int dx\,dy\,dz = \int\int (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy),$$

wo sich die Integration links über ein räumliches Gebiet und die Integration rechts über dessen Begrenzung erstreckt.

G sei ein n-dimensionales Gebiet im R_n, welches von einer geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit begrenzt wird oder von mehreren solchen. Wir machen über diese begrenzenden Mannigfaltigkeiten die in der Potentialtheorie üblichen Voraussetzungen. Sind die Funktionen

$$A_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),\quad A_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots,\quad A_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

---

1) KRONECKER: Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1869, S. 159 ff. Einen Beweis für die Formel von KRONECKER findet man auch bei E. PICARD (Traité d'Analyse, t. I, p. 123 ff. Liouvilles Journal, 1892, p. 7 ff.).

2) Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum etc. Theorema secundum. (Werke, Bd. V, S. 6).

mit ihren ersten Ableitungen im Innern und auf der Begrenzung von G stetig, so gilt die GAUSSsche Formel

$$(1)\qquad \int\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial A_n}{\partial x_n}\right)dv = \int(A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2+\cdots+A_n\cos\alpha_n)\,d\sigma.$$

Dabei bedeutet dv das (n-dimensionale) Volumelement von G, $d\sigma$ das $(n-1)$-dimensionale Element der Begrenzung, und $\cos\alpha_1,\cdots,\cos\alpha_n$ sind die Richtungskosinus der zu $d\sigma$ gehörigen äußeren Normale. Die Integration links erstreckt sich über G, die rechts über die Begrenzung von G.

Die beiden Seiten von (1) sind, wenn man sie mit einer infinitesimalen Größe δt multipliziert, zwei verschiedene Ausdrücke für das Inkrement δV, welches das Volumen V unseres Gebiets bei der infinitesimalen Transformation

$$Xf = A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

erfährt. Man kann diesen Umstand sogar zum Beweise der Formel (1) benutzen, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Wir wollen jetzt die infinitesimale Transformation Xf in einer solchen Form schreiben, daß ihre Invarianten in Evidenz treten. Sind $\varphi_2,\cdots\varphi_n$ $n-1$ Invarianten von Xf, so können wir setzen:

$$(2)\qquad Xf=\sum A_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\varphi_1\begin{pmatrix} f & \varphi_2\cdots\varphi_n\\ x_1 & x_2\cdots x_n\end{pmatrix}.$$

Damit die über die Funktionen A gemachten Voraussetzungen erfüllt bleiben, wollen wir annehmen, daß die sonst beliebigen[1]) Funktionen $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ in dem Gebiet G (einschließlich der Begrenzung) mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig seien. Setzen wir für einen Augenblick

$$\begin{pmatrix} f & \varphi_2\cdots\varphi_n\\ x_1 & x_2\cdots x_n\end{pmatrix}=B_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+B_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so ist nach einem bekannten Satze über Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial B_n}{\partial x_n}=0$$

1) Die Formel (3) gilt sogar dann noch, wenn zwischen $\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ eine Relation besteht, weil dann beide Seiten verschwinden.

und daher

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$
$$= B_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \cdots + B_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n \\ x_1 x_2 \cdots x_n \end{pmatrix}.$$

Die Formel (1) geht also, wenn für die A die aus (2) sich ergebenden Ausdrücke eingesetzt werden, über in

$$(3) \qquad \int \begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n \\ x_1 x_2 \cdots x_n \end{pmatrix} dv = \int \varphi_1 \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} d\sigma$$

$$= -\int \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \varphi_1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} d\sigma.$$

Es liegt nahe, die Funktionen φ, die auf der linken Seite von (3) vollkommen gleichberechtigt auftreten, zu permutieren. Vertauscht man $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ i-mal hintereinander cyklisch und multipliziert, wenn n gerade ist, noch auf beiden Seiten mit $(-1)^i$, so erhält man eine neue Gleichung, deren linke Seite dieselbe ist wie in (3). Addiert man die den Werten $i = 1, 2, \cdots, n-1$ entsprechenden Gleichungen alle zu (3), so ergiebt sich:

$$(\mathrm{I}) \quad n \int \begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n \\ x_1 x_2 \cdots x_n \end{pmatrix} dv + \int \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \varphi_1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \varphi_2 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} d\sigma = 0.$$

Diese Formel, welche an Symmetrie nichts zu wünschen übrig läßt, enthält den Satz, der hier bewiesen werden sollte. Für $n = 3$ und $\varphi_1 = x_1$, $\varphi_2 = x_2$, $\varphi_3 = x_3$ ergiebt sich die zu Anfang erwähnte von GAUSS herrührende Formel.

Die Gleichung (I) erhält man übrigens, was wir nicht unerwähnt lassen wollen, direkt aus (1), wenn man setzt

$$Xf = \sum A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \cdots \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \varphi_1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \varphi_2 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Die oben gegebene Ableitung dürfte aber weniger künstlich sein.

Die Formel (I) läßt sich noch verallgemeinern. $\varrho(x_1, \cdots, x_n)$ sei eine Funktion, die im Innern und auf der Begrenzung von G mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig ist. Dann erfüllen auch die Funktionen $\varrho\varphi_1$, $\varrho\varphi_2$, $\cdots$, $\varrho\varphi_n$ die Bedingungen, unter denen wir die Formel (I) bewiesen haben. Wir dürfen also in (I) φ_1, φ_2, $\cdots$, φ_n durch $\varrho\varphi_1$, $\varrho\varphi_2$, $\cdots$, $\varrho\varphi_n$ ersetzen. Dadurch erhalten wir

$$(\mathrm{I}') \quad n\int \begin{pmatrix} \varrho\varphi_1, & \varrho\varphi_2, & \cdots, & \varrho\varphi_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} dv + \int \varrho^n \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha_1 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \varphi_1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} d\sigma = 0.$$

Wenn nun $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ in keinem Punkte im Innern oder auf der Begrenzung von G gleichzeitig verschwinden, so können wir setzen[1]) $\varrho = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots + \varphi_n^2}}$. Dann ist aber $\begin{pmatrix} \varrho\varphi_1, & \varrho\varphi_2, & \cdots, & \varrho\varphi_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = 0$, weil zwischen den Funktionen $\varrho\varphi_1$, $\varrho\varphi_2$, $\cdots$, $\varrho\varphi_n$ die Relation $(\varrho\varphi_1)^2 + (\varrho\varphi_2)^2 + \cdots + (\varrho\varphi_n)^2 = 1$

1) Alle Veränderlichen und Funktionen werden als reell vorausgesetzt.

besteht, und wir erhalten also den Satz, daß das über die Begrenzung von G erstreckte Integral

$$(4)\qquad \int \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha_1 & \cdots & \cos\alpha_n \\ \varphi_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots+\varphi_n^2)^{\frac{n}{2}}}$$

verschwindet, sobald das Gleichungssystem $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_n = 0$ von keinem Punkte im Innern oder auf der Begrenzung von G erfüllt wird. Giebt es im Innern von G eine endliche Anzahl solcher Punkte, so kann man sie und ihre Umgebungen in bekannter Weise von G ausschließen. Erstreckt man das Integral (4) über die Begrenzung des so erhaltenen neuen Gebietes, so verschwindet es, und daraus ergiebt sich leicht[1]) der Kroneckersche Satz, daß das Integral (4), erstreckt über die Begrenzung von G, abgesehen von einem numerischen Faktor gleich der Charakteristik des Funktionensystems $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ist. Dabei hat man noch anzunehmen, daß in jedem der erwähnten Punkte die Funktionaldeterminante von Null verschieden ist.

1) Vgl. E. Picard, a. a. O. S. 125.

Druckfertig erklärt 4. VIII. 1902.]

Über Systeme partieller Differentialgleichungen.

Von

Ch. Riquier.

In einer Mitteilung an die Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (3. März 1902), ebenso wie in einer Schrift mit dem Titel: *Zur Integration partieller Differentialsysteme* (1900), betrachtet Herr Karl Boehm Systeme von m partiellen Differentialgleichungen mit m unbekannten Funktionen in Hinsicht auf die Existenz der Integrale. Er erklärt, daß diese Untersuchung sich meinen Arbeiten anschließt, und fügt hinzu, daß das mitgeteilte Ergebnis im betrachteten Falle erlaubt, „das Existenztheorem etwas weiter zu fassen, als bisher geschehen ist". (Sitzung vom 3. März 1902, S. 72.)

Die letztere Behauptung hätte ich zwar nicht zu bestreiten, wenn ich keine andern Untersuchungen über die Theorie der Differentialsysteme veröffentlicht hätte, als die von Herrn Boehm angeführten, nämlich die im Jahre 1893 in den *Annales de l'Ecole Normale* erschienenen Beiträge. Aber, obgleich ich schon damals im Besitz allgemeiner Resultate war, habe ich seitdem vollständigere Ergebnisse in einer einfacheren Form auseinandergesetzt[1]); und tatsächlich sind diejenigen, die Herr Boehm in den genannten Schriften veröffentlicht hat, in verschiedenen Sätzen,

1) Besonders in den folgenden Abhandlungen: *Sur le Calcul inverse des dérivées* (*Annales de la Faculté des sciences de Marseille*, B. 10). — *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, B. 23). — *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta Mathematica*, B. 25). — *Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales* (*Annales de l'Ecole Normale*, 1901). — *Sur le Calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels* (wird nächstens in den *Annales de l'Ecole Normale* erscheinen).

die ich schon vor ihm ausgesprochen und bewiesen hatte, als besondere Fälle enthalten.[1])

In welchem Verhältnisse die sehr interessanten von Herrn Boehm formulierten Kriterien zu den betreffenden Sätzen stehen, wird das folgende hervorheben. Es sei mir erlaubt, bevor ich anfange, ihm meinen aufrichtigsten Dank für die meinen Arbeiten bezeugte Achtung auszudrücken.

I. Wir wollen zuerst ein Differentialsystem betrachten, *das nach gewissen Ableitungen der unbekannten Funktionen aufgelöst sei*, und dessen rechte Seiten in einem mehr oder weniger umfangreichen Gebiet analytische Funktionen ihrer sämtlichen Argumente seien. Eine Ableitung irgend einer unbekannten Funktion heiße, in Beziehung auf dieses System:

wenn sie mit einer der linken Seiten oder einer der Ableitungen derselben identisch ist, *principal;*

sonst, *parametrisch.*

Wenn man irgend welche ordentliche Integrale eines solchen Systems in der Umgebung irgend welcher Anfangswerte der unabhängigen Variablen nach der Taylorschen Reihe entwickelt voraussetzt, wenn man überdies in der Entwickelung, die jeder Unbekannten entspricht, nur diejenigen Glieder betrachtet, deren Koeffizienten, abgesehen von den bekannten Zahlenfaktoren, die Anfangswerte des in Rede stehenden Integrals und seiner parametrischen Ableitungen aller Ordnungen sind, so sollen die davon herrührenden Stücke der Entwickelungen die *Anfangsbestimmungen* der Integrale heißen.

Es ist möglich, wie ich es bewiesen habe, die erforderlichen Funktionen (oder Konstanten), in endlicher Zahl, deren Kenntnis so viel bedeutet als die der Anfangsbestimmungen, durch die einfachsten Betrachtungen festzustellen.[2]) Wenn man nämlich die unabhängigen Variablen und ihre Anfangswerte beziehungsweise mit

$$x,\ y,\ \ldots \quad \text{und} \quad x_0,\ y_0,\ \ldots$$

---

1) *Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27. Dezember 1897, 17. Jan. 1898. — *Sur une question fondamentale du Calcul intégral*, eine im Jahre 1899 gedruckte Abhandlung, *Acta Mathematica*, B. 23.

2) *Sur une question fondamentale du Calcul intégral*, première Partie.

bezeichnet, und wenn man sämtliche Koeffizienten in den Entwickelungen der Integrale unbestimmt läßt, so liefert ein sehr leichtes, nur die Kenntnis der linken Seiten des Systems erheischendes Verfahren eine *Form*, wie die unten stehende, für die Anfangsbestimmung irgend einer Unbekannten u:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{n=g} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} \cdots F_{\theta_n}.$$

Dabei sind:

a_n, b_n, $\cdots$ ganze Zahlen, positiv oder gleich Null;

θ_n eine Gruppe unabhängiger Variabler aus der ganzen Gruppe x, y, $\ldots$;

und F_{θ_n} eine willkürliche Funktion von den Variablen θ_n allein.

Wenn man jetzt der Unbekannten u eine gegebene Anfangsbestimmung [von der oben stehenden Form (1)] vorschreibt, so kann diese Bedingung durch die folgende ersetzt werden:

Man verlangt, daß für $n = 1, 2, \cdots, g$ die Funktion

$$\frac{\partial^{a_n + b_n + \cdots} u}{\partial x^{a_n} \partial y^{b_n} \ldots}$$

einer vorgeschriebenen analytischen Funktion der Variablen θ_n gleich werde, sobald man den übrigen Variablen ihre Anfangswerte erteilt.

Es soll das vorhergehende an einem Beispiele erläutert werden. Zur Bestimmung von zwei Variablen u, v als Funktionen von drei unabhängigen Variablen x, y, z, sei ein aus vier Differentialgleichungen bestehendes und nach den vier Ableitungen

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$$

aufgelöstes System vorgelegt. Die Anwendung unserer Methode liefert die *Formen*

$$F(y, z) + (x - x_0) H(x, z) + (x - x_0)(y - y_0) P(x, y),$$
$$Q(z) + \alpha (y - y_0) + \beta (y - y_0)^2$$

beziehungsweise für die Anfangsbestimmungen von u und v: dabei sind α, β zwei willkürliche Konstanten, und $F(y, z)$, $H(x, z)$, $P(x, y)$, $Q(z)$ vier willkürliche (in der Umgebung der Anfangswerte ihrer Variablen entwickelbare) Funktionen. Sollen jetzt die beiden

Unbekannten u, v gegebene Anfangsbestimmungen haben, so kann diese Bedingung formuliert werden, wie folgt:

Wenn es sich um die erstere handelt, so fixieren wir von vornherein: 1. die Funktion der Variablen y und z, welcher u für $x - x_0 = 0$ gleich werden soll; 2. die Funktion der Variablen x und z, welcher $\frac{\partial u}{\partial x}$ für $y - y_0 = 0$ gleich werden soll; 3. die Funktion der Variablen x und y, welcher $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ für $z - z_0 = 0$ gleich werden soll. — Wenn es sich um die letztere handelt, so fixieren wir von vornherein: 1. die Funktion der Variablen z, welcher v für $x - x_0 = y - y_0 = 0$ gleich werden soll; 2. die zwei Zahlenwerte, welchen $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ für $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$ beziehungsweise gleich werden sollen.

II. Jetzt kehren wir zu den allgemeinen Betrachtungen zurück, die das vorige Beispiel einen Augenblick unterbrochen hat.

Jeder der unabhängigen Variablen und der unbekannten Funktionen in unserem Differentialsysteme wollen wir p ganze Zahlen (positiv, gleich Null, oder negativ) entsprechen lassen, und die letzteren beziehungsweise *erste Quote, zweite Quote*, ..., p^{te} *Quote* der betreffenden Quantität nennen, mit der einzigen Einschränkung, *daß die ersten Quoten sämtlicher unabhängiger Variabler gleich* 1 *seien.*[1]) Es werde alsdann irgend eine Ableitung r^{ter} Ordnung einer unbekannten Funktion betrachtet, und die q^{te} Quote $(q = 1, 2, \ldots, p)$ der unbekannten Funktion zu den q^{ten} Quoten der r Differentiationsvariablen addiert: die dadurch entstehende ganze Zahl wollen wir q^{te} *Quote* der in Rede stehenden Ableitung nennen. Es seien endlich δ, δ' irgend zwei Quantitäten aus der unbeschränkten Gruppe der unbekannten Funktionen und ihrer Ableitungen aller Ordnungen, und

$$c_1, \quad c_2, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \quad c_p,$$
$$c_1', \quad c_2', \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \quad c_p'$$

1) In der Schrift mit dem Titel: *Sur une question fondamentale du Calcul intégral,* habe ich die ersten Quoten sämtlicher unabhängiger Variabler *einer und derselben positiven ganzen Zahl gleich* vorausgesetzt: man schränkt aber die Allgemeinheit der Definition der *orthonomen* Systeme nicht ein, wenn man annimmt, *daß die in Rede stehende ganze Zahl gleich 1 ist.* Das habe ich gelegentlich in der Schrift mit dem Titel: *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* bewiesen.

beziehungsweise die Quoten von δ und δ': wir wollen δ' in Beziehung auf δ *normal* oder *anormal* nennen, je nachdem die Differenzen

$$c_1 - c_1', \quad c_2 - c_2', \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \quad c_p - c_p'$$

der folgenden doppelten Bedingung Genüge leisten, oder nicht: 1. daß mindestens eine dieser Differenzen nicht verschwinde; 2. daß die erste nicht verschwindende positiv sei.

Dies festgesetzt soll nun, wenn die rechten Seiten im betrachteten Systeme von jeder prinzipalen Ableitung unabhängig sind, wenn überdies, vermittelst einer gehörigen Wahl der Zahl p und der den Variablen und Unbekannten erteilten Quoten, keine rechte Seite in Beziehung auf die entsprechende linke Seite anormale Quantitäten (Unbekannte oder Ableitung) *tatsächlich* enthält, das System *orthonom* heißen.

Es sei jetzt ein orthonomes System vorgelegt. Wenn man dasselbe durch beliebige Differentiationen bis ins Unendliche fortsetzt, d. h. wenn man nicht nur die Gleichungen des Systems, sondern auch alle durch beliebige Differentiationen daraus entstehenden betrachtet, so besitzt dieses unendliche System die fundamentale Eigenschaft nach den prinzipalen Ableitungen auflösbar zu sein. Diese in bestimmter Weise geleistete Auflösung liefert ein neues, dem vorigen gänzlich äquivalentes, unendliches System, dessen Gleichungen die folgende Beschaffenheit besitzen: 1. ihre linken Seiten sind die prinzipalen Ableitungen, deren jede *einmal oder mehrmal* als linke Seite auftritt; 2. ihre rechten Seiten sind von jeder prinzipalen Ableitung unabhängig. — Diese rechten Seiten wollen wir zur Abkürzung *ultime Ausdrücke* der prinzipalen Ableitungen nennen. In dem besonders merkwürdigen Falle, wo sämtliche ultime Ausdrücke irgend einer prinzipalen Ableitung miteinander *identisch* sind, soll das vorgelegte orthonome System *passiv* heißen.

Man teile die Gleichungen eines (endlichen) orthonomen Systems in Gruppen ein, je nachdem ihre linken Seiten zu der einen oder andern unbekannten Funktion gehören. Wenn jede der hierdurch entstehenden Gruppen nur eine Gleichung enthält, so tritt jede prinzipale Ableitung nur einmal in den linken Seiten des durch beliebige Differentiationen bis ins Unendliche fortgesetzten Systems auf, und das vorgelegte orthonome System ist von selbst passiv. Im entgegengesetzten Falle scheint die Zahl

der für die Passivität erheischten Identitäten zwar unendlich groß zu sein: man kann aber darunter eine wesentlich endliche Zahl auswählen, aus der alle andern sich als notwendige Folgerungen ergeben: die Kenntnis des Kriteriums, das ich darüber formuliert habe[1]), ist für den jetzigen Zweck überflüssig.

Schließlich, *wenn man den hypothetischen Integralen eines passiven orthonomen Systems willkürliche* (konvergente) *Anfangsbestimmungen vorschreibt*, so sind die übrig bleibenden Stücke der Entwickelungen derselben auch konvergent, und *die in Rede stehenden Integrale existieren tatsächlich.*[2])

III. Der passive orthonome Typus enthält, wie das sich aus dem folgenden ergibt, gewisse von Herrn Boehm betrachtete Systeme von m Differentialgleichungen mit m unbekannten Funktionen, als besonderen Fall.

Wir wollen zuerst, eine Funktion u der unabhängigen Variablen $x, y, \cdots, s, t$ betrachtend, alle Ableitungen von u in eine bestimmte Ordnung, wie folgt, stellen.

Man denke sich die Gruppe der ersten Ableitungen von u, dann links von dieser die Gruppe der zweiten Ableitungen, dann links von der letzteren die Gruppe der dritten, u. s. w. Man wähle eine bestimmte Ordnung, z. B. $x, y, \cdots, s, t$, für die unabhängigen Variablen, und man bezeichne die partiellen Ordnungen irgend einer Ableitung von u nach $x, y, \cdots, s, t$ beziehungsweise mit $\alpha, \beta, \cdots, \lambda, \mu$. Endlich verteile man:

jede der vorigen Gruppen in Untergruppen, die nach den abnehmenden Werten der partiellen Ordnung α von links nach rechts aufeinander folgen;

jede dieser Untergruppen in neue Untergruppen, die nach den abnehmenden Werten der partiellen Ordnung β von links nach rechts aufeinander folgen;

u. s. w. bis zu der partiellen Ordnung λ (inklusive).

Jede der am Ende der Operation entstandenen Gruppen besteht offenbar aus einer einzigen Ableitung, so daß alle Ableitungen von u in einer von rechts nach links bis ins Unendliche gehenden Linie in bestimmter Ordnung stehen, wie vorhin beschrieben. Demgemäß nennen wir irgend eine Ableitung von u

1) *Sur une question fondamentale du Calcul intégral*, deuxième Partie.

2) Ibid., troisième Partie.

in Beziehung auf eine andere *anterior* oder *posterior*, je nachdem sie, in der soeben gebildeten Reihenfolge, links oder rechts von dieser anderen auftritt.

Es seien

$$\alpha', \beta', \cdots, \lambda', \mu',$$
$$\alpha'', \beta'', \cdots, \lambda'', \mu''$$

die partiellen Ordnungen von zwei Ableitungen beziehungsweise nach $x, y, \cdots, s, t$; es werde überdies

$$\alpha' + \beta' + \cdots + \lambda' + \mu' = k',$$
$$\alpha'' + \beta'' + \cdots + \lambda'' + \mu'' = k''$$

gesetzt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die erste Ableitung der letzteren anterior sei, ist dann die, daß mindestens eine der Differenzen

$$k' - k'', \quad \alpha' - \alpha'', \quad \beta' - \beta'', \cdots, \quad \lambda' - \lambda''$$

nicht verschwinde, und daß die erste nicht verschwindende positiv sei.

Zur Bestimmung von m Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_m$ als Funktionen von h unabhängigen Variablen $x, y, \cdots, s, t$, sei jetzt ein aus m Differentialgleichungen bestehendes, und nach den Ableitungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\beta_1} \cdots \partial s^{\lambda_1} \partial t^{\mu_1}}, & \dfrac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{\alpha_2} \partial y^{\beta_2} \cdots \partial s^{\lambda_2} \partial t^{\mu_2}}, & \cdots & \\ \cdots\cdots\cdots, & \dfrac{\partial^{k_m} u_m}{\partial x^{\alpha_m} \partial y^{\beta_m} \cdots \partial s^{\lambda_m} \partial t^{\mu_m}} & & \end{array} \right.$$

auflösbares System vorgelegt; dabei ist

$$\alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \lambda_1 + \mu_1 = k_1,$$
$$\alpha_2 + \beta_2 + \cdots + \lambda_2 + \mu_2 = k_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_m + \beta_m + \cdots + \lambda_m + \mu_m = k_m$$

gesetzt worden. Wir nehmen ferner an, daß nur die h unabhängigen Variablen, die m unbekannten Funktionen, die m Ableitungen (2), und die den m letzteren beziehungsweise posterioren Ableitungen in den Gleichungen des Systems vorkommen. Nun ist es aber leicht zu erkennen, daß das durch die oben angezeigte Auflösung entstehende System unserer Definition der Orthonomie in jeder Hinsicht Genüge leistet.

Erstens sind die rechten Seiten des aufgelösten Systems von jeder prinzipalen Ableitung offenbar unabhängig.

Man erteile andererseits den Variablen und Unbekannten die folgenden Quoten:

	$x,\ y,\ \cdots,\ s,\ t$	$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$
1. Quote	$1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ 1$	$-k_1,\ -k_2,\ \cdots,\ -k_m$
2. „	$1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 0$	$-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \cdots,\ -\alpha_m$
3. „	$0,\ 1,\ \cdots,\ 0,\ 0$	$-\beta_1,\ -\beta_2,\ \cdots,\ -\beta_m$
. . .	. . . . .	. . . . .
. . .	. . . . .	. . . . .
h^{te} Quote	$0,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ 0$	$-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots,\ -\lambda_m$

Wenn man irgend zwei (ungleiche oder gleiche) ganze Zahlen aus der Reihenfolge $1, 2, \cdots, m$ mit i, j bezeichnet, und wenn man die Gleichung mit der linken Seite

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{\alpha_i} \partial y^{\beta_i} \cdots \partial s^{\lambda_i} \partial t^{\mu_i}} \tag{3}$$

betrachtet, so darf, der Beschaffenheit des Systems gemäß, die rechte Seite derselben die Funktion u_j und diejenigen Ableitungen von u_j, welche der Ableitung

$$\frac{\partial^{k_j} u_j}{\partial x^{\alpha_j} \partial y^{\beta_j} \cdots \partial s^{\lambda_j} \partial t^{\mu_j}} \tag{4}$$

posterior sind, enthalten. Nun aber sind sämtliche h Quoten der linken Seite (3) gleich Null; die der Funktion u_j und der Ableitung

$$\frac{\partial^{k} u_j}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \cdots \partial s^{\lambda} \partial t^{\mu}} \qquad (\alpha+\beta+\cdots+\lambda+\mu=k) \tag{5}$$

sind beziehungsweise

$$-k_j,\quad -\alpha_j,\quad -\beta_j,\ \cdots,\quad -\lambda_j \tag{6}$$

und

$$k-k_j,\quad \alpha-\alpha_j,\quad \beta-\beta_j,\ \cdots,\quad \lambda-\lambda_j. \tag{7}$$

Indem man erstens die Zahlen (6) und zweitens die Zahlen (7) mit den h verschwindenden Quoten der Ableitung (3) vergleicht, erhält man für die zu bildenden Differenzen die Werte

(8) $$k_j, \quad \alpha_j, \beta_j, \cdots, \lambda_j$$

und

(9) $$k_j - k, \quad \alpha_j - \alpha, \quad \beta_j - \beta, \cdots, \lambda_j - \lambda.$$

Die erste der Zahlen (8), k_j, ist wesentlich positiv; wenn man andererseits die Ableitung (5) der Ableitung (4) posterior voraussetzt, so verschwinden die Zahlen (9) nicht alle zu gleicher Zeit, und die erste nicht verschwindende ist positiv. Die Unbekannte u_j und die der Ableitung (4) posterioren Ableitungen von u_j sind also in Beziehung auf (3) normal, was die orthonome Beschaffenheit des Systems nach sich zieht.[1])

Das System ist überdies notwendig passiv, da die m Ableitungen, nach welchen es aufgelöst ist, beziehungsweise zu den m unbekannten Funktionen gehören: unser allgemeiner Satz über die passiven orthonomen Systeme ist also auf den jetzigen Fall anwendbar, und liefert den größten Teil der von Herrn BOEHM in den oben zitierten Abhandlungen veröffentlichten Ergebnisse.

IV. Wenn wir uns jetzt mit dem übrigen Teile dieser Ergebnisse beschäftigen, so finden wir, daß er im folgenden Satze enthalten ist:

Man betrachte ein System S von m Differentialgleichungen mit m unbekannten Funktionen $u_1, u_2, \cdots, u_m$ von h unabhängigen Variablen $x, y, \cdots, s, t$: vorausgesetzt wird, daß diese m Gleichungen nach m Ableitungen von $u_1, u_2, \cdots, u_m$ respektive aufgelöst und daß ihre rechten Seiten von jeder prinzipalen Ableitung unabhängig sind. Jeder der unabhängigen Variablen und der unbekannten Funktionen erteile man p Quoten, mit der einzigen Einschränkung, daß die ersten Quoten sämtlicher unabhängiger Variabler gleich 1 seien; und man setze voraus, daß die erste Quote jeder auf der rechten Seite einer Gleichung des Systems tatsächlich vorkommenden Unbekannten oder Ableitung nicht größer sei, als die erste Quote der entsprechenden linken Seite.

Dies festgesetzt mache man für jede Gleichung des Systems S ein Verzeichnis derjenigen Quantitäten (Unbekannten oder Ableitungen) welche, in der rechten Seite tatsächlich vorkommend, in Beziehung auf die linke anormal sind; man nehme die Ableitungen erster Ordnung jeder rechten Seite nach den entsprechenden anormalen Quantitäten, und man bezeichne die Gruppe aller dieser ersten Ableitungen mit (A): *wenn man jetzt*

1) Vgl. ibid. Nr. 21.

den hypothetischen Integralen des Systems S willkürliche Anfangsbestimmungen vorschreibt, mit der einzigen Einschränkung, daß sämtliche Funktionen (A) für die Anfangswerte aller ihrer Argumente verschwinden, so existieren die in Rede stehenden Integrale tatsächlich.[1])

Nun aber betrachte man ein nach den Ableitungen (2) aufgelöstes System, und setze voraus, daß $k_1, k_2, \cdots, k_m$ beziehungsweise die Ordnungen der höchsten in den Gleichungen des Systems vorkommenden Ableitungen von $u_1, u_2, \cdots, u_m$ seien; endlich erteile man den h Variablen und den m Unbekannten dieselben Quoten, wie in der Nummer III. Daraus ergibt sich: 1. daß die rechten Seiten von jeder prinzipalen Ableitung unabhängig sind; 2. daß die erste Quote jeder in der rechten Seite einer Gleichung des Systems tatsächlich vorkommenden Unbekannten oder Ableitung nicht größer ist, als die erste Quote der entsprechenden linken Seite. Unser Satz ist also auf dieses System anwendbar, und läßt das allgemeinste Kriterium des Herrn Boehm wiederfinden.

Es sei schließlich bemerkt, daß ein besonderer Fall des betreffenden Kriteriums, nämlich

$$m = 1, \cdot h = 2,$$

schon am 2. Nov. 1897 von Herrn Goursat angedeutet worden war (*Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*).

1) Ibid., Nr. 31.

Druckfertig erklärt 2. VIII. 1902.]

SITZUNG VOM 28. JULI 1902.

Bei Eröffnung der Sitzung teilte der Sekretär mit, daß laut eingegangener Verordnung des Königl. Hauses Seine Majestät der König Georg allergnädigst geruht haben, das Protektorat über die Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu übernehmen.

Vorträge haben gehalten:

Herr His teilte eine Arbeit von Herrn Prof. Held mit: „Über den feineren Bau des Gehörorgans". (Für die „Abhandlungen".)

Herr Credner teilte eine Arbeit mit von Herrn Etzold: „Das Wiechert'sche astatische Pendelseismometer der Erdbebenstation Leipzig und die von ihm gelieferten Seismogramme von Fernbeben".

Herr A. Mayer: Nachtrag zu dem Aufsatze: „Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung".

Herr Wiener: „Zur Theorie des optischen Verhaltens von Mischkörpern mit geschichtetem Bau".

Eingänge und Geschäftliches:

1. Eine Verordnung des K. Ministeriums teilt die Genehmigung der Satzungen der Mendestiftung mit. Es wird beschlossen, der bestehenden Kommission die einleitenden Schritte zur Ernennung eines juristischen Aktors zu übertragen.
2. Ein Antrag des Herrn Wiener betr. die Verwendung der Mendestiftung wird auf nächste Tagesordnung gesetzt.
3. Zu außerordentlichen Mitgliedern werden einstimmig ernannt die Herren

   Prof. Dr. K. Correns,
   Prof. Dr. M. Siegfried,
   Prof. Dr. H. Held.

4. Ein Schreiben der Königl. Akad. d. Wissensch. in Berlin betr. die Monumenta Germaniae paedagogica wird vorgelegt und dessen Beantwortung im Sinne früher gefaßter Beschlüsse festgesetzt. Die Adresse zur Abelfeier in Christiania wird vorgelegt und genehmigt.
5. Vorlage der eingegangenen Geschenke und Regelung des Tauschverkehres.

Das Wiechertsche astatische Pendelseismometer der Erdbebenstation Leipzig und die von ihm gelieferten Seismogramme von Fernbeben.

Mit zwei Tafeln und zwei Textfiguren.

Von

FRANZ ETZOLD.

Seit mehr als 25 Jahren erblickt der Direktor der Königl. Sächs. geologischen Landesanstalt, Herr Geh. Bergrat Prof. Dr. CREDNER, in dem Verfolg der sich in seinem Arbeitsgebiete abspielenden seismischen Ereignisse einen nicht unwichtigen Zweig seiner Tätigkeit. Den von ihm über diese Ereignisse gemachten Studien und Zusammenstellungen, sowie den hieraus gezogenen Schlußfolgerungen lagen zunächst ausschließlich solche Mitteilungen zu Grunde, die bei ihm in Beantwortung seiner von Zeit zu Zeit in den verbreitetsten Tagesblättern des Königreichs veröffentlichten „Erdbebenaufrufe" und „Erdbebenfragebogen" in reichlicher Zahl eingingen und die dann jedesmal Veranlassung zu umfassenden Spezialanfragen in den jeweiligen Schüttergegenden gaben. Seit einer Reihe von Jahren aber organisierte CREDNER die Methode der sächsischen Erdbebenbeobachtung und -meldung in der Weise, daß er in 52 über Sachsen und die südlich und westlich angrenzenden Landstriche verteilten Ortschaften je einen für Erdbebenfragen interessierten Herrn mit dem Referate über alle in seinem Gebiete vorkommenden Erderschütterungen betraute und hierdurch eine viel dichtere und zuverlässigere, pflichtgetreue Berichterstattung erzielte. Doch auch dieser strafferen Organisation der Erdbebenbeobachtung hafteten noch Mängel an, weil sie sich nur auf die von Menschen gefühlten und subjektiv empfundenen und gedeuteten Wahrnehmungen beschränkte. Um diese Mängel zu beseitigen, um zu einem in allen Richtungen möglichst vollständigen Bilde jedes auf sächsischem Boden beobachteten Bebens zu gelangen, faßte CREDNER die Aufstellung

eines Seismometers in Leipzig ins Auge, das die Aufgabe erfüllen sollte, die genauen Zeiten des Eintrittes und der Dauer, sowie der Zahl und der Intensität der Bodenbewegungen zunächst und in erster Linie aller vogtländisch-erzgebirgischen Erderschütterungen, zugleich aber auch von Fernbeben selbsttätig zu registrieren. Nach vielseitigen und sorgsamen Erwägungen fiel endlich die Wahl auf das von Prof. Dr. WIECHERT in Göttingen konstruierte und in dem dortigen geophysikalischen Institute erfolgreich arbeitende *astatische Pendelseismometer*. Der Plan zur Aufstellung eines solchen Apparates nahm unter fortdauernder maßgebender Beratung von seiten des Herrn WIECHERT bereits im Frühjahr 1900 soweit feste Gestalt an, daß nach den Angaben des genannten Herrn schon damals der massive Sockel und die Steinpfeiler gebaut wurden, welche das Seismometer tragen sollten. Die Aufstellung des Apparates verzögerte sich indessen, da Herr WIECHERT noch lange Zeit mit der steten Verbesserung seines Seismographen beschäftigt war. Welch große Wandlungen der letztere hierbei durchmachte, erhellt daraus, daß aus dem im Jahre 1900 in Aussicht genommenen hängenden jetzt ein stehendes Pendel geworden ist. Als solches, also als labiles Pendel wurde im März dieses Jahres das Seismometer durch Dr. SCHLÜTER, den bald nach seinem hiesigen Aufenthalte verstorbenen Assistenten des Herrn Prof. Dr. WIECHERT, in dessen Auftrag und Vertretung hier aufgestellt und hat seit Ende März Aufzeichnungen geliefert. Durch letztere hat der Apparat sich als außerordentlich feinfühlig erwiesen, und zwar wurden von ihm verzeichnet:

1. Fernbeben,
2. schwache Nahbeben,
3. bradyseismische Bewegungen und
4. durch das Großstadtleben, den Maschinenbetrieb und andere lokale Einflüsse verursachte Erzitterungen und Schwankungen des Bodens.

Von diesen Aufzeichnungen sollen im folgenden diejenigen von Ende März bis 15. Juli dieses Jahres erhaltenen Seismogramme, welche sich auf einen *fernliegenden Herd* beziehen lassen, eine kurze Schilderung finden, zuvor aber soll über den für die Beurteilung der Leistungen des Seismometers bedeutungsvollen Standort desselben berichtet und wenigstens das Konstruktionsprinzip des letzteren angedeutet werden, da dessen eingehende

Beschreibung von seiten des Herrn Wiechert noch nicht erschienen ist.

Die Seismogramme der *Nahbeben*, welche von dem benachbarten Vogtland und Erzgebirge ausgehen, werden von Herrn Credner bei Fortsetzung seiner Studien über die seismischen Erscheinungen in *Sachsen* zur Ausnutzung gelangen.

Standort des Wiechertschen astatischen Pendelseismometers in Leipzig.

(Hierzu Fig. 1.)

Auf dem von der Liebigstraße nach Süden, der Stephanstraße nach Osten, der Brüderstraße nach Norden und der Thalstraße nach Westen hin begrenzten Baublock im Südosten Alt-Leipzigs standen bei der Vornahme der Maurerarbeiten für das Seismometer folgende vier Universitätsinstitute: das physikalisch-mineralogisch-geologische Institut an der Südseite, das zoologische Institut in der Nordwestecke, das landwirtschaftliche Institut in der Nordostecke und in deren Mitte das Tschermaksche Institut, in welchem mathematische Vorlesungen abgehalten wurden. Letzteres wurde abgebrochen und an seiner Stelle im Jahre 1901 ein Heizhaus für die umliegenden Gebäude errichtet, während auf dem früher freien Raume zwischen dem zoologischen und dem landwirtschaftlichen Institut der Hörsaal für angewandte Chemie Platz fand, sodaß gegenwärtig der ganze Block so bebaut ist, wie es die nebenstehende Skizze (Fig. 1) angiebt.

Das physikalisch-mineralogisch-geologische Institut besitzt seinen Eingang in der Mitte der Nordseite, wird durch das Treppenhaus in eine Ost- und eine Westhälfte gegliedert und weist in jedem Stockwerk einen von Ost nach West verlaufenden Korridor auf, sodaß die eine Hälfte jeder Etage ihr Licht von Norden, die andere das ihre von Süden empfängt. Im nördlichen Teile des mit seiner Sohle 10 cm unter Tage liegenden Souterrains und zwar in dem auf der Skizze mit *S* bezeichneten Kellerraume ist das Seismometer aufgestellt worden. Dasselbe ist hiernach 42 m von der asphaltierten Liebigstraße, 45 m von der hier gleichfalls asphaltierten Stephanstraße, 60 m von der gepflasterten Brüderstraße und 85 m von der makadamisierten Thalstraße entfernt und steht auf einem 1,2 m in den Baugrund eingesenkten,

massiven, aus durch Zement zusammengehaltenen Klinkersteinen bestehenden Sockel, der von einer 30 cm mächtigen Schicht von Zementbeton getragen wird. Was in der Nähe gehende Maschinen anlangt, so steht im Hause selbst und zwar im Westflügel ein Gasmotor von 4 Pferdekräften, der gelegentlich eine Dynamomaschine oder auch einen Kompressor auf 10 Atmosphären treibt,

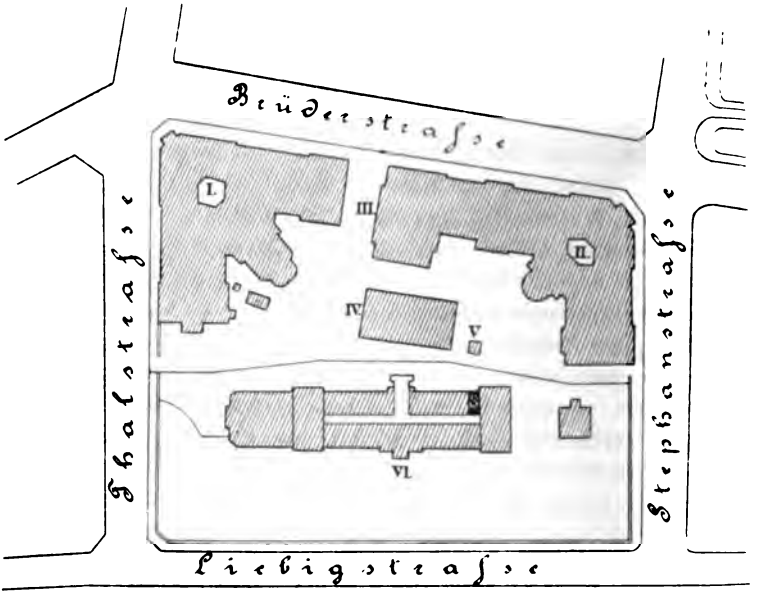


Fig. 1. Skizze zur Orientierung über die Lage des zur Aufstellung des Seismometers gewählten Raumes.

I. Zoologisches Institut. II. Landwirtschaftliches Institut. III. Hörsaal für angewandte Chemie. IV. Heizhaus. V Esse für das Heizhaus. VI. Physikalisch-mineralogisch-geologisches Institut. S. Seismologisches Observatorium.

ferner sind in den Gebäuden an der Nordseite der Brüderstraße zwei Dampfmaschinen in Tätigkeit, von denen jede etwa 100 Touren in der Minute macht. Gewisse störende Beeinflussungen könnte endlich das Pendel möglicherweise noch durch die ca. 5 m tiefe Ausschachtung des Heizhauses sowie durch die daneben stehende, 36 m hohe und über 5 m tief gegründete Esse erfahren. Auf Isolierung des Seismometers vom Gebäude ist bei Aufstellung des ersteren keine besondere Rücksicht genommen worden, der Fuß-

boden ist bis an den Sockel mit Ziegelsteinen gepflastert und mit einer Zementschicht bedeckt.

Die Wahl des Raumes und die Art der Aufstellung des Apparates fand die volle Billigung und wurde nach den Angaben des Herrn WIECHERT getroffen. Da sich die lokalen Störungen bei der großen Empfindlichkeit des Apparates in der Folge doch in unangenehmer Weise bemerkbar gemacht haben, so soll gegen dieselben sobald als möglich Abhilfe geschaffen werden.

Konstruktionsprinzip des Wiechertschen astatischen Pendelseismometers.

Das Prinzip der Konstruktion des WIECHERTschen Pendelseismometers mit mechanischer Registrierung ist aus der nebenstehenden, nach freundlicher Erlaubnis des Herrn Prof. WIECHERT von uns gegebenen Skizze (Fig. 2) ersichtlich: Auf der Stützplatte *St* steht im Drehungspunkte *D* das Pendel *P* mit der 1100 kg schweren Eisenmasse *PM*. Auf der durch die Tischplatte *T* reichenden Pendelstange sitzt der Stab *Sb*, welcher mit der Stabilisierungsstange *Sta* verbunden ist. Letztere wird durch ein horizontal gestelltes Federnpaar *F* getragen, das nach der anderen Seite hin von einem durch Stützen auf dem Tische *T* festgeschraubten Stab *S* gehalten wird. Vom Punkte *V* der Stabilisierungsstange aus führt eine Verbindung in die Dämpfungstrommel *DT* und eine andere durch die Schubstange *SS* nach dem kurzen, um die vertikale Drehungsachse *DA* beweglichen Hebelarm *H1*. Um *DA* ist gleichsinnig und gleichzeitig auch der zweite längere Hebelarm *H2* drehbar, von dessen Ende aus der vorn den gläsernen Schreibstift *Sf* tragende Schreibarm *SA* nach der Rolle *R* führt, über welche das berußte Papier läuft.

Um die Reibung aufzuheben, sind sämtliche Drehungsachsen und -punkte durch Federn hergestellt, insbesondere ist im Drehungspunkte *D* die Reibung durch Anbringung eines Cardani'schen Federngehänges vermieden.

Aus dieser kurzen Schilderung ist ersichtlich, daß dem bedeutenden Eisengewichte, dessen Labilität durch das Federnpaar *F* ausbalanciert wird, die Rolle zufällt, als stationäre Masse zu dienen, wenn der Apparat zur Aufzeichnung von Erdbewegungen verwendet wird. Bewegt sich nämlich infolge einer Erderschütterung

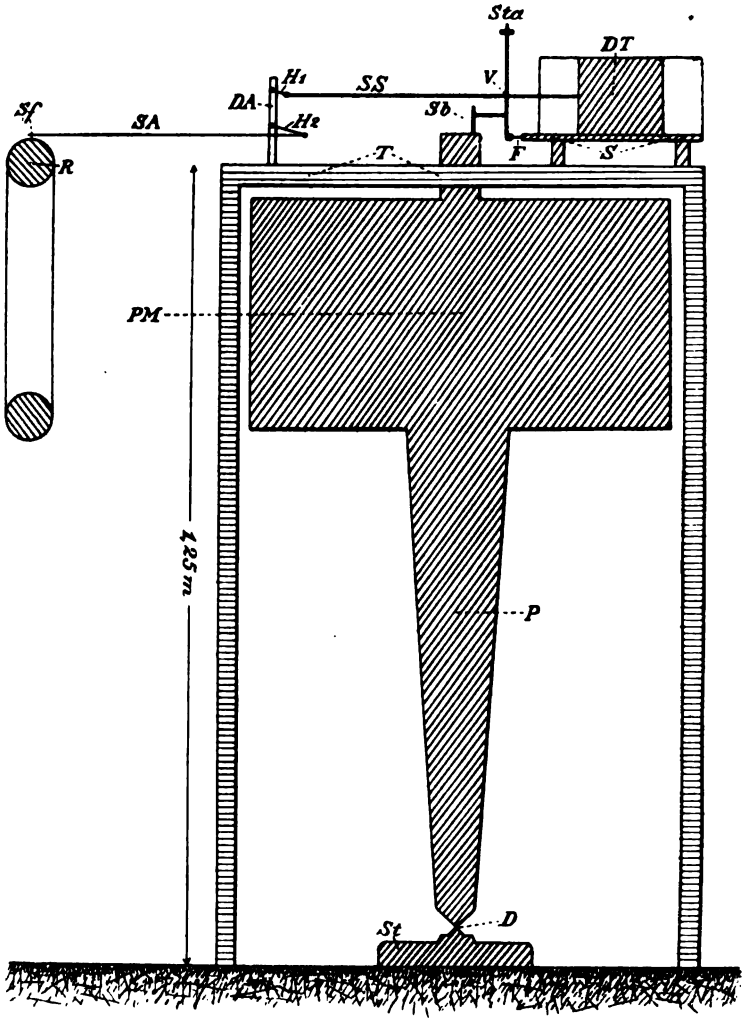


Fig. 2. Schematische Darstellung der Konstruktion von Wiecherts astatischem Pendelseismometer.

St Auf dem massiven Sockel ruhende eiserne Stützplatte. *P* Das stehende Pendel mit der 1100 kg schweren Pendelmasse *PM*. *D* Durch ein CARDANI'sches Federngehänge reibungslos konstruierter Stütz- und Drehungspunkt für das Pendel. *T* Die Hebelübertragung und Dämpfungseinrichtung tragender Tisch. *Sb* Auf das Pendel aufgeschraubter, mit der Hebelübertragung und mit der Dämpfungstrommel *DT* in Verbindung stehender Stab. *Sta* Stabilisierungsstange. *F* Horizontal gestelltes, die Stabilisierungsstange tragendes Blattfedernpaar. *S* Das Federnpaar *F* haltender, mit dem Tisch *T* verbundener Stab. *DT* Dämpfungstrommel. *V* Befestigungspunkt für *SS*, die Schubstange und den nach der Dämpfungstrommel führenden Stab an der Stabilisierungsstange. *DA* Vertikale Drehungsachse für *H1*, den mit der Schubstange *SS* verbundenen kurzen und *H2*, den langen Hebelarm. *SA* Schreibarm, am langen Hebelarm *H2* befestigt und vorn *Sf*, den Schreibstift tragend. *R* Rolle, über welche der berußte Papierstreifen läuft.

die mit der Erde verbundene Tischplatte, so nimmt das Pendel an dieser Bewegung nicht teil, gegen dasselbe stoßen vielmehr die verschiedenen Übertragungsvorrichtungen für Bewegungen von der Stabilisierungsstange ab bis zum Schreibstift. Die kolossale Schwere der Eisenmasse setzt diese in den Stand, die Reibung, welche der Schreibstift auf dem berußten Papierstreifen erhält, zu überwinden, sodaß eine ins einzelne gehende Aufzeichnung der Bodenbewegungen erfolgen kann. Natürlich bleibt das Pendel nicht absolut stationär, es gerät vielmehr, falls sich die gegen seinen Drehungspunkt *D* erfolgenden Anstöße wiederholen, in Eigenschwingungen, die sich selbstverständlich mit notieren. Da derartige Eigenschwingungen das wahre Bild der seismischen Bewegungen verwischen würden, ist in sinnreicher Weise durch die Anbringung der Dämpfungstrommel dafür Sorge getragen, daß erstere unschädlich gemacht werden. Von der Energie, mit der die Dämpfungseinrichtung wirkt, kann man sich leicht überzeugen, wenn man das Pendel durch Anstoßen oder Anblasen künstlich zum Schwingen bringt, man sieht dann, daß dasselbe nach einem in der Vergrößerung 10—15 mm messenden Ausschlage fast direkt in die Ruhelage zurückkehrt. Der Anforderung an ein gutes mechanisch registrierendes Pendelseismometer, ein tunlichst getreues Bild der wirklichen Bodenbewegungen zu liefern, wird also WIECHERTS astatisches Pendel dadurch gerecht, daß die unvermeidlichen Eigenschwingungen durch eine energisch wirkende Dämpfungsvorrichtung aufgehoben werden, daß die Reibung in den Drehungspunkten und -achsen durch reichliche Verwendung von Federnpaaren beseitigt ist und daß die Pendelmasse Schwere genug besitzt, um der mit tunlichster Gewichtsersparnis hergestellten Schreibvorrichtung und der Reibung der Schreibstifte gegenüber stationär zu bleiben.

Die Hebelvorrichtungen sind bei dem Leipziger Pendel so miteinander in Verbindung gebracht, daß eine 250fache Vergrößerung der vom Boden auf die Tischplatte übertragenen Bewegungen resultiert.

Um die Erdbewegungen in eine Ostwest- und in eine Nordsüdcomponente zu zerlegen, ist auf dem Pendel nicht nur *eine* Stange *Sb* angebracht, wie der Einfachheit halber die Skizze zeigt, sondern es sind deren zwei befestigt und zwar steht die eine von der Pendelachse aus in der Nordsüd-, die andere in der Ostwestlinie. Selbstverständlich ist auch die ganze weitere

Führung von diesen Stangen aus in doppelter Zahl vorhanden, sodaß schließlich der eine Schreibstift die Bewegungen der Nord-süd- und der andere die der Ostwestcomponente auf je einen berußten Papierstreifen schreibt.

Jeder der 90 cm langen Papierstreifen ist an den Enden zusammengeklebt, läuft also ohne Ende über die durch ein einfaches Uhrwerk bewegte Rolle R und wird gleichzeitig, da das Gewicht des Uhrwerkes an einem Schneckengange aufgehangen ist, nach links verschoben, sodaß die Notierung die Gestalt einer Spirallinie erhält.

Zur Markierung der Zeit ist folgende einfache Einrichtung getroffen: Unter den beweglichen Enden der Schreibarme hängt ein leichter Rahmen, welcher durch einen Elektromagneten gehoben werden kann. Dieser Elektromagnet ist mit einem LECLANCHÉ-Element verbunden, dessen zweiter Draht zunächst mit den Wellen eines einfachen Regulators mit Holzpendel in Verbindung steht. Indem mit diesen Wellen sich Hartgummischeiben drehen, die an bestimmter Stelle eine Platineinlage besitzen, wird am Ende jeder Minute für die Dauer von etwa zwei Sekunden, am Ende jeder Stunde für die Dauer von etwa 15 Sekunden der Kontakt hergestellt; der Elektromagnet hebt den Rahmen, mit ihm die Enden der Schreibarme und infolgedessen wird nach jeder Minute für zwei Sekunden, nach jeder Stunde auf etwa 15 Sekunden die Notierung unterbrochen.

Bedienung des Seismometers.

Die jeden Tag auf die Schreibrolle des WIECHERTschen Apparates zu legenden beiden Papierstreifen werden in so großer Zahl auf einmal berußt, daß der Vorrat reichlich für eine Woche langt, ebenso werden die während einer Woche beschriebenen Streifen zunächst bloß abgehoben und aufbewahrt und erst am Ende der Woche direkt nacheinander mit alkoholischer Schellacklösung fixiert. Die jeden Tag am eigentlichen Apparate vorzunehmende Arbeit beschränkt sich also auf das Auswechseln der Papierstreifen und das Aufziehen des dieselben bewegenden Uhrwerkes. Hin und wieder hat sich der Nullpunkt des Pendels soweit verlegt, daß die Schreibnadeln zu nahe an die Papierränder kommen, alsdann muß durch Auflage, bez. Verschiebung

kleiner Gewichte auf der Pendelmasse dieser Nullpunkt reguliert werden.

Besondere Aufmerksamkeit ist naturgemäß der Zeitbestimmung zuzuwenden. Wie oben erwähnt, wird die Zeitmarkierung durch einen einfachen Regulator mit Holzpendel bewerkstelligt. Der Gang dieser Uhr konnte anfänglich durch das liebenswürdige Entgegenkommen des Herrn Geheimrat Prof. Dr. Bruns, Direktors der Universitätssternwarte, mit dem eines Morrisschen Schiffschronometers verglichen und nach demselben reguliert werden. Leider stellten sich in dieser Einrichtungszeit an den elektrischen Kontakten und an dem Gangwerke für die Papierstreifen verschiedene Mängel heraus, sodaß — unter Hinzunahme der Ungeübtheit in derartigen Arbeiten — die Zeitbestimmung nicht mit gleichbleibender Zuverlässigkeit durchgeführt werden konnte und infolgedessen die Eintrittszeit von einigen der erst notierten Beben vielleicht nicht ganz genau angegeben worden ist Seitdem ist die Uhr so reguliert, daß sie pro Tag um höchstens 5 Sekunden von der Sternzeit abweicht. Alle 2—3 Tage wird nun der Regulator nach der Koinzidenzmethode mit einer Taschenuhr verglichen, welch letztere Herr Geheimrat Prof. Dr. Bruns freundlichst gestattet, direkt darauf in der nur 250 m entfernten Sternwarte mit einer Fraunhoferschen Normaluhr zu vergleichen. Hierdurch dürfte Gewähr gegeben sein, daß jetzt und in Zukunft der Eintritt jedes Bebens und die Dauer der verschiedenen Phasen desselben in Leipzig mit hinreichender Genauigkeit festgestellt werden können. Über die Zeitvergleiche und die Korrektur gegenüber der mitteleuropäischen Zeit wird ein Journal geführt, ebenso werden Zeitungsnachrichten und briefliche Mitteilungen über Erdbeben gesammelt und alle Ereignisse notiert, welche die Aufzeichnungen des Seismometers irgendwie beeinflussen könnten.

Die berußten und beschriebenen Papierstreifen werden, nachdem sie mit Schellacklösung behandelt und getrocknet sind, auseinandergeschnitten und in Mappen aufbewahrt, ganz gleichgültig, ob sie Seismogramme aufweisen oder nicht.

Verteilt man die dem Seismometer und seinen Nebenapparaten u. s. w. nach alledem zu widmende Zeit gleichmäßig, so ergiebt sich, daß sich pro Tag ein Zeitaufwand von einer reichlichen Stunde notwendig macht.

Gerland hält bei einer hinreichend ausgestatteten Erdbebenstation noch Ablesungen am Barometer, Thermometer und Hygro-

meter für erforderlich. Die Anbringung eines Barometers dürfte in Leipzig kaum nötig sein, da in der, wie erwähnt, nur 250 m entfernten Sternwarte barometrische Beobachtungen dauernd angestellt werden. Anders verhält es sich mit der Feststellung der Temperatur- und Feuchtigkeitsschwankungen. Diese dürften bei der vorhandenen Verbindung des Seismometers mit dem Mauerwerke des physikalisch-mineralogisch-geologischen Institutes und bei der der Erdoberfläche nahen Aufstellung des Instrumentes tatsächlich den Gang des letzteren in erheblichem Maße beeinflussen, und deren dauernde Beobachtung zur vollen wissenschaftlichen Ausnutzung des außerordentlich feinfühligen Apparates unerläßlich werden.

Großstädtische Unruhe.

Bei der Betrachtung der vom Glasstifte beschriebenen Papierstreifen fällt sofort auf, daß die während der Tagesstunden gezogenen Linien wesentlich breiter sind, als die in den Nachtstunden erzielten. Schon mit bloßem Auge erkennt man, daß die Tageslinien zu stande kommen, indem der Schreibstift fortwährend Zitterbewegungen ausführt und die Lupe gestattet, auf der in einer Minute vom Stifte durchlaufenen Strecke ca. 100, etwa an die Zähne einer feinen Laubsäge erinnernde Auszackungen zu zählen. Der Gedanke liegt nahe, diese Auszackungen mit den in der Nachbarschaft gehenden Maschinen in Zusammenhang zu bringen, da dieselben, wie bereits erwähnt, pro Minute auch etwa 100 Touren machen, und da während der Nacht, wenn die Maschinen stehen, die vom Seismometer geschriebenen Linien glatt erscheinen und nur die Stärke schwacher Bleistiftlinien besitzen. Auffallenderweise aber erkennt man mit scharfer Lupe, daß auch diese scheinbar glatten Nachtlinien in Wirklichkeit Zickzacklinien sind und daß auch bei ihnen auf den Weg einer Minute etwa 100 Auszackungen kommen. Taf. I, Fig. 12 zeigt in 2500facher Vergrößerung die Bewegungen, welche der Schreibstift der NS-Componente in der Minute von $3^h\,1^m$—$3^h\,2^m$ am 8. Mai zurückgelegt hat. Den Nachtlinien vollkommen gleich sind die an Sonn- und Festtagen erzielten Aufschreibungen. Als Erreger dieser Fibrationen können, abgesehen von den Maschinen, wohl noch die naheliegenden hohen Baulichkeiten, namentlich die Heizhausesse in Frage kommen, da aber gleichen oder ähnlichen Ver-

hältnissen wie der Standort des Seismometers wohl jeder Punkt unserer Großstadt ausgesetzt ist, so ergiebt sich, daß deren oberflächliche Bodenschichten überhaupt nie zur Ruhe kommen. Der Versuch, die Stärke dieser chronischen Bodenerzitterungen zu messen, führte auf folgende Zahlen:

Die Breite der Nachtlinien beträgt 0,1 bis 0,15 mm. Diese Breite kann bei der Kürze der Periode der Mikroschwingungen gegenüber derjenigen der Eigenschwingungen des Pendels gleich der 250mal vergrößerten Amplitude der chronischen Fibrationen gerechnet werden, sodaß deren wahre Größe 0,0004 bis 0,0006 mm ist. Mit anderen Worten:

> *Der Boden der Stadt Leipzig führt am Standorte des Seismometers bei scheinbar völliger Ruhe pro Minute etwa 100 Schwingungen von 0,0004 bis 0,0006 mm Weite aus, während der industriellen Arbeitszeit aber steigt der letztere Betrag auf das Doppelte und höher.*

Selbstverständlich vermögen diese winzigen, etwaigen seismischen Wellen übergeordneten Erzitterungen die Aufzeichnungen der ersteren, besonders während der Nacht, absolut nicht zu verundeutlichen, sie sind höchstens imstande, den ersten Einsatz während der Tageszeit zur Notierung kommender Fernbeben zu verwischen und mußten aus diesem Grunde bereits in unserem ersten Berichte über mikroseismische Beobachtungen in Leipzig erwähnt werden.

Gliederung und Deutung der Seismogramme.

Die Gliederung der Seismogramme in verschiedene Phasen ist im allgemeinen nach der von OMORI[1]) angegebenen Einteilung erfolgt. Nach diesem Erdbebenforscher zerfällt das Seismogramm in die Vorphase (preliminary tremors), die Hauptphase (principal portion) und den Endteil (end portion). Rührt das Seismogramm von einem Fernbeben her, so gliedert sich die Vorphase gewöhnlich in eine erste und eine zweite Vorphase. Die erste besteht aus Fibrationen mit kleiner Amplitude und sehr kurzer oder relativ kurzer Periode, die zweite setzt in der Regel mit Schwingungen von wesentlich größerer Amplitude und längerer Schwingungs-

1) Publications of the Earthquake Investigation Committee. Tokio Nr. 5. p. 11.

dauer ein; bei beiden nimmt die Stärke der Ausschläge meistens nach dem Ende hin ab. Die Hauptphase mit (gewöhnlich) den größten Amplituden (dem Maximum) gliedert OMORI wieder in drei Unterabteilungen: Eine Einleitungs-(Initial-)Phase, eine langsame und eine raschere Periodenphase.

Als A. BELAR der 1. internationalen seismologischen Konferenz zu Straßburg seine „Erdbebenbeobachtungen an der Laibacher Erdbebenwarte" vorlegte, nahm er im großen ganzen die nämliche Einteilung der Seismogramme vor und gab zugleich eine einfache Erklärung für die Verschiedenartigkeit der Aufzeichnung in den einzelnen Phasen, die jedenfalls größte Beachtung verdient, auch wenn sie in Zukunft in dieser oder jener Hinsicht sollte modifiziert werden müssen.[1]) Vom Stoßzentrum strahlen nach ihm Kugelwellen (Erdwellen) mit longitudinaler Schwingung aus, pflanzen sich eventuell durch den ganzen Erdkörper fort und gelangen so an jeden beliebigen Punkt der Erdoberfläche, also auch an den Standort eines Seismometers, welches sie als erste Vorphase, als preliminary tremors aufzeichnet. Der Punkt, in welchem diese Kugelwellen zuerst die Erdoberfläche erreichen und als von unten kommende Stöße (succussorische Beben) empfunden werden, ist das Epizentrum. Hier nun erzeugen sie sehr starke, transversal schwingende Oberflächenwellen (undulatorische Beben), die sich nach allen Richtungen längs der Erdoberfläche ausbreiten, wesentlich geringere Geschwindigkeit besitzen als die Kugelwellen und vom Seismometer als Hauptphase (Maximum des Bebens aufgezeichnet werden. Ehe diese letzteren Wellen das Seismometer erreichen, werden natürlich diejenigen Oberflächenwellen bei demselben eintreffen, welche von den die Oberfläche zwischen dem Epizentrum und der mikroseismischen Station, also besonders im pleistoseismischen Gebiete, erreichenden Kugelwellen erzeugt werden. Diese als erste Oberflächenwellen beim Seismometer anlangenden Wellen zeichnen sich auf dem Seismogramme als zweite Vorphase auf. Naturgemäß werden sich zwischen den an verschiedenen Orten erzeugten Oberflächenwellen Interferenzen einstellen, ebenso werden sich reflektorische Bewegungen geltend machen, sodaß der Hauptphase mit den dominierenden langen

1) Verh. der vom 11. bis 13. April 1901 zu Straßburg abgehaltenen 1. internationalen seismologischen Konferenz p. 326 (Ergänzungsband I zu GERLANDS Beiträgen zur Geophysik, Leipzig 1902).

Wellen eine unregelmäßige Aufzeichnung folgt, bis sich ganz allmählich die Ruhe wieder einstellt.

Nach dieser Erklärung der auf den Seismogrammen unterscheidbaren Phasen kommt dem Beginne der 1. Vorphase (dem 1. Einsatze) und dem Beginne der Hauptphase offenbar die größte Bedeutung zu, sodaß sich die folgenden Beschreibungen in der Hauptsache auf die Festlegung dieser beiden Punkte und die sich unmittelbar aus derselben ergebenden Schlußfolgerungen beschränken.

Die beschriebenen Seismogramme sind auf den beigegebenen Tafeln fast sämtlich abgebildet, um erstens die vorgenommene Phasenbegrenzung zu illustrieren, zweitens den Vergleich von anderen Seismometern erhaltener Aufzeichnungen mit denen des WIECHERTschen astatischen Pendelseismometers zu ermöglichen und die des letzteren den Fachkreisen vorzuführen, endlich drittens, um die erhaltenen Seismogramme etwaigen anderweitigen Untersuchungen zugängig zu machen. Sollen die Abbildungen dem letztgenannten Zwecke dienen, so muß man an sie den Anspruch möglichst photographischer Treue stellen. Zur Erreichung einer derartigen Genauigkeit ist ein Pausverfahren ausgeschlossen, da bei einem solchen auf eine Länge von 90 cm Verzerrungen geradezu unvermeidlich sind, anderseits konnte Lichtdruck nicht in Frage kommen, da bei seiner Anwendung Ungleichmäßigkeiten in der Berußung und Fixierung die Kurven oft nicht genügend deutlich und durch Flecke gestört erscheinen lassen würden. Aus diesen Gründen wurde folgendes Reproduktionsverfahren angewendet: Die Papierstreifen dienten nach Art photographischer Negative zur Erzielung von Positiven. Auf diesen wurde das Seismogramm des zu vervielfältigenden Abschnittes mit scharfer Zeichenfeder nachgezeichnet und die so erhaltene Kurve photolithographisch reproduziert. Wenn auch zuzugeben ist, daß die so erzielten Drucke weniger glatt erscheinen, als wenn der Lithograph die Kurven mit der Nadel in den Stein graviert hätte, so kann dieser Schönheitsfehler gegenüber der erzielten Genauigkeit nicht ins Gewicht fallen. Wenn bei dem eingeschlagenen Verfahren das Papier nach dem notwendigen Durchnässen nicht gleichmäßig und auf den gleichen Umfang wieder trocknet, so ist das ein Fehler, den die photographische Registriermethode von Erdbewegungen gleich bei der Erzeugung der Originalseismogramme mit in Kauf nimmt.

Die bequeme und billige Methode der Herstellung photographischer Abzüge direkt von den berußten Papierstreifen dürfte übrigens den Austausch besonders interessanter Seismogramme unter den Erdbebenbeobachtungsstationen und die Anlage eines Generalarchives von solchen an der Zentralstelle zu Straßburg ermöglichen.

Die Seismogramme von Fernbeben.

Im Laufe des Zeitraumes vom 28. März bis 15. Juli 1902 hat das WIECHERTsche Seismometer in Leipzig die folgenden Fernbeben registriert:

1. Das Molukkenbeben vom 28. März 16^h.
2. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 2. April 6^h.
3. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 5. April 20^h.
4. Das Beben von Irkutsk am 12. April 1^h.
5. Das Guatemala-Beben vom 19. April 3^h.
6. Das südwestfranzösische Beben vom 6. Mai 4^h.
7. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 8. Mai 4^h.
8. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 25. Mai 18^h.
9. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 26. Mai 5^h.
10. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 11. Juni $7^h 30^m$.
11. Das Hall-Innsbrucker Beben vom 19. Juni $10^h 30^m$.
12. Das macedonische Beben vom 5. Juli 16^h.
13. Ein Erdbeben von unbekannter Stätte am 6. Juli 14^h.
14. Das südpersische Beben am 9. Juli ca. 5^h.

1. Das Molukkenbeben vom 28. März.

Taf. I. Fig. 1. (Vergl. den Anfangsabschnitt der Tafelerklärung über die Benutzung der Seismogramme.)

Anfang d. Seismogr. $16^h 7^m 20^s$, Korrektur -9^m, MEZ. $15^h 58^m 20^s$[1]);
Ende „ „ $17^h 38^m -^s$, „ -9^m, „ $17^h 29^m -^s$.

Dieses erste von WIECHERTS astatischem Pendelseismometer in Leipzig am Charfreitag aufgezeichnete Seismogramm fällt da-

1) Bei den Beschreibungen der Seismogramme sind die Zeitangaben unkorrigiert, d. h. auf Grund der von der Seismometeruhr auf den Papierstreifen gemachten Stunden- und Minutenmarken gegeben worden, da die letzteren die Orientierung in dem Kurvensystem des Papierstreifens erleichtern. Schließen sich jedoch an diese Beschreibungen approximative Berechnungen und Vergleiche mit Beobachtungen anderer Stationen an, so sind die Zeitangaben nach MEZ. korrigiert.

durch auf, daß die erste Vorphase nicht mit einem größeren und scharfen Ausschlag einsetzt und daß auch weiterhin die einzelnen Phasen sich nicht durch plötzliches Anschwellen der Schwingungsweiten voneinander abheben. Besonders bemerkenswert erscheinen die auffällig kleinen Amplituden der langen Wellen der Hauptphase, doch kann über die Berechtigung, diese außerordentlich langperiodigen Wellen der Hauptphase des Bebens und zwar deren Anfang zuzurechnen, wie die rechnerischen Ergebnisse zeigen werden, keinerlei Zweifel bestehen.

Als Zeit des ersten Einsatzes betrachten wir den Zeitpunkt $16^h 7^m 20^s$, von welchem an sich auf der Linie ein Schwarm gegenüber den ständigen etwas kräftigerer Erzitterungen bemerkbar macht. Von $16^h 10{,}5^m$ an beginnt dann die fortlaufende, deutlich seismische Aufzeichnung der Ostwestcomponente mit Schwingungen von etwa $^4/_5$ bis $^5/_6$ Sekunden Periode, diese ordnen sich nach weiteren 62 Sekunden einem rasch anschwellenden Wellenzuge über, dessen einzelne Wellen 7—8 Sekunden Schwingungsdauer und eine größte Amplitude von 3 mm besitzen. Beide Wellenarten verklingen allmählich. In der zweiten, $16^h 17^m 50^s$ beginnenden Vorphase läßt sich nur eine Art von Wellen mit einer Schwingungsdauer von 6—12 Sekunden erkennen, deren größte Amplituden nicht ganz die Größe der Hauptwellen der ersten Vorphase erreichen.

Im weiteren Verlaufe tritt eine deutliche Änderung des Bildes erst ein, als von $16^h 42^m$, dem Anfange der Hauptphase an, bis $16^h 51^m$ sich 9 lange Wellen aufzeichnen, denen kleine Wellen übergeordnet sind. Obwohl jenen langen Wellen im Durchschnitte eine Periode von nahezu einer Minute zukommt, steigt das Maß ihrer Amplituden doch nicht über 1,5 mm, sodaß der ganze Zug nicht sehr ins Auge fällt, zumal derselbe noch durch die übergeordneten kleinen Wellen gestört erscheint. Weiterhin verkürzen sich die Wellen der Hauptphase, während ihre Schwingungsweite sehr unregelmäßig ist und einen Höchstbetrag von kaum 4 mm erreicht. Erst von $17^h 2^m$ an, von welchem Punkte an man den Endteil der Aufzeichnung rechnen kann, wird die letztere regelmäßiger und erlischt allmählich in Wellenzügen, in denen Perioden von 15—20 Sekunden Dauer und von 2 mm herabsinkende Amplituden zu konstatieren sind.

Das ganze Seismogramm erinnert an dasjenige, welches Omori (l. c. Taf. 5) abbildet und in Tokio durch das Horizontal-

pendel von dem Erdbeben zu Smyrna am 20. September 1899 erhalten hat.

Bei der nicht scharfen Abgrenzung der einzelnen Phasen und der anfänglich noch fehlenden Erfahrung über die Aufzeichnungen des Leipziger Pendels erschien der Versuch, aus der graphischen Notierung auf das epizentrale Gebiet zu schließen, zunächst unausführbar. Da aber nach dem eben veröffentlichten Märzberichte der Kais. Hauptstation für Erdbebenforschung zu Straßburg am 28. März nachmittags in sehr vielen Stationen ein starkes Fernbeben notiert worden ist und zwar in Hamburg $15^h\,58^m\,58^s$, so kann es keinem Zweifel unterliegen, daß das Leipziger Seismogramm sich auf das nämliche Beben bezieht. Nach einem vorläufigen Berichte von Direktor FIGEE (Batavia) wurden Halmahera, die übrigen Molukken sowie die Banda-Inseln um die entsprechende Zeit durch schwere Erdbeben heimgesucht, sodaß also die erste in Leipzig erhaltene Notierung von einer seismischen Katastrophe herrührt, die sich in ca. 11 600 km Entfernung ereignete.

Nachdem nun die Entfernung des epizentralen Gebietes von Leipzig bekannt war, wurde nachträglich auch die Richtigkeit der vorgenommenen Phasenbegrenzung mit Hilfe derjenigen Zahl geprüft, welche die weiter hinten beschriebenen Seismogramme vom 19. April und 6. Mai für die Abschätzung der Herdentfernung gewinnen ließen. Es ergab sich dort, daß die in Sekunden ausgedrückte Zeitdifferenz zwischen dem Beginne der Hauptphase und dem Eintritte der ersten Vorphase mit 5,5 multipliziert, die Entfernung des Epizentrums in Kilometern liefert. Die Zahl der zwischen dem Beginne der Hauptphase des Molukkenbebens vom 28. März 1902 und dessen erstem Einsatze auf dem Seismogramme liegenden Sekunden beträgt $(16^h\,33^m) - (15^h\,58^m\,20^s) = 2080$. Da nun das 5,5fache dieser Zahl 11 440 beträgt, während nach der Abmessung auf einem Globus Halmahera von Leipzig etwa 11 600 km entfernt ist, so wird einerseits die Gliederung des Seismogrammes in geradezu überraschender Weise als zutreffend bestätigt, wie umgekehrt die Genauigkeit des Faktors 5,5 weiter erhärtet.

Bei der Bearbeitung der Seismogramme vom 19. April und 6. Mai stellte sich auch heraus, daß den Wellen des Maximums eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 3,5 km pro Sekunde innewohnte. Wendet man diese Zahl auf das Molukkenbeben an, so muß dasselbe nach mitteleuropäischer Zeit etwa nachmittags

3 Uhr 40 Min. oder nach dortiger Ortszeit abends ca. 8 Minuten vor $^1/_2$11 stattgefunden haben, welche ungefähre Zeitbestimmung hoffentlich bald durch genauere Nachrichten bestätigt wird.

2. Am 2. April.

Nachdem sich schon von $5^h\,21^m - 5^h\,23^m$ ein ganz leichter Wellenzug bemerkbar gemacht hat, treten von etwa 6^h an mehrmals leichte Erzitterungen und unregelmäßige schwache Wellen besonders deutlich auf dem Streifen der Ostwestcomponente auf, denen um $6^h\,8^m\,30^s$ und $6^h\,14^m$ je ein Zug von fünf sicher seismischen Wellen folgt, deren Periode 15—18 Sekunden beträgt. Ähnliche Wellenzüge erscheinen dann noch um $7^h\,14^m$ und $7^h\,19^m$. Die ganze Aufzeichnung gestattet keinerlei Phasenbegrenzung, kann also bloß registriert werden. Nachrichten über ein Beben zu entsprechender Zeit liegen nicht vor.[1])

3. Am 5. April.

Beginn des Seismogrammes $20^h\,41^m$[2])
Ende „ „ $20^h\,52^m$.

Beide Componenten haben zwei durch eine Ruhepause getrennte Züge von Sinuswellen notiert. Auf dem Streifen der Ostwestcomponente, welcher die deutlichere Aufzeichnung enthält, erscheinen zunächst ganz leichte Wellen, dieselben schwellen allmählich an bis zu einer größten Schwingungsweite von nur 0,75 mm und verklingen ebenso allmählich wieder. Nach etwa einer Minute Pause wiederholt sich die nämliche Aufzeichnung, sodaß jeder Wellenzug 5 Minuten anhielt. Die Schwingungsdauer betrug 18—24 Sekunden.

---

1) Um die nämliche Zeit hat seinem soeben eingegangenen Berichte zufolge Dr. Schütt in Hamburg vom Rebeur-Ehlertschen dreifachen Horizontalpendel Aufzeichnungen erhalten.

Bemerkt sei bei dieser Gelegenheit, daß am 7. April, an welchem Tage Dr. Schütt ein besonders starkes Beben registriert erhielt, in Leipzig das Seismometer einer Reparatur wegen nichts aufzuzeichnen vermochte.

2) Da sich eine Reparatur der Kontakteinrichtung in der Uhr notwendig machte, muß auf die Angabe mitteleuropäischer Zeit verzichtet werden.

Nach alledem ist zu schließen, daß hier das Seismometer vermöge der ihm gegebenen starken Registriervergrößerung die eben noch deutlich erkennbaren Ausläufer eines sehr fernen Bebens aufgezeichnet hat.

4. Baikalbeben am 12. April.

Taf. I. Fig. 2.

Beginn des Seismogrammes $1^h 13^m$, Korrektur $+ 6^s$, MEZ. $1^h 13^m 6^s$,
Ende „ „ $2^h 24^m$.

Auch dieses Seismogramm besteht nur aus zwei Zügen von Sinuswellen und ist ebenfalls auf dem Streifen der Ostwestcomponente am deutlichsten aufgezeichnet, sodaß deren Notierung der folgenden Beschreibung zu grunde liegt.

Überblickt man das ganze Seismogramm, so läßt sich dasselbe in einen von $1^h 13^m$ bis $1^h 31^m$ und in einen von $1^h 56^m$ bis $2^h 24^m$ dauernden Teil zerlegen. Die Aufzeichnung beginnt mit ganz leichten, sich kaum bemerkbar machenden Wellen, von denen sich nach $3\frac{1}{2}$ Minuten 6 Wellen mit einer Periode von 15 Sekunden und einer Schwingungsweite von 1 mm scharf abheben. Diesem relativ kräftigen Wellenzuge folgen, durch kurze Pausen unterbrochen, mehrere schwächere, deren Einzelwellen bei wesentlich geringerer Schwingungsweite allmählich eine immer raschere Periode (bis 8 Sekunden) gewinnen, bis dieser Teil des Seismogrammes mit einigen ganz leichten, langgezogenen Wellen erlischt. Von $1^h 31^m$ bis $1^h 56^m$ ist keinerlei seismische Störung verzeichnet, im Gegenteil hat der Stift sogar auffällig ruhig gearbeitet. Vom letztgenannten Zeitpunkte an erscheinen wieder Sinuswellen. Dieselben haben anfänglich eine Periode von mindestens 40 Sekunden, gewinnen rasch an Geschwindigkeit und gehen $2^h 2^m$ in einen 9 Minuten anhaltenden auffallend regelmäßigen Wellenzug über, in dem die Periode der einzelnen Wellen allmählich von 24 Sekunden auf 18, die Schwingungsweite nach einem Anschwellen auf 1,5 mm ebenso allmählich auf 0,75 mm zurückgeht. Dieser schönen Sinuswellenzeichnung folgen wiederum mehrere schwache Wellenzüge, bis etwa $2^h 24^m$ die ganze Aufzeichnung endet.

Durch die Tageszeitungen gingen bald, nachdem das beschriebene Seismogramm erhalten worden war, Nachrichten, daß am 12. April früh in der Umgebung des Baikalsees Erdstöße von

beträchtlicher Stärke sich ereignet hätten. So wurden in Irkutsk $6^h\,40^m$ zwanzig ziemlich starke Erdstöße in einer Minute verspürt, denen innerhalb einer Stunde vier stärkere und mehrere schwächere Stöße folgten. Die Erdschwankungen sollten $1\frac{1}{2}$ mm betragen und am Ostufer des Baikalsees Schornsteine zum Einsturz gebracht haben. Aus Selenginsk wurde über einen Stoß früh 8 Uhr berichtet, dem nach wenigen Sekunden ein zweiter stärkerer folgte, welcher die Häuser zum Schwanken brachte. In Kiachta endlich gelangten zwischen 7^h und $8^h\,34^m$ vier Stöße zur Beobachtung. Es lag nahe, alle diese Erdstöße mit dem in Leipzig erhaltenen Seismogramme in kausalen Zusammenhang zu bringen. Um hierüber Aufklärung zu erhalten, ersuchte Herr Credner Se. Exzellenz Herrn Prof. Karpinsky in St. Petersburg um genaue Zeitangaben. Nach freundlicher Mitteilung dieses Herrn ereigneten sich die Erdstöße auf Grund der Ermittelung des physikalischen Zentralobservatoriums zu St. Petersburg in mittlerer Irkutsker Ortszeit am 12. April

$$6^h\,40{,}1^m,$$
$$7^h\,31{,}2^m,$$
$$7^h\,36{,}1^m,$$
$$8^h\,14{,}3^m,$$

also nach mitteleuropäischer Zeit am genannten Tage

$$0^h\,42{,}9^m,$$
$$1^h\,34^m,$$
$$1^h\,38{,}9^m,$$
$$2^h\,17{,}1^m.$$

Unter der Annahme, daß von den durch diese Stöße erregten seismischen Wellen nur die den Hauptphasen zugehörigen in Leipzig sich deutlich markiert und die oben beschriebene Aufzeichnung geliefert haben könnten, ist hier zu prüfen, ob die Zeit der Leipziger Notierung mit der für die am Baikalsee verspürten Stößen angegebenen zusammenstimmt. Für das S. 302 beschriebene Guatemalabeben und das S. 307 geschilderte südfranzösische Beben wurde ermittelt, daß sich die Wellen der Hauptphase mit einer mittleren Geschwindigkeit von 3,5 km pro Sekunde fortbewegt haben. Solche Wellen würden die 6000 km von Irkutsk bis Leipzig in 1714 Sekunden oder in 28 Minuten 34 Sekunden durchlaufen. Eine in Leipzig $1^h\,13^m$ beginnende Hauptphase deutet also auf einen Erdstoß in Irkutsk

um $0^h 44^m 26^s$ hin und eine solche von $1^h 56^m$ auf einen in Irkutsk $1^h 27^m 26^s$ stattfindenden Stoß. Wenn man bedenkt, daß diese Berechnung bloß eine approximative sein kann, so erscheint die Übereinstimmung zwischen $0^h 42^m 54^s$ und $0^h 44^m 26^s$, bez. zwischen $1^h 34^m$ und $1^h 27^m 26^s$ als hinreichend befriedigend, um das Leipziger Seismogramm als durch die ersten beiden der aus Irkutsk gemeldeten Stöße verursacht gelten lassen zu können, während man von den außer diesen beobachteten Stößen annehmen muß, daß sie nicht stark genug waren, um für den weiten Weg bis in das Herz Europas ausreichende Oberflächenwellen zu erregen.

5. Guatemalabeben am 19. April.

Taf. II.

Beginn d. Seismogr. $3^h 39^m 5^s$, Korrektur $6^m 30^s$, MEZ. $3^h 32^m 35^s$,
Ende „ „ ca. $6^h 15^m$.

Dieses sich über mehr als $2\frac{1}{2}$ Stunde erstreckende Seismogramm ist das imposanteste und detaillierteste, welches in Leipzig bis jetzt aufgezeichnet worden ist.

Ostwestcomponente (Taf. II, Fig. 2). Das Diagramm beginnt mit leichten Fibrationen, von etwa 1,3 Sekunde Periode, die sich rasch und zwar schon nach etwa 3 Sekunden größeren, scharf begrenzten, an steile Sägezähne erinnernden Ausschlägen überordnen. Der stärkste dieser Ausschläge ereignete sich 25 Sekunden nach dem ersten Einsatze und rückte die Nadel um 7 mm von links nach rechts, sodaß bereits in der Vorphase dieses Bebens in Leipzig eine ganz beträchtliche Bodenbewegung stattfand. Diesem gewaltigen Ausschlage folgen eine Anzahl schwächere, deren allmählich an Regelmäßigkeit gewinnende Aufzeichnung vier Minuten nach dem ersten Einsatze noch einmal durch drei stärkere Bewegungen unterbrochen wird, von denen die erste die stärkste war und den Schreibstift um nahezu 5 mm nach links warf. Schließlich haben sich im Beginne des letzten Drittels der insgesamt 10 Minuten langen ersten Vorphase noch zwei Wellen mit einer Periode von 18 Sekunden besonders deutlich aufgezeichnet.

Die zweite Vorphase beginnt mit vier starken Wellen mit einer mittleren Periode von 20 Sekunden und — bei der zweiten — einer größten Amplitude von 50 mm. Mit diesen Wellen inter-

ferieren solche von geringerer Schwingungsdauer; ihnen folgen sechs Wellen mit einer Periode von 10 Sekunden und einer größten Schwingungsweite — bei der dritten — von 56 mm. Man könnte geneigt sein, in diesen Schwingungen Eigenschwingungen des Apparates zu sehen, doch müßte man sie alsdann auch auf dem Streifen der Nordsüdcomponente bemerken, was nicht der Fall ist. Diesem Wellenzuge folgen nahezu 16 Minuten lang sowohl in Bezug auf die Amplitude wie die Periode sehr ungleichmäßige Schwingungen, deren Aufzeichnung durch dreimaliges Anschwellen der Amplituden in vier Teile zerlegt wird.

$4^h\,8^m$ etwa setzt die Hauptphase ein. Dieselbe beginnt mit drei Gruppen von ganz gewaltigen Schwingungen. Während derselben nimmt die Periode ganz allmählich ab, indem sie am Anfang der ersten etwa 30 Sekunden, am Ende der letzten aber nur noch 18—20 Sekunden beträgt. In der ersten dieser Schwingungsgruppen mißt die größte Amplitude 71 mm, in der zweiten 70 mm und in der dritten 69 mm. Mit allen diesen Schwingungen interferieren solche von etwas geringerer Periode, deren Spuren man auch noch weiterhin auf dem Seismogramme deutlich bemerkt.

Auch der ganze, auf die drei Gruppen stärkster Schwingungen folgende Abschnitt des Seismogrammes läßt sich in Gruppen von Schwingungen einteilen. Obgleich nämlich diesen weiteren Aufzeichnungen nicht mehr die Regelmäßigkeit innewohnt, wie denen im Maximum der Hauptphase, so läßt sich doch konstatieren, daß ungefähr alle 2—3 Minuten die Amplituden wieder jeweilig bis zu einer stärksten Schwingung zu- und dann abnehmen. Diese größten Amplituden erreichen anfänglich noch ein Maß von 40 mm und mehr, nähern sich aber bald der Weite der zwischenliegenden Schwingungen, deren Amplituden auch, aber in langsamerem Tempo, abnehmen, sodaß von etwa 5^h ab nur noch ein leidlich regelmäßiger Zug von Schwingungen mit einigen 20 Sekunden Periode und einer Schwingungsweite von wenig über einem Millimeter sich aufgezeichnet hat. Im weiteren Verlaufe schieben sich zwischen leichte Wellenzüge Ruhepausen ein, welche an Länge immer mehr zunehmen, bis endlich etwa $6^h\,15^m$ die ganze Aufzeichnung ihre Endschaft findet.

Nordsüdcomponente (Taf. II, Fig. 1). Die Notierung der Nordsüdcomponente läßt zwar die nämlichen Schwingungsgruppen

erkennen, wie sie eben von der Ostwestcomponente beschrieben wurden, doch erreichen die Schwingungsweiten bei weitem nicht die für letztere angeführten Beträge. Insbesondere markieren sich in der ersten Vorphase die Ausschläge viel weniger deutlich und erreichen die Maxima der einzelnen Amplituden hier bei der zweiten Vorphase nur 8 mm (gegen 56) und in der Hauptphase nur 35 mm (gegen 70 mm bei der Ostwestcomponente). Deutlichst aufgezeichnet ist von dieser Componente ebenfalls das Interferieren von Wellen mit kürzerer Periode.

Von dem nämlichen Erdbeben hat die Firma: Mechanische Werkstätte von J. und A. BOSCH, Straßburg i/E. in einem Katalog die Aufzeichnung veröffentlicht, welche sie mit dem bei ihr gebauten und in Gang gehaltenen Straßburger Horizontalschwerpendel zwischen $3^h 31^m 45^s$ und $5^h 11^m$ erhalten hat. Es liegt nahe, dieses Seismogramm mit dem in Leipzig von WIECHERTS astatischem Pendel gelieferten zu vergleichen. Hierbei zeigt sich, daß das WIECHERTsche Pendel *eine volle Stunde länger* von den seismischen Wellen beeinflußt worden ist, daß seine Aufzeichnung sich als *wesentlich detaillierter* darstellt und daß vor allen Dingen *nur in Leipzig im ersten Einsatze* jene auffallend deutlichen, scharfzackigen Ausschläge notiert worden sind, deren Zahl mit derjenigen der stärksten Stöße im Epizentrum übereinstimmen dürfte.

Was nun den Herd des offenbar gewaltigen Erdbebens anlangt, so war nach der Dauer der Vorphasen zu erwarten, daß sich das epizentrale Gebiet in großer Entfernung von Leipzig befunden haben müsse. Da ferner die Erdwellen (s. S. 294) wahrscheinlich annähernd auf dem kürzesten Wege durch den Erdkörper zu uns gelangen und die Ostwestcomponente den ersten Einsatz wesentlich stärker markiert hat, als die Nordsüdcomponente, so war anzunehmen, daß das Epizentrum in im allgemeinen östlicher oder westlicher Richtung von Leipzig zu suchen sei. Erstere wie letztere Vermutung wurde bald bestätigt, indem nach Zeitungsnachrichten zu der entsprechenden Zeit in Guatemala Erdstöße in verheerender und noch in Mexiko mit Schrecken erregender Heftigkeit auftraten.

Leider sind über die Eintrittszeit des Bebens in seinem epizentralen Gebiete noch keine Nachrichten eingegangen und sind solche von astronomischer Genauigkeit wohl auch überhaupt kaum zu erwarten. Nach Telegraphenzeit von Guatemala fällt einer

freundlichen Mitteilung des Herrn Prof. Dr. SAPPER zufolge für diese Stadt das Erdbeben auf den 18. April $20^h\,25^m$. Die gleiche Zeit wird für die vollständige Zerstörung der Stadt Quezaltenango angegeben. Etwas vollständigere Mitteilungen verdanken wir der Güte des Herrn Dr. BÖSE in Mexiko, nach denen die von Guatemala als epizentralem Gebiete nach NW. vordringenden Wellen die Hauptstadt Mexiko $19^h\,50^m$ Ortszeit erreichten. Leider versagte der in der dortigen meteorologischen Station aufgestellte Seismograph, doch schätzte man dortselbst die Dauer des Bebens auf $1^m\,30^s$, während Herr AGUILERA, der Direktor des geologischen Institutes, im Verlaufe von 50 Sekunden 4 Stöße fühlte.

Daß die Zeitangabe aus Guatemala annähernd richtig ist, ergiebt der Vergleich mit der aus Mexiko vom meteorologischen Institute gemeldeten Zeit. Da nämlich Mexiko in der Zeit bei $8{,}5^0$ westlicherer Länge gegenüber Guatemala um 34 Minuten zurück ist, und etwa $1\frac{1}{2}$ Minuten vergangen sein müssen, ehe die seismischen Wellen Mexiko erreichten, wird man nach der Zeitangabe von Mexiko auf $20^h\,24{,}5^m$ als Eintrittszeit des Bebens in Guatemala geführt.

Guatemala besitzt eine westliche Länge von $90{,}5^0$, Leipzig eine östliche von $12{,}3^0$, demnach beträgt der Zeitunterschied des ersteren Ortes gegenüber dem letzteren rund $+\,6^h\,51^m$, und haben die zerstörenden Stöße nach mitteleuropäischer Zeit am 19. April $3^h\,16^m$ stattgefunden.

Auf Grund dieser Zeitbestimmungen, die über die Ursächlichkeit des Leipziger Seismogrammes keinerlei Zweifel zulassen, kann die Geschwindigkeit wenigstens annähernd berechnet werden, mit der sich die verschiedenen Wellenarten fortgepflanzt haben. Setzen wir die Entfernung des Epizentrums von Leipzig mit 9500 km in Rechnung, so haben die Erdwellen, welche den ersten Einsatz in Leipzig markierten, jene Entfernung in 995 Sekunden durchlaufen, also pro Sekunde rund 10 km (genauer 9,55 km) zurückgelegt. Diejenigen Oberflächenwellen, welche die Hauptphase des Seismogrammes aufzeichneten und nach BELAR (vergl. S. 294) den im Epizentrum ausgelösten Transversalwellen entsprechen, langten in Leipzig $4^h\,1^m\,30^s$ an, legten also die 9500 km in 2730 Sekunden zurück, sodaß auf die Sekunde eine Geschwindigkeit von fast 3,5 km kommt.

Bei dem in Rede stehenden Guatemalabeben ist alles be-

kannt, was für die Berechnung der Geschwindigkeit der seismischen Wellen in Frage kommt: der Eintritt des Bebens im epizentralen Gebiete, das Eintreffen der Erdwellen und das des ersten und zweiten Schubes der Oberflächenwellen in Leipzig, sodaß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch einfache Subtraktion und Division ermittelt werden kann. Die Betrachtung der bereits beschriebenen Seismogramme hat aber gezeigt, daß in manchen anderen Fällen das eine oder andere Glied für solche Berechnungen fehlt, so ist beim Molukkenbeben vom 28. März der Eintritt der epizentralen Stöße auf Halmahera noch unbekannt, während beim Baikalbeben vom 12. April keine Zeitangabe für die erste Vorphase zu machen ist. Um in solchen Fällen das fehlende Glied bestimmen zu können, empfiehlt es sich, auf Grund vollständiger Nachrichten und Seismogramme Erfahrungszahlen aufzustellen. So ist nach S. 294 wahrscheinlich, daß der Zeitabstand zwischen dem durch das Seismogramm markierten Beginne der Hauptphase und dem ersten Einsatze in einer konstanten Beziehung zur Entfernung des Epizentrums vom Standorte des Apparates steht, der das Seismogramm geliefert hat. Da nun beim Leipziger Seismogramm des Guatemalabebens vom 19. April das Maximum $4^h\,1^m\,30^s$, der erste Einsatz $3^h\,32^m\,35^s$ markiert ist und jene Entfernung ca. 9500 km beträgt, so ergiebt sich, daß die in Sekunden ausgedrückte Zeitdifferenz (1735) nahezu 5,5mal in der Entfernung enthalten ist. Bewährt sich diese Zahl, so liefert sie, falls die genannten Zeitpunkte bekannt sind, als Faktor die Entfernung des Epizentrums und bei bekannter Entfernung als Divisor den Zeitunterschied zwischen erstem Einsatz und Maximum, kann also zur Vergleichung eines unvollständigen Seismogrammes mit einem gemeldeten Beben sowie schließlich zur Schätzung der Entfernung des Epicentrums aus dem Seismogramme dienen. Für den ersten Fall wurde beim Molukkenbeben eine ausgezeichnete Übereinstimmung gefunden, auch diejenige für den zweiten Fall war bei dem Baikalbeben (S. 301) den Umständen gemäß als befriedigend zu bezeichnen. Spätere Erfahrungen mögen zur Prüfung der Richtigkeit der Konstanten 5,5 dienen.[1])

1) Es sei darauf hingewiesen, daß BELAR in ganz entsprechender Weise (Ber. d. I. internat. seismol. Konferenz 1902, S. 321) für seinen VICENTINISchen Kleinwellenmesser die Zahl 5 als Konstante benutzt.

6. Beben in Südwestfrankreich am 6. Mai.

Taf. I. Fig. 3 u. 4.

Beginn d. Seismogr. $3^h\,58^m\,18^s$, Korrektur -7^s, MEZ. $3^h\,58^m\,11^s$,
Ende „ „ etwa $4^h\,5^m\,-^s$.

Das Lesen dieses von der Nordsüdcomponente mit etwas größeren Schwingungen aufgezeichneten Seismogrammes wird dadurch erschwert, daß die Berußung des Blattes etwas zu leicht ausgefallen war. Als erster Einsatz muß eine ganz leichte Anschwellung gelten, welche die Linie der Nordsüdcomponente (Taf. I, Fig. 3) zwischen $3^h\,58^m\,18^s$ und $3^h\,58^m\,22^s$ erfährt, indem hier leichte Schwingungen mit so kurzer Periode aufgezeichnet sind, daß deren Zählung unmöglich ist. Von hier ab läßt die Linie außer den gewöhnlichen S. 292 beschriebenen, minimalen Fibrationen nichts Auffälliges erkennen. Erst etwa 4 Sekunden nach $4^h\,1^m$ macht sich wieder eine leichte Ablenkung des Schreibstiftes bemerklich und gewinnen die Erzitterungen allmählich an Energie, bis sich von etwa 4 Sekunden vor $4^h\,2^m$ an eine fortlaufende Reihe von unregelmäßigen zackigen Ausschlägen aufzeichnet, deren größte die Nadel um 2,5 mm bewegt haben und von denen — abgesehen von übergeordneten winzigsten Fibrationen — auf den Weg einer Minute etwa 45 kommen. Dieselben verkleinern sich schon von $4^h\,3^m$ ab wieder merklich und sind $4^h\,5^m$ nicht mehr von den ständigen Erzitterungen des Apparates zu trennen.

Von der Ostwestcomponente (Taf. I, Fig. 4) ist der erste Einsatz nur als leise Ablenkung und das Maximum als gegenüber der beschriebenen schwächer gezackte Linie aufgezeichnet worden.

Nach Zeitungsnachrichten haben gegen 3^h am 6. Mai starke Erderschütterungen von 2 bis 15 Sekunden Dauer im südwestlichen Frankreich stattgefunden (Lourdes, Bayonne). Herr de Montessus de Ballore hat uns zu Dank verpflichtet durch die liebenswürdige Auskunft, daß das Observatoire météorologique de Bordeaux als Zeitpunkt dieses Bebens $3^h\,5^m\,30^s$ Pariser Zeit angiebt. In mitteleuropäischer Zeit ist demnach der erste Einsatz auf $3^h\,56^m\,9^s$ zu legen. Es kann bei dieser zeitlichen Übereinstimmung keinem Zweifel unterliegen, daß das Leipziger Seismogramm von dem Beben in Südwestfrankreich herrührt und diese Zeitfixierung ermöglicht zugleich die Abschätzung der Geschwindigkeit, mit der sich die beiden seismischen Wellenarten

fortgepflanzt haben. Durch die Erdwellen wurde nämlich der 1200 km weite Weg vom Schütterzentrum nahe bei Bordeaux bis Leipzig in $(3^h 58^m 11^s) - (3^h 56^m 9^s)$ also in 122 Sekunden zurückgelegt, sodaß sich auf die Sekunde eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von fast genau 10 km ergiebt. Setzt man den Eintritt des Maximums der seismischen Aufzeichnungen nach den oben gemachten Angaben auf $4^h 1^m 49^s$, so ergiebt sich, daß die diese Hauptphase bezeichnenden Oberflächenwellen $5^m 40^s$ nach dem Eintritte des Bebens Leipzig erreichten, sich also mit einer Geschwindigkeit von 3,5 km pro Sekunde fortgepflanzt haben. Es sei darauf hingewiesen, daß OMORI[1]) aus dem Vergleiche einer größeren Anzahl in Japan und Europa erzielter Notierungen die entsprechenden Geschwindigkeiten zu 12,8 bez. 3,3 km pro Sekunde ermittelt hat.

Da die Untersuchung des vom südfranzösischen Beben (6. Mai) erhaltenen Seismogrammes bezüglich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erd- und Oberflächenwellen zu den nämlichen Resultaten geführt hat, wie sie aus dem Seismogramme des Guatemalabebens hergeleitet wurden (S. 305—306), so folgt, daß auch hier die aus Entfernung und Zeitdifferenz zwischen Beginn des Maximums und erstem Einsatze sich ergebende Konstante 5,5 ist.

7. Am 8. Mai.

Taf. I. Fig. 5.

Beginn des Seismogr. $4^h 2^m 36^s$, Korrektur -22^s, MEZ. $4^h 2^m 14^s$,
Ende „ „ $4^h 34^m$.

Nachdem sich schon vorher (namentlich $3^h 30^m$, $3^h 46^m$, $3^h 52^m$ und $3^h 56^m$) ganz leichte Wellenzüge bemerkbar gemacht haben, erfährt $4^h 2^m 36^s$ der Schreibstift der Nordsüdcomponente (Taf. I, Fig. 5) eine deutliche Ablenkung nach rechts. Damit beginnt eine fortlaufende Aufzeichnung von leichten Wellen, die zunächst eine Periode von 7 bis 8 Sekunden haben, deren Amplitude wie Schwingungsdauer aber bald in unregelmäßiger Weise wächst, bis etwa $4^h 14^m 20^s$ mit 5 Wellen von je 16 Sekunden Periode und einer größten Amplitude von 6 mm das Maximum der seismischen Bewegung erreicht ist. Weiterhin messen auch

1) Publications of the Earthquake Investigation Committee in foreign Languages. Tokio. Nr. 5, p. 80.

die größten Amplituden höchstens 2 mm, die Schwingungsdauer verkleinert sich etwas und in der gewöhnlichen Weise verschwinden etwa $3^h 34^m$ die Wellen vollständig.

Auf dem Streifen der Ostwestcomponente hat sich das Beben in weit weniger energischer Weise markiert.

Am 7. und 8. Mai fanden die furchtbaren Ausbrüche der La Soufrière auf St. Vincent und des Mt. Pelée auf Martinique statt, welche vielen Tausenden von Menschen das Leben kosteten und einen unberechenbaren Schaden anrichteten. Es liegt natürlich nahe, zu vermuten, daß die Erderschütterungen, wie sie die vulkanischen Ereignisse einleiten oder begleiten, in diesem Falle Wellen erregt haben könnten, durch die über den Ozean hinweg die europäischen Seismometer in Bewegung gesetzt worden wären. Tatsächlich hat sich auch HECKER in Potsdam für einen derartigen Kausalnexus in Bezug auf die von ihm beobachteten Seismogramme vom 8. Mai früh 4 Uhr unter dem frischen Eindrucke der Zeitungsberichte ausgesprochen[1]), doch scheint in dieser Beziehung Vorsicht dringend geboten zu sein.

So grauenerregend nämlich auch die Schilderungen jener vulkanischen Explosionen sind, so im ganzen dürftig sind die Nachrichten über begleitende oder vorausgegangene Erderschütterungen. Die auffallendsten Angaben über solche dürften die von Kapitän JAMESON CALDER, dem Polizeichef von St. Vincent, sein, welcher berichtet, daß am 7. Mai morgens 10 Uhr ein schrecklicher Ausbruch der La Soufrière das Land „wie einen Strauch schüttelte" und daß um $11\frac{1}{2}$ Uhr des nämlichen Tages rote Flammen aus dem Krater hervorbrachen und gleichzeitig schwere Erschütterungen verspürt wurden. E. GEINITZ, der für seinen Vortrag[2]) jedenfalls alle ihm zugängigen Zeitungsnachrichten gesammelt hat, weiß bloß zu berichten, daß eine Woche lang auf den Antillen ein leises Beben des Bodens zu verspüren war und daß am 6. das Ausstoßen von Rauch und Lava in Begleitung von Erdstößen und donnernden Geräuschen erfolgte. Es scheint also überhaupt in keinem Abschnitte der Zeit, in der sich die Katastrophe auf den kleinen Antillen abspielte, zu einem scharf abgegrenzten Erdbeben gekommen zu sein. Auch frühere Erfahrungen bei ähnlichen Elementarereignissen sprechen dafür, daß

1) Wochenschrift „Woche" Nr. 21, 1902.

2) Sitzungsber. d. naturf. Ges. zu Rostock 1902, Nr. 4.

ganz allgemein der Schütterkreis nur ein verhältnismäßig kleiner ist, wenn die Spannungen in peripherischen Magmaherden sich explosionsartig nach außen Luft machen. So waren die Erschütterungen, welche der Eruption des Krakatau 1883 vorausgingen, relativ unbedeutend und so wurde, als 1888 der Bandaisan explodierte, nur ein Areal von 5000 km² erschüttert.[1]) Auf Martinique ist bekanntlich die vulkanische Tätigkeit durchaus noch nicht erloschen, vielmehr sind nach dem 8. Mai wiederholt ähnliche Wolken von erstickenden und brennenden Gasen über St. Pierre niedergegangen, wie sie dessen Bewohnern an jenem Tage verderblich wurden. BLOCK und BARTHE, zwei von der Regierung zur ersten Hilfeleistung ausgesandte Kommissare, sahen am 26. Mai einen derartigen Ausbruch und beschreiben denselben wie folgt: „Kein Erdbeben kündigt das Phänomen an, plötzlich bricht eine ungeheure Wolke gegen den Himmel hervor, dann stürzen riesige Felsblöcke auf die Umgegend nieder, hauptsächlich in der Richtung von St. Pierre. Der Krater am Abhange des Berges ist wie eine Riesenkanone, die bis zur Mündung geladen und beständig gegen die unglückliche Stadt gerichtet ist."

Nach alledem scheint es unwahrscheinlich, daß überhaupt durch die Eruptionen auf den kleinen Antillen, so schrecklich dieselben auch an Ort und Stelle waren, sich weit durch den Erdkörper oder an dessen Oberfläche fortpflanzende seismische Wellen erregt worden sind. Da ferner die von CALDER zeitlich festgelegten Erbebungen, falls deren Ausläufer Leipzig erreicht hätten, sich hier am 7. Mai $4^1/_2$ bez. 6 Uhr früh bemerkbar hätten machen müssen, so ist es uns unmöglich, das Seismogramm vom 8. Mai 4^h auf jene Explosionen zurückzuführen, wir nehmen vielmehr an, daß das epizentrale Gebiet des registrierten Bebens in mehr der Nordsüdlinie genäherter Richtung liegt.

8. Am 25. Mai.

Taf. I. Fig. 6.

Beginn d. Seismogr. $17^h\,58^m\,25^s$, Korrektur -3^s, MEZ. $17^h\,58^m\,22^s$,
Ende „ „ $18^h\,55^m\,-^s$.

Das am besten aufgezeichnete Seismogramm der Nordsüdcomponente beginnt auf dem Streifen derselben mit ganz leichten

1) S. SEKIYA und Y. KIKUCHI: The Eruption of Bandaisan. Journal of the College of science. Imp. Univ. Tokyo III. pt. II. 1889.

Fibrationen, die rasch in Bezug auf Weite des Ausschlages und Dauer der Periode wachsen, aber mit ersterer 0,75 mm, mit letzterer 1 Sekunde kaum überschreiten. Innerhalb der ersten Minute und zwar namentlich gegen das Ende des ersten Drittels derselben ordnen sich die leichten Wellen einigemale je einer Schwingung mit etwa 2 Sekunden langer Periode, aber nicht wesentlich größerer Amplitude über. Nach der Unterbrechung durch die 18^h-Markierung folgt für 5 Minuten die bald anschwellende, bald an Breite abnehmende Aufzeichnung leichter Schwingungen mit auffallend gleichmäßiger Periode (nahezu 1 Sekunde). Dieselben rühren wahrscheinlich zum größten Teile von einer lokalen Störung (Wind?) her. Ein deutlicher zweiter Einsatz fehlt, da es fraglich ist, ob die leichten $18^h 8^m$ und $18^h 12^m$ verzeichneten Wellen seismischer Natur sind. Erst $18^h 25^m$ erscheinen wieder deutliche seismische Wellen und zwar solche von etwa 25 Sekunden Periode und höchstens 1,5 mm Schwingungsweite. Ihnen folgen dann noch wesentlich flachere Wellen mit kürzerer Periode (etwa 12 Sekunden). $18^h 32{,}5^m$ passieren noch einmal 5 kräftigere Wellen von etwa 22 Sekunden Periode, alsdann wird die eintretende Ruhe nach immer länger werdenden Pausen durch je einige leichte Wellen unterbrochen, bis $6^h 55^m$ jede Spur seismischer Erregung verschwindet.

Falls die ganze kurz beschriebene Aufzeichnung von *einem* Erdbeben herrührt, ist auf eine große Entfernung des epizentralen Gebietes desselben zu schließen und zwar müßte man nach der bei den Beben 4 und 5 versuchten Berechnung aus dem Abstande des ersten Einsatzes und dem Beginne der langen Wellen eine Entfernung von etwa 8500 bis 9000 km annehmen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß der Anfangsteil der Notierung von einem Beben geliefert wurde, das sich in nicht bedeutender Entfernung abspielte und daß dahingegen die $18^h 25^m$ beginnenden Wellenzüge die eben noch vom Apparate aufgefangenen größten Wellen eines außerordentlich fernen seismischen Ereignisses darstellen.

9. Am 26. Mai.

Taf. I. Fig. 7.

Beginn d. Seismogr. $5^h 17^m 55^s$, Korrektur -5^s, MEZ. $5^h 17^m 50^s$,
Ende „ „ ca. $5^h 43^m$.

Die Aufzeichnung der Nordsüdcomponente (Taf. I, Fig. 7) weist zunächst eine leichte Ablenkung der Nadel auf, dann ver-

zeichnet dieselbe 3 sehr leichte Ausschläge, weicht hierauf um nahezu 2 mm nach links aus und wird ruckartig während der Minutenmarkierung um 3,5 mm nach rechts geworfen. In den leichten Fibrationen, wie sie im ersten Einsatze eines Erdbebens schon mehrfach zu beobachten waren, kehrt der Schreibstift weiterhin in seine normale Lage zurück. Die schwachen Ausschläge verlieren sich allmählich fast ganz, bis $5^h\,21^m\,30^s$ etwas energischere Wellen mit unregelmäßiger, 4 bis 8 Sekunden langer Periode sich aufzeichnen, die vielleicht dem zweiten Einsatze des Bebens entsprechen. $5^h\,23^m\,45^s$ ändert sich die Aufzeichnung insofern erneut, als sich sowohl die Amplituden (bis 5 mm) wie auch die Perioden der Wellen noch mehr, aber in keineswegs regelmäßiger Weise vergrößern (Hauptphase). $5^h\,30^m$ beginnen nach kurzer Ruhepause die leichten Wellenzüge, welche den Endabschnitt der Seismogramme charakterisieren. Die letzten Spuren desselben verlieren sich gegen $^3/_4 6$ in den beginnenden Tagesstörungen.

Das epizentrale Gebiet des Bebens, welches das eben beschriebene zierliche Seismogramm geliefert hat, ist bis jetzt nicht bekannt geworden. Falls die Phasenabgrenzung richtig ist, kann man auf eine Entfernung desselben von etwa 2000 km schließen.

10. Am 11. Juni.

Beginn d. Seismogr. $7^h\,31^m\,30^s$, Korrektur $+\,46^s$, MEZ. $7^h\,32^m\,16^s$,
Ende „ „ ca. $8^h\,30^m\,—^s$.

Dieses Seismogramm ist deswegen unbefriedigend ausgefallen, weil gerade zur Zeit seiner Aufzeichnung der Apparat unter ganz ungewöhnlich starken lokalen Störungen zu leiden hatte. Wenn auch diese Beeinflussungen nicht intensiv genug waren, um den seismischen Charakter der Hauptwellen des Maximums zu verwischen, so genügten sie doch dazu, daß man bloß mit einiger Wahrscheinlichkeit den Beginn des Maximums auf $7^h\,45^m\,46^s$ und des ersten Einsatzes auf $7^h\,32^m\,16^s$ legen kann. In der Hauptphase der Nordsüdcomponente besaßen die Wellen Perioden von im Mittel 12 Sekunden und erreichten ihre größten Amplituden den Betrag von 7 bis 8 mm. Bei der Aufzeichnung der Ostwestcomponente erscheint das Bild mehr in die Länge gezogen, indem die Perioden einer Reihe von Wellen im Anfangsteile der Hauptphase die Dauer von 20 Sekunden erreichen und sogar überschreiten.

Nach unserer ungefähren Abschätzung würde für das epizentrale Gebiet eine Entfernung von etwa 4500 km anzunehmen sein.

11. Beben von Hall-Innsbruck am 19. Juni.

Taf. I. Fig. 8 u. 9.

Anfang d. Seismogr. $10^h 23^m 9^s$, Korrektur $+ 30^s$, MEZ. $10^h 23^m 39^s$,
Ende „ „ $10^h 27^m —^s$, „ $+ 30^s$, MEZ. $10^h 27^m 30^s$.

Auch bei diesem in die Zeit der unangenehmen Tagesstörungen fallenden Seismogramme hält es schwer, die Zeit des ersten Einsatzes zu fixieren, doch dürfte mit immerhin großer Wahrscheinlichkeit eine leichte knopfförmige Anschwellung der von der Nordsüdcomponente (Taf. I, Fig. 8) gezeichneten Linie als durch den ersten Einsatz verursacht, zu gelten haben. Von diesem, auf $10^h 23^m 9^s$ fallenden ersten Einsatze ab läuft die Linie, ohne außer steten Fibrationen etwas Auffälliges erkennen zu lassen, weiter, erhält $10^h 23^m 41^s$ eine Ablenkung nach links, von welcher an die Amplituden etwas zunehmen, bis $10^h 24^m$ ein stärkerer Ausschlag eine bis $10^h 24^m 32^s$ währende Phase kräftigerer Schwingungen bei gleich bleibenden Perioden einleitet. Die Schwingungsdauer ändert sich erst von $10^h 24^m 32^s$ (korrigiert $10^h 25^m 2^s$) ab, in welchem Zeitpunkte die Hauptphase mit einem Zuge von Wellen beginnt, deren Periode gleichmäßig etwa $^5/_6$ Sekunde beträgt, während die Amplituden von 1 mm auf 2,5 mm anwachsen und dann wieder auf etwas über 1 mm zurücksinken. Nach dieser regelmäßigen Aufzeichnung nehmen die Schwingungen in unregelmäßiger Weise in Bezug auf ihre Amplituden ab, ihre Periode bleibt zunächst noch ungefähr dieselbe, verringert sich dann ebenfalls allmählich, bis $10^h 27^m$ die letzten seismischen Spuren in den Tagesstörungen verschwinden.

Von der Ostwestcomponente (Taf. I, Fig. 9) ist das Bild insofern abweichend gezeichnet worden, als hier der erste Einsatz sich nur als leichte Ablenkung der Nadel und Verdickung der Linie markiert, die Hauptwellen des Maximums aber viel unregelmäßiger in Bezug auf ihre Schwingungsweite erscheinen, wobei besonders auffällt, daß die Amplituden im allgemeinen größer sind als bei der Nordsüdcomponente und eine unter ihnen den Betrag von 3 mm erreicht.

Die Zeitungen berichteten bald, daß am 19. Juni früh 10 Uhr 22 Min. in Hall bei Innsbruck ein starkes, 5 Sekunden

andauerndes Beben verspürt worden sei, welches sich in Form von zwei Vertikalstößen bemerkbar gemacht habe. Auch aus dem Brennergebiete wurden zwei Stöße gemeldet, während in Meran 10 Uhr 25 Min. nur ein von rollendem Geräusch begleiteter Stoß beobachtet wurde. Herr Prof. Dr. BLAAS in Innsbruck teilte Herrn Geh. Bergrat CREDNER auf dessen Anfrage mit dankenswerter Bereitwilligkeit mit, daß er selbst das Beben als eine 4 Sekunden an Dauer vielleicht noch überschreitende Erschütterung gefühlt habe, durch welche die Decke zum Knistern gebracht wurde. Als Eintrittszeit habe etwa $10^h 22^m 35^s$ zu gelten.

Darüber, daß das Leipziger Seismogramm von dem Tiroler Beben herrührt, kann nach diesen Berichten keinerlei Zweifel bestehen. Multipliziert man auf Grund der seitherigen Erfahrungen die Zeitdifferenz zwischen dem Beginne der Hauptphase und dem ersten Einsatze auf dem Seismogramme (83 Sekunden) mit der mehrfach erwähnten Erfahrungskonstanten 5,5, so resultiert die Zahl 456,5, welche nahezu der Entfernung Innsbruck-Leipzig in Kilometern entspricht. Sollte man hiernach berechtigt sein, auch die von uns ermittelten Geschwindigkeiten von 10 km für die Erdwellen und von 3,5 km pro Sekunde für die Oberflächenwellen einzusetzen, so müßte das Erdbeben, wenn seine Entfernung von Leipzig zu rund 460 km angenommen wird, 18 Sekunden später stattgefunden haben, als Herr Prof. Dr. BLAAS ermitteln konnte. nämlich erst $10^h 22^m 53^s$.

12. Macedonisches Beben am 5. Juli.

Taf. I. Fig. 10 u. 11.

Anfang d. Seismogr. $15^h 59^m 5^s$, Korrektur $+ 19^s$, MEZ. $15^h 59^m 24^s$,
Ende „ „ $16^h 30^m$.

Das Seismogramm vom 5. Juli zeichnet sich dadurch aus, daß die Aufzeichnungen der beiden Componenten in erheblicher und auffallender Weise von einander abweichen, und daß trotz verhältnismäßig kurzer Dauer auf dem Streifen der Ostwestcomponente *die größten Amplituden vorkommen, die bis jetzt in Leipzig notiert worden sind;* schließlich war dieses Seismogramm auch das erste, bei dem eine Prognose in Bezug auf Entfernung und Lage des pleistoseismischen Gebietes von Leipzig aus versucht und durch bald eintreffende Nachrichten als richtig bestätigt wurde.

Ostwestcomponente (Taf. I, Fig. 11). Auf der durch die Tagesstörungen etwas in die Breite gezogenen Notierung der Ostwestcomponente macht sich der erste Einsatz durch eine Ablenkung der Nadel nach rechts hin deutlich bemerklich. Ihm folgen eine größere Zahl von scharfzackig aufgezeichneten Schwingungen, deren Amplitude nur wenig über 1 mm erreicht, während ihre Periode 3—5 Sekunden beträgt. Die Zahl dieser Ausschläge kann nicht bestimmt werden, da hier das Seismogramm durch die Markierung der Stunde 16 auf 15 Sekunden unterbrochen ist. Nach deren Ablauf werden die Schwingungen wesentlich kleiner und erscheinen durch die Tagesstörungen beeinträchtigt. Die Zeichnung ändert sich von $16^h 1^m 39^s$ ab, indem von diesem den zweiten Einsatz bezeichnenden Punkte an die Schreibnadel lauter unregelmäßige Zickzackbewegungen ausgeführt hat. Dabei nahm die Dauer dieser Bewegungen und gleichzeitig auch die Größe des jeweils erreichten weitesten Ausschlages allmählich zu, während die kleinen übergeordneten Fibrationen ebenso allmählich an störender Energie einbüßten.

$16^h 3^m 5^s$ beginnt mit einer Schwingung von 20^s Periode und 16 mm Schwingungsweite die Hauptphase. Nach dieser einleitenden schwillt mit drei weiteren Schwingungen von 55, 89, 92 mm Amplitude die Bebennotierung zum Maximum an, um ebenso schnell in den drei folgenden Wellen auf 72, 32 und 21 mm Schwingungsweite zurückzusinken. Die Schwingungsdauer verringerte sich während dieser 6 gewaltigen Wellen zunächst von 12 auf 10 Sekunden, um sich dann wieder etwa auf den ersten Betrag zu erhöhen.

In dem dem Maximum folgenden Abschnitte machen sich zwar noch recht ansehnliche Ausschläge bemerklich, besonders markiert sich um $16^h 6^m$ noch einmal ein Zug von 6 Wellen mit Amplituden bis zu 23 mm, doch schlummert die seismische Energie im ganzen fast ebenso rasch wieder ein, als sie erwacht war, sodaß bereits um $16^h 20^m$ die Tagesstörungen wieder das Übergewicht über die sich verlaufenden seismischen Wellen gewinnen.

Nordsüdcomponente (Taf. I, Fig. 11). Die Aufzeichnung des ersten Einsatzes der Nordsüdcomponente weicht insofern von derjenigen der Ostwestcomponente ab, als bei ersterer die Amplituden der größeren Schwingungen Beträge bis zu 1,5 mm erreichen und auch die Schwingungsdauer eine etwas größere ist. Fällt dieser

Unterschied nicht besonders in die Augen und stimmt in der zweiten Vorphase der Charakter der Aufzeichnung beider Componenten überein, so zeigen sich während der Hauptphase die erheblichsten Abweichungen. Bei der Ostwestcomponente war ein rapides Anschwellen zum Maximum, ein ebenso plötzliches Nachlassen, ein rasches, durch relativ schwaches Aufflackern nur wenig hingehaltenes Erlöschen der seismischen Energie zu konstatieren. Ganz anders bei der Nordsüdcomponente. Hier folgen auf zwei die Hauptphase einleitende langperiodige Wellen sechs deutliche, sich bis $16^h\,10^m$ hinziehende starke Wellenzüge, in deren jedem die Periode zunächst ab-, die Schwingungsweite aber zunimmt, während sich nach dem jeweiligen Ende hin das umgekehrte Verhältnis zeigt. Dabei erreichen die größten Amplituden der im übrigen weniger regelmäßigen ersten drei Wellenzüge den Betrag von 26—27 mm, um in den anderen drei Zügen auf 14 mm zurückzusinken, die Schwingungsdauer aber schwankt zwischen 6 und 11 Sekunden.

Störungen hat die Aufzeichnung dieser Wellenzüge der Nordsüdcomponente dadurch erlitten, daß sich hier und da Interferenzen bemerklich machen, vor allem aber dadurch, daß zwischen $16^h\,5^m$ und $16^h\,6^m$ der Stift über den Rand des Papierstreifens hinausgeraten ist. Das letztere wurde möglich durch eine Verlegung des Pendelnullpunktes, die sich in den ersten Julitagen eingestellt hatte und die absichtlich nicht korrigiert worden war, um Klarheit darüber zu gewinnen, ob das Pendel nicht von selbst in seine alte Ruhelage zurückkehren würde.

Nach den beschriebenen 6 Wellenzügen folgt der Endabschnitt des Seismogrammes, in dem sich Wellen von etwa 4 bis 8 Sekunden Periode aufgezeichnet haben. Deutlich markiert sich in diesem Endteile der Aufzeichnung ein wiederholtes, allmählich aber immer schwächer werdendes Anschwellen der Amplituden, wie es schon bei den Wellengruppen der Hauptphase zu beschreiben war. Erst $16^h\,30^m$ verschwinden bei der Aufzeichnung der Nordsüdcomponente die letzten seismischen Wellen in den Tagesstörungen.

Bei der Schärfe dieses zufällig direkt nach seiner Aufzeichnung beobachteten Seismogrammes lag es nahe, eine Prognose in Bezug auf Lage und Entfernung des epizentralen Gebietes dieses Bebens auf Grund der seitherigen Erfahrungen zu versuchen. Da die Zeitdifferenz zwischen dem Eintritte der Hauptphase und

dem ersten Einsatze 240 Sekunden betrug, so war nach Multiplikation mit der Erfahrungskonstanten 5,5 der Herd in etwa 1320 km Entfernung zu suchen. Da sich ferner stets gezeigt hat, — und mündlicher Mitteilung zufolge auch bereits von Herrn Prof. Wiechert konstatiert worden ist, — daß im ersten Einsatze diejenige Componente die stärkste Aufzeichnung liefert, welche am meisten der Richtung entspricht, aus der die seismischen Wellen zu uns kommen, im vorliegenden Falle aber die Nordsüdcomponente nicht erheblich stärkere Ausschläge gemacht hat als die Ostwestcomponente; so war zu erwarten, daß der Herd des Bebens in SO—NW-, bez. in SW—NO-Richtung von Leipzig liegen müsse mit einer Annäherung in dem zutreffenden der beiden Fälle an die Nordsüdrichtung. Von Leipzig aus nach NW oder NO hin war erfahrungsgemäß ein so nahes und starkes Beben nicht zu erwarten, so blieb der Weg von 1320 km nach SW und SO hin zu untersuchen übrig. In ersterer Richtung gelangt man auf demselben in das mittelländische Meer etwa nördlich der Balearen, in der Südostrichtung aber nach Macedonien, also in eine Schüttergegend höchsten Grades. Alle Erwägungen führten demnach zu der Vermutung, daß sich das Erdbeben in der Mittelmeergegend und zwar am wahrscheinlichsten auf der Balkanhalbinsel zugetragen haben müsse. In diesem Sinne wurde sofort Herrn Credner Mitteilung von dem Seismogramme gemacht und vermutungsweise auf Griechenland als vom Beben betroffen hingewiesen.

Die Richtigkeit der Prognose wurde bald in erfreulichster Weise dadurch bestätigt, daß nach wenigen Tagen Nachrichten über ein heftiges Erdbeben in Macedonien durch die Tageszeitungen zu uns gelangten. So wurden aus Saloniki, Nevrekup, Rasluck, Petritsch, Melnik, Karaferia, Gjevgelü, Strumnitza, Vodina, Demir-Hissari, Seres und Adrianopel wiederholte Erdstöße gemeldet, welche Beschädigungen an Gebäuden zur Folge hatten. Die dort eingeleitete amtliche Untersuchung ergab folgendes, die Heftigkeit der seismischen Katastrophe offenbarendes Resultat: „Das Zentrum der seismischen Bewegung war das Dorf Guvezno, das drei Stunden von Saloniki entfernt ist. Eine Folgeerscheinung der furchtbar heftigen Erdstöße war das Erscheinen einer neuen Heilquelle, deren Abfluß die Ortschaft in zwei Teile teilt. Die Erdstöße wiederholten sich in Zwischenräumen von je fünf Minuten. Im griechischen Quartier sind 180 Häuser und sonstige Baulichkeiten

total zerstört, 55 schwer beschädigt worden. Im türkischen Quartier stürzten 52 Häuser ein. Eine Frau und zwei Kinder haben unter den Häusertrümmern ihren Tod gefunden. Fünf Personen erlitten schwere Verletzungen." Genauere Zeitangaben über das macedonische Beben liegen zur Zeit noch nicht vor. Auf Grund des Leipziger Seismogrammes ist nach unseren bisherigen Erfahrungen zu erwarten, daß der Hauptstoß vom Zentrum etwa $15^h 57^m 10^s$ ausgegangen ist.

Für eine umfassende Beschreibung des gewaltigen Erdbebens werden wahrscheinlich zahlreiche Seismogramme zur Verfügung stehen, wenigstens hat bereits der erfahrene und eifrige Leiter der Laibacher Erdbebenwarte, Prof. BELAR, in der „Neuen Freien Presse" berichtet, daß er eine ganz ungewöhnlich starke Aufzeichnung erhalten habe, die er zunächst — genauere Berichte lagen ihm noch nicht vor — auf einen submarin gelegenen Herd beziehen zu müssen glaubte. Auch in Budapest ist das dort aufgestellte Straßburger Horizontal-Schwerpendel einer brieflichen Mitteilung des Herrn Dr. FR. SCHAFARZIK zufolge über eine halbe Stunde lang durch das Beben in Tätigkeit gesetzt worden.

13. Am 6. Juli.

Anfang d. Seismogr. $14^h 22^m 12^s$, Korrektur $+ 18^s$, MEZ. $14^h 22^m 30^s$,
Ende „ „ $16^h 24^m$.

Die den eben angegebenen langen Zeitraum umfassende Aufzeichnung weist zwar einen sehr scharfen ersten Einsatz auf, ist aber leider im übrigen so wenig zu gliedern, daß sie zunächst nur registriert werden kann.

Die deutlichere Notierung hat die Nordsüdcomponente geliefert. Auf derselben verursacht der erste Einsatz scharfzackige Ausschläge nach beiden Seiten von im Höchstfalle 1,3 mm Schwingungsweite und Perioden von weniger als einer bis zu zwei Sekunden. Diese kurzperiodigen Schwingungen verschwinden nach etwa $2^3/_4$ Minuten. Von da ab bis $15^h 12^m$ hat die Nadel eine ziemlich ruhige Linie aufgezeichnet, die nur hin und wieder, in engeren Abständen bloß in der Zeit direkt nach dem ersten Einsatze, durch unregelmäßige leichte Wellenzüge wie gekräuselt erscheint. Wirklich lange Perioden, also solche von 20 und mehr Sekunden Dauer kommen auf dieser ganzen Strecke nicht zur Beobachtung. Zwischen $15^h 12^m$ und $15^h 24^m$ ändert

sich der Charakter der Aufzeichnung insofern, als man hier mehrmals ganz leichte Wellen mit 30 Sekunden an Dauer überschreitender Periode dahinziehen sieht. Von $15^h 24^m$ ab beginnen die den Endabschnitt darstellenden Züge von Sinuswellen, die allmählich immer kürzer und leichter werden, durch immer längere Zwischenräume getrennt sich aufzeichnen, kurz in der schon mehrfach beschriebenen Weise das ganz langsame Dahinschwinden der seismischen Erregung illustrieren.

Überblickt man das ganze Seismogramm, so wird man unwillkürlich an das von dem Molukkenbeben (28. März) gelieferte erinnert, nur erscheint bei ersterem die Aufzeichnung noch flacher, noch mehr in die Länge gezogen. War schon bei dem Molukkenbeben die Hauptphase nicht durch große Amplituden, sondern nur durch auffallend lange Perioden der Wellen ausgezeichnet, so ist auf dem Seismogramme vom 6. Juli überhaupt keine Hauptphase mehr deutlich zu erkennen. Man möchte hiernach fast glauben, daß mit zunehmender Entfernung des Schütterzentrums gerade der auffälligste Teil, das Maximum der Hauptphase, zuerst aus dem Seismogramme verschwindet.

Nach dem Gesagten läßt sich somit aus dem vorliegenden Seismogramme über den Beginn der Hauptphase nichts Sicheres feststellen, und damit wird eine Schätzung der Entfernung, in der sich das aufgezeichnete Beben abgespielt hat, unmöglich. Da die Vorphasen kaum vor $15^h 12^m$ aufgehört, also mindestens 50 Minuten gedauert haben, darf man bloß annehmen, daß jenes Beben in noch wesentlich größerer Entfernung stattgefunden hat als das Molukkenbeben, nämlich in einer solchen von vielleicht 17 000 km. Man nähert sich damit dem halben Erdumfang, also der uns diametral gegenüberliegenden Region, von der man annehmen darf, daß sich von ihr ausgehende seismische Wellen anders aufzeichnen werden, als von näher gelegenen Schütterzentren ausgehende.

14. Am 9. Juli.

Anfang des Seismogrammes ca. 5^h, Ende ca. $5^h 30^m$.

Das namentlich von der Nordsüdcomponente in Gestalt sehr regelmäßiger Sinuswellenzüge aufgezeichnete Seismogramm ist leider dadurch entwertet worden, daß in der Nacht vom 8. zum 9. Juli die das Gewicht des Regulators tragende Darmsaite gerissen und dadurch das Uhrwerk stehen geblieben war,

sodaß die Zeit der seismischen Registrierung nur schätzungsweise angegeben werden kann.

Die Aufzeichnung beginnt mit einigen sehr flachen langperiodigen Wellen (ca. 30 Sekunden Schwingungsdauer), diesen folgen kürzere Wellen mit etwas größerer Schwingungsweite, die bereits nach zwei Minuten sich auszuebnen beginnen. Dem ersten Wellenzuge folgen nach jedesmal mehrere Minuten langer, fast vollständiger Ruhe noch mehrere ähnliche Wellenzüge, während deren die Amplituden allmählich kleiner und die Perioden kürzer werden.

Zeitungsnachrichten zufolge haben zu der der Aufzeichnung des eben beschriebenen Seismogrammes etwa entsprechenden Zeit zunächst zwei Erderschütterungen an der marokkanischen Küste stattgefunden, die unter der Bevölkerung Schrecken erregten, ferner sollen sich auf St. Vincent innerhalb von 4 Stunden drei Erdbeben zugetragen haben, über besonders heftige Erdstöße vom 9. Juli, die 3 bis 4 Minuten anhielten, wird aber schließlich noch aus Bender Abbas berichtet. Diese Stöße sollen am schwersten die Insel Kischm betroffen haben, aber auch in Bender Abbas noch stark genug gewesen sein, um sämtliche Hauptgebäude zu beschädigen. Es kann hiernach wohl kaum einem Zweifel unterliegen, daß das Leipziger Seismogramm vom 9. Juli auf dieses letzte intensivste der eben genannten seismischen Ereignisse zurückzuführen ist, auf eine Katastrophe also, die sich in etwa 4600 km Entfernung von Leipzig dort abspielte, wo die Insel Kischm sich der Mündung des persischen Golfs in den Indischen Ozean vorlagert.

Mit den beschriebenen Seismogrammen ist die Zahl derjenigen Aufzeichnungen erschöpft, welche WIECHERTS astatisches Pendelseismometer zwischen dem 28. März und 15. Juli 1902 in Leipzig geliefert hat, soweit dieselben sich als sicher seismischen Ursprunges offenbaren und auf einen *fern* liegenden Herd bezogen werden müssen. Genaue Zeitangaben über sonstige in dem umschriebenen Zeitraume stattgefundene seismische Ereignisse dürften diese Liste später noch zu vergrößern gestatten. Von den 14 von uns besprochenen Seismogrammen ließ sich für 7 die Lage des epizentralen Gebietes feststellen. Zugleich führte die Untersuchung derselben zu gewissen vorläufigen Resultaten, welche an der Hand weiterhin zu erhaltender Seismogramme geprüft werden

sollen und deren Bestätigung von wissenschaftlicher Bedeutung sein würde. Diese vorläufigen Resultate sind die folgenden:

1. *Die von Erdbebenherden aus zuerst zum Seismometerstandorte gelangenden Wellen (Erdwellen) pflanzen sich mit einer Geschwindigkeit von 10 km pro Sekunde fort.*
2. *Die die Hauptphase eines Bebens (dessen Maximum) auf dem Seismogramme darstellenden Wellen (Oberflächenwellen) gelangen zu dem Seismometer mit einer mittleren Geschwindigkeit von 3,5 km pro Sekunde.*
3. *Das Produkt der in Sekunden ausgedrückten Zeitdifferenz zwischen dem Beginne der Hauptphase und dem des ersten Einsatzes in dem Seismogramme eines Bebens mit der Erfahrungskonstanten 5,5 ist gleich der Entfernung des Seismometers vom Epizentrum in Kilometern.*

In der umstehenden Tabelle sind die wesentlichsten Daten der untersuchten Seismogramme zusammengestellt.

Tafelerklärung.

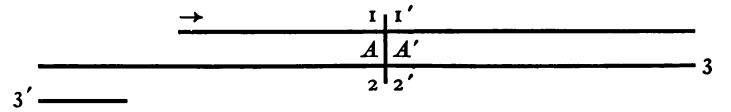
Die beiden Tafeln, welche nach der S. 295 auseinandergesetzten Methode hergestellt wurden, zeigen die Art, in welcher das WIECHERTsche Seismometer Erdbeben verschiedenen Stärkegrades aufzeichnet, deren Epizentrum 460 bis über 11 000 km von Leipzig entfernt liegt.

Da das Registrierpapier ohne Ende über die Rollen läuft, bilden die Aufzeichnungen eines Seismogrammes eine Spirallinie, die natürlich auf einer Tafel nicht im Zusammenhange wiedergegeben werden kann. Zum Zwecke der Untersuchung wird jedes Papier quer durchschnitten, sodaß 90 cm lange Streifen entstehen. Man verfolgt dann jede Linie bis an den Schnittrand, so wie sie die Nadel gezeichnet hat und findet deren weitere Zeichnung am gegenüberliegenden Schnittrande als direkt unter der ersteren folgende Linie. Die Wiedergabe auch solcher 90 cm langer Linien war im vorliegenden Falle unmöglich, da alsdann die Tafeln siebenmal hätten gebrochen werden müssen; infolgedessen mußten die Streifen noch ein zweites Mal auf 45 cm Länge durchschnitten werden. Hat eine derartige zweite Teilung der Streifen stattgefunden, so ist dieselbe bei den betreffenden

Tabellarische Übersicht über die von Wiecherts astatischem Pendelseismometer vom 28. März bis 15. Juli 1902 in Leipzig gelieferten Seismogramme von Fernbeben.

No.	Datum	Beginn in M E Z. der 1. Vorphase	Beginn in M E Z. der 2. Vorphase	Beginn in M E Z. der Hauptphase	Ende der Aufzeichnung	Geradliniges Maß der größten Amplitude in mm während der 1. Vorphase NS-Componente	1. Vorphase OW-Componente	2. Vorphase NS-Componente	2. Vorphase OW-Componente	Hauptphase NS-Componente	Hauptphase OW-Componente	Epizentrales Gebiet und dessen Entfernung von Leipzig in km
1.	28. März	$15^h\,58^m\,20^s$	$16^h\,10^m\,30^s$	$16^h\,33^m\,—^s$	$17^h\,29^m\,—^s$	1	3	2	2,75	3	4	Molukken, ca. 11 500 km
2.	2 April	ca. 6^h	—	—	ca. $7^h\,20^m\,—^s$	—	—	—	—	0,75	1	unbekannt
3.	5. April	—	—	ca. $20^h\,41^m\,—^s$	ca. $20^h\,52^m\,—^s$	—	—	—	—	0,5	0,75	unbekannt
4.	12. April	—	—	$1^h\,13^m\,6^s$	$2^h\,24^m\,6^s$	—	—	—	—	1,25	1,5	Irkutsk-Baikalsee, 6000 km
5.	19. April	$3^h\,32^m\,35^s$	$3^h\,42^m\,56^s$	$4^h\,1^m\,30^s$	$6^h\,8^m\,30^s$	2	7	8	56	35	71	Guatemala, 9500 km
6.	6. Mai	$3^h\,58^m\,11^s$	—	$4^h\,1^m\,49^s$	ca. $4^h\,5^m\,—^s$	—	—	—	—	2,50	1,5	Südwestfrankreich, 1200 km
7.	8. Mai	ca. $4^h\,2^m\,14^s$	—	—	ca. $4^h\,33^m\,38^s$	—	—	—	—	6	1,5	unbekannt
8.	25. Mai	$17^h\,58^m\,22^s$	—	$18^h\,25^m\,57^s$	$18^h\,55^m\,—^s$	0,75	0,75	—	—	1,5	0,5	unbekannt
9.	26. Mai	$5^h\,17^m\,50^s$	$5^h\,21^m\,25^s$	$5^h\,23^m\,45^s$	$5^h\,43^m\,—^s$	3,5	2,5	—	—	5	1,5	unbekannt
10.	11. Juni	$7^h\,32^m\,16^s$	—	$7^h\,45^m\,46^s$	ca. $8^h\,30^m\,—^s$	—	—	—	—	8	8	unbekannt
11.	19. Juni	$10^h\,23^m\,39^s$	—	$10^h\,25^m\,2^s$	$10^h\,27^m\,30^s$	—	—	—	—	2,5	3	Hall-Innsbruck, 460 km
12.	5. Juli	$15^h\,59^m\,24^s$	$16^h\,1^m\,58^s$	$16^h\,3^m\,24^s$	ca. $16^h\,30^m\,—^s$	1,5	1,25	—	—	27	92	Macedonien, ca. 1400 km
13.	6. Juli	$14^h\,22^m\,30^s$	—	ca. $15^h\,12^m\,—^s$	ca. $16^h\,24^m\,—^s$	1,3	0,75	—	—	1	0,50	unbekannt
14.	9. Juli	—	—	ca. 5^h	ca. $5^h\,30^m\,—^s$	—	—	—	—	1,5	0,75	Südpersien, ca. 4600 km

Figuren rechts durch eine senkrechte Linie A angedeutet; man findet dann die Fortsetzung links an der mit A' bezeichneten Linie. Zur Erklärung sei Taf. I, Fig. 1 herangezogen. Will man dieses Seismogramm verfolgen, so denkt man sich A' auf A gelegt, sodaß $1'$ auf 1, $2'$ auf 2 fällt, alsdann hat man schematisch die 3 folgenden Linien



Der Stift hat in der Pfeilrichtung geschrieben bis 1 und weiter bis ans Ende der ersten Linie, hat dann auf der zweiten von links nach rechts registriert und schließlich auf der mit $3'$ bezeichneten zu schreiben begonnen.

In ganz entsprechender Weise erfolgt die Orientierung bei Fig. 2 und Fig. 6, in welch letzterem Falle bloß eine Linie zu verfolgen ist. Auf Taf. II sind die Seismogramme der beiden Componenten des Guatemalabebens untereinander gelegt und jedes noch einmal quer durchschnitten. Man hat also die entsprechenden Teile der beiden Aufzeichnungen direkt untereinander, denkt sich A' auf A gelegt und verfolgt die Aufzeichnung jeder Nadel wie oben angegeben. Die aneinander zu legenden Teile des Seismogrammes der Nordsüdcomponente sind hierbei mit arabischen, die desjenigen der Ostwestcomponente mit römischen Ziffern bezeichnet.

Die Phasenbegrenzung ist nicht durch Buchstaben kenntlich gemacht, dagegen ist die benachbarte Minutenmarkierung eingetragen worden.

Tafel I.

Fig. 1. Seismogramm der Ostwestcomponente des Molukkenbebens vom 28. März. Die erste Vorphase setzt mit minimalen, sehr kurzperiodigen Schwingungen ein, schwillt nach 5 Minuten durch energische Ausschläge zu einer scharfzackigen Linie an und glättet sich hierauf allmählich wieder. Das Gleiche zeigt sich in der zweiten Vorphase, nur sind hier die Perioden im allgemeinen länger. Die Hauptphase beginnt mit Wellen von außerordentlich langer Periode, aber auffallend kleiner Amplitude, dann folgt ein längerer Zug unregelmäßiger Wellen, in dem sich

nach dem Ende hin immer deutlicher kleine Züge von sinusartigen Wellen bemerklich machen, mit denen die seismische Erregung ganz langsam verklingt. Herdentfernung 11 500 km. S. 296.

Fig. 2. Seismogramm der Ostwestcomponente des sibirischen Bebens vom 12. April. Ein deutlicher erster und zweiter Einsatz fehlt, das ganze Seismogramm besteht fast nur aus regelmäßigen Zügen sinusartiger Wellen, zwischen die sich hauptsächlich nur im Anfange flache Wellen mit kurzer Periode einschieben. Herdentfernung 6000 km. Seite 300.

Fig. 3. Seismogramm der Nordsüdcomponente, Fig. 4. Seismogramm der Ostwestcomponente des südwestfranzösischen Bebens vom 6. Mai. Der erste Einsatz markiert sich nur als leichte Anschwellung, der zweite Einsatz fehlt. Die Hauptphase stellt sich als sehr unregelmäßige, scharfzackige Linie dar, indem die Perioden den Betrag von 1,3 Sekunden nicht überschreiten. Herdentfernung 1200 km. Seite 307.

Fig. 5. Seismogramm der Nordsüdcomponente des Bebens vom 8. Mai. Die Vorphasen sind nicht scharf entwickelt, die von ihnen nicht genau abzutrennende Hauptphase stellt sich als unregelmäßiger allmählich anschwellender Wellenzug dar, in welchem die Perioden allmählich ab-, die Amplituden anfänglich zu-, dann auch abnehmen. Herdentfernung unbekannt. Seite 308.

Fig. 6. Seismogramm der Nordsüdcomponente des Bebens vom 25. Mai. Die erste Vorphase ist als scharfzackige Linie gut entwickelt, dann erweist sich für nahezu $\frac{1}{2}$ Stunde die seismische Erregung nicht stark genug, um deutliche Wellen zu liefern. Auch in der Hauptphase erscheint die Linie wie flach gedrückt, besonders machen sich deren erste langperiodige Wellen wenig bemerklich. Der zweite Teil der ersten Vorphase ist durch eine lokale Störung verwischt. Herdentfernung unbekannt. Seite 310.

Fig. 7. Seismogramm der Nordsüdcomponente des Bebens vom 26. Mai. In der ersten Vorphase markiert sich ein sehr kräftiger Ausschlag. Der zweite Einsatz und der Beginn der Hauptphase sind nicht deutlich. Regelmäßige langperiodige Wellen in der Hauptphase fehlen. Herdentfernung unbekannt. Seite 311.

Fig. 8. Seismogramm der Nordsüd-, Fig. 9. Seismogramm der Ostwestcomponente des Hall-Innsbrucker Bebens vom 19. Juni. Der erste Einsatz markiert sich nur als leichte Anschwellung der

Linie, der zweite Einsatz ist undeutlich. Die Aufzeichnung schwillt unregelmäßig an, indem die Amplituden sich sprungweise vergrößern und verkleinern, während die Perioden die Dauer einer Sekunde nicht erreichen. Die Aufzeichnung der Vorphasen hat durch die Tagesstörungen gelitten. Herdentfernung 460 km. Seite 313.

Fig. 10. Seismogramm der Nordsüdcomponente des macedonischen Bebens vom 5. Juli. Die erste Vorphase ist als scharfzackige Linie gut abgehoben, weniger deutlich macht sich ein zweiter Einsatz bemerklich, von dem an die zweite Vorphase durch ganz allmähliches Anschwellen der Amplituden in die Hauptphase überführt. Letztere beginnt mit einigen langperiodigen Wellen und besteht im weiteren Verlaufe aus kräftigen unregelmäßigen Wellenzügen, die 6 Minuten lang anhalten, worauf die seismische Erregung plötzlich nachläßt. Auf der durch $a - b$ markierten Strecke ist die Aufzeichnung ausgeblieben, da der Schreibstift über den Rand des Papierstreifens hinausgeraten war. Seite 315. *Fig. 11. Seismogramm der Ostwestcomponente des nämlichen Bebens.* Die erste und zweite Vorphase ist weniger gut entwickelt als bei der Nordsüdcomponente, die Hauptphase aber setzt scharf mit einem Zuge außerordentlich kräftiger Wellen ein, deren Periode sich allmählich verkürzt, während die Amplituden anfänglich zu-, dann auch abnehmen. Die weitere Aufzeichnung gleicht der der Nordsüdcomponente, nur ist sie um 4 Minuten kürzer als letztere. Herdentfernung ca. 1400 km. Seite 315.

Fig. 12. Bewegung der Schreibnadel der Nordsüdcomponente am 8. Mai in der Minute $3^h\,1^m - 3^h\,2^m$. Die Figur zeigt die S. 293 beschriebenen steten Fibrationen und wurde auf die Weise erzielt, daß die betreffende Strecke auf dem Papierstreifen mit Hilfe von Zeiss Ob. a*, Oc. II und der Camera lucida in zehnfacher Vergrößerung nachgezeichnet wurde, sodaß eine totale Vergrößerung der Fibrationen auf das 2500fache resultierte.

Tafel II.

Seismogramm des Guatemalabebens vom 19. April.

Fig. 1. Seismogramm der Nordsüdcomponente. Der erste Einsatz, zweite Einsatz und der Beginn der Hauptphase heben sich scharf ab. Die Hauptphase beginnt mit zwei Zügen lang-

periodiger Wellen mit großen Amplituden, darauf folgt ein langer Zug unregelmäßiger Wellen und nach dem Ende hin die allmählich immer schwächer werdenden Züge sinusartiger Wellen.

Fig. 2. Seismogramm der Ostwestcomponente. Die Phasenbegrenzung ist noch schärfer als bei der Nordsüdcomponente, namentlich in der ersten Vorphase fallen kräftige scharfzackige Ausschläge und in der zweiten Wellen von hervorragend großer Amplitude auf, die Hauptphase aber beginnt mit drei Zügen langperiodiger Wellen, bei denen die Amplitude im Höchstfalle 70 mm noch überschreitet. Entsprechend dieser gegenüber derjenigen der Nordsüdcomponente wesentlich kräftigeren Aufzeichnung ist auch der weitere Verlauf der Hauptphase und der Endabschnitt des Seismogrammes bei der Ostwestcomponente durch vereinzelte wesentlich größere Amplituden ausgezeichnet als bei der Nordsüdcomponente. Seite 302.

Juli 1902.

Erdbebenstation des
paläontologisch-geologischen Instituts Leipzig.

Druckfertig erklärt 7. IX. 1902.]

Nachtrag zu dem Aufsatze: „Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung.“[1])

Von

A. Mayer.

In dem angeführten Aufsatze hatte ich den Grenzfall $K = 0$, in welchem den Reibungsgesetzen gemäß während des Zusammenstoßes die Gleitungsgeschwindigkeit V, wenn sie überhaupt einmal Null wird, an und für sich ebensowohl Null bleiben als auch wieder positiv werden kann, ganz von der Betrachtung ausgeschlossen, weil ich sah, daß seine Diskussion andere Hilfsmittel erforderte, als die dort benutzten, und er mir deshalb nicht in den Rahmen der allgemeinen Untersuchung hineinpaßte. Inzwischen habe ich mich jedoch überzeugt, daß derselbe zwar an einigen Stellen eine veränderte Schlußweise erheischt, aber doch weniger Schwierigkeiten darbietet, als ich ursprünglich glaubte, und möchte daher zur Vervollständigung des § 5 meiner früheren Arbeit nachträglich jetzt noch hinzufügen, wie sich in diesem besonderen Falle der Verlauf des Zusammenstoßes gestaltet. Alles Folgende bezieht sich also auf die Voraussetzung $K = 0$.

Durch diese Annahme erhält die Gleichung $\varphi(H) = 0$ von p. 222 die Wurzel $H = 0$, und das einzige, was etwas mehr Umstände macht, ist der Nachweis, daß diese Gleichung nunmehr überhaupt keine positive Wurzel zuläßt.

Um dies zu zeigen, nehme ich mit Darboux[2]) den Umstand zu Hilfe, daß man (vgl. p. 122) die Achsen y und z immer so wählen kann, daß nach Belieben a_{31} oder $a_{12} = 0$ wird. Setzt

1) Im vorliegenden Jahrgange dieser Berichte p. 208—243.

2) D. p. 158.

man $a_{31} = 0$, so reduziert sich nach (25) die Gleichung $\varphi(H) = 0$ auf:

$$(25') \qquad \begin{aligned} \varphi(H) \equiv\ & [(H + fa_{22})(H + fa_{33}) - f^2 a_{23}^2]^2 \\ & - a_{12}^2 [(H + fa_{33})^2 + f^2 a_{23}^2] = 0, \end{aligned}$$

und nach (18) die Voraussetzung $K = 0$ auf:

$$(18') \qquad K \equiv f^2 (a_{22} a_{33} - a_{23}^2)^2 - a_{12}^2 (a_{23}^2 + a_{33}^2) = 0.$$

Infolge der Wurzel $H = 0$ wird nun:

$$\varphi(H) \equiv H(H - H_1)(H - H_2)(H - H_3),$$

und nach (25') ist hierin:

$$\varphi' 0 \equiv - H_1 H_2 H_3 = 2f[(a_{22} + a_{33}) f^2 (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) - a_{33} a_{12}^2];$$

nach (18') erhält man also:

$$\begin{aligned} - H_1 H_2 H_3 \frac{(a_{22} a_{33} - a_{23}^2)}{2 f a_{12}^2} &= (a_{22} + a_{33})(a_{23}^2 + a_{33}^2) - a_{33}(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) \\ &= a_{22} a_{23}^2 + a_{33}(2 a_{23}^2 + a_{33}^2). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist ebenso wie der Faktor von $- H_1 H_2 H_3$ stets > 0, das Produkt $H_1 H_2 H_3$ also stets < 0. Die Gleichung (25') besitzt somit im Falle $K = 0$ gerade so wie im Falle $K < 0$ negative Wurzeln immer nur in ungerader Anzahl. Hieraus aber folgt nach p. 224 eben, daß keine Wurzel der Gleichung positiv sein kann, und dasselbe ergibt sich im Grunde noch einfacher daraus, daß nach Potenzen von H geordnet die Gleichung (25') wegen der Voraussetzung (18') überhaupt nur Zeichenfolgen aufweist.[1])

Nennen wir also wie auf p. 226 wieder $\theta = \theta_1$ die erste Wurzel der Gleichung $\Delta(\theta) = 0$, welche der Winkel θ erreicht, wenn er sich in dem durch das Vorzeichen von $\Delta(\theta_0)$ bestimmten Sinne von seinem Anfangswerte θ_0 aus ändert, so kann $H(\theta_1)$ nur entweder $= 0$ oder aber < 0 sein.

Sei nun erstens $H(\theta_1) = 0$.

Der Ungleichung (26) zufolge ist dann $\Delta' \theta_1 < 0$ und daher:

$$\lim_{\theta = \theta_1} \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} = \frac{H' \theta_1}{\Delta' \theta_1}$$

1) Vgl. D. p. 158—160.

nicht unendlich. Während θ von θ_0 bis θ_1 geht, bleibt folglich die Gleitungsgeschwindigkeit:

$$V = V_0 e^{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta} \equiv V(\theta) \tag{27}$$

immer endlich, bestimmt und > 0. Es wird aber:

$$\lim_{\theta = \theta_1} \frac{(\theta - \theta_1) V(\theta)}{\Delta(\theta)} = \frac{V(\theta_1)}{\Delta' \theta_1} \neq 0,$$

und wegen $\frac{d\theta}{\Delta(\theta)} > 0$ nach (28) daher:

$$\lim_{\theta = \theta_1} X(\theta) \equiv \lim_{\theta = \theta_1} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta = +\infty.$$

Das anfängliche Aufeinandergleiten der beiden Körper kann daher unmöglich fortdauern, bis $\theta = \theta_1$ geworden ist, vielmehr muß der ganze Zusammenstoß schon vorher sein Ende erreicht haben.

In der Tat, wegen $H(\theta_1) = 0$ ist nach (31) $A(\theta_1) > 0$ und daher auch:

$$\lim_{\theta = \theta_1} \frac{(\theta - \theta_1) V(\theta) A(\theta)}{\Delta(\theta)} = \frac{V(\theta_1) A(\theta_1)}{\Delta' \theta_1} \neq 0.$$

Mit $X(\theta)$ wird folglich in der Grenze für $\theta = \theta_1$ auch:

$$U(\theta) \equiv U_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V(\theta) A(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta$$

$= +\infty$, und wegen $U_0 < 0$ muß daher θ, noch ehe es den Wert θ_1 erreicht, notwendig an einen Wert θ' kommen, für den $U(\theta) = 0$ wird.

Im Falle $H(\theta_1) = 0$ besitzt demnach die Gleichung $U(\theta) = 0$ zwischen θ_0 und θ_1 stets eine Wurzel $\theta = \theta'$ und der Zusammenstoß verläuft infolgedessen ganz so, wie p. 228 für den Fall $H(\theta_1) > 0$ auseinandergesetzt wurde.

Ist zweitens $H(\theta_1) < 0$, so gilt nach p. 230 dasselbe, sooft auch dann noch die Wurzel θ' existiert und

$$(1 + \mu) X(\theta') < X(\theta_1)$$

ist. Sind aber die letzteren Voraussetzungen nicht beide erfüllt, so verhält sich unser Grenzfall ganz so, wie unter denselben

Umständen der Fall $K > 0$. Auch im Falle $K = 0$ nämlich kann die Geschwindigkeit V nie wieder > 0 werden, wenn sie einmal $= 0$ wurde.

In der Tat, zunächst widerspricht die Annahme, daß die Geschwindigkeit V dann dauernd Null bleibe, jedenfalls nicht den Reibungsgesetzen. Sollte aber in dem Momente $t = t_1$, wo θ den Wert θ_1 erreichte, für den $\Delta(\theta_1) = 0$, $H(\theta_1) < 0$, $V(\theta_1) = 0$ ist, V nur eben durch Null wieder ins Positive übergehen, so müßten die Gleichungen:

$$(21) \qquad \frac{dV}{dX} = H(\theta), \quad V\frac{d\theta}{dX} = \Delta(\theta)$$

auch für $t > t_1$ noch in Kraft bleiben, und da die Gleichung $\Delta(\theta) = 0$ keine Wurzel besitzt, für welche $H(\theta) > 0$ wird, so könnte (vgl. p. 233) dies nur dadurch ermöglicht werden, daß im betrachteten Momente θ plötzlich von dem Werte θ_1 zu derjenigen Wurzel $\theta = \theta_2$ der Gleichung $\Delta(\theta) = 0$ überspränge, für die $H(\theta) = 0$ wird. Sollte also V wieder positiv werden können, so müßten die Gleichungen (21) solche Lösungen zulassen, die für $\theta = \theta_2$ $V = 0$ ergeben.

Diese Gleichungen verlangen nun aber, falls θ nicht konstant bleiben sollte, wieder:

$$(27') \qquad V = ce^{\int \frac{H(\theta)}{\Delta(\theta)} d\theta},$$

und da nach dem Früheren hierin die Funktion unter dem Integralzeichen und mit ihr auch der Exponent von e für $\theta = \theta_2$ bestimmt und endlich bleibt, so verschwindet dieser Wert von V für $\theta = \theta_2$ nur dann, wenn man die Konstante $c = 0$ nimmt, und dann wird er identisch Null. Andererseits wird den Gleichungen (21) durch $V \equiv 0$ nur dann genügt, wenn man zugleich $\theta \equiv \theta_2$ nimmt. Die Annahme, daß diese Gleichungen auch über den Moment t_1 hinaus noch Geltung behalten sollten, würde daher darauf führen, daß von nun an:

$$V = 0 \quad \text{und} \quad \theta = \theta_2$$

bleiben müßte. Da der Winkel θ seinen Sinn ganz verliert, wenn $V = 0$ wird, so ist das im Grunde ein widersinniges Resultat. Wie man dasselbe aber auch auffassen möge, auf jeden Fall sieht man, daß die Geschwindigkeit V eben niemals wieder positiv werden kann, wenn sie einmal zum Verschwinden kam.

Zusammenfassend können wir also sagen:

In Bezug auf den Verlauf des Zusammenstoßes verhält sich der Grenzfall $K = 0$ sowohl für $H(\theta_1) = 0$, als auch wenn $H(\theta_1) < 0$ ist, zugleich aber die Gleichung $U(\theta) = 0$ zwischen θ_0 und θ_1 noch die Wurzel $\theta = \theta'$ besitzt und überdies die Ungleichheit

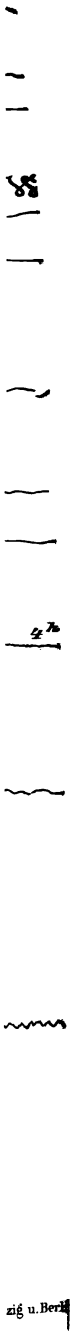
$$(1 + \mu) X(\theta') < X(\theta_1)$$

besteht, gerade so wie der Fall $H(\theta_1) > 0$ (p. 228), dagegen, so oft $H(\theta_1) < 0$ ist, ohne daß die beiden letzten Voraussetzungen gleichzeitig erfüllt wären, ganz wie unter denselben Umständen der Fall $K > 0$ (p. 231).

Druckfertig erklärt 7. VIII. 1902.]

Erratum.

S. 283—326 lies statt Fibrationen Vibrationen.



INHALT.

Seite

F. Kirchner, Über beobachtete Absorptions- und Farbenänderungen infolge von Abstandsänderungen der absorbierenden Teilchen. Mit 2 Abbildungen 261

Gerhard Kowalewski, Über das Kroneckersche Integral für die Charakteristik eines Funktionensystems. 267

Ch. Riquier, Über Systeme partieller Differentialgleichungen . . 272

Franz Etzold, Das Wiechertsche astatische Pendelseismometer der Erdbebenstation Leipzig und die von ihm gelieferten Seismogramme von Fernbeben. Mit 2 Tafeln u. 2 Textfiguren 283

A. Mayer, Nachtrag zu dem Aufsatze: Über den Zusammenstoß zweier Körper unter Berücksichtigung der gleitenden Reibung 327

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

N 30C 1726.9

HARVARD COLLEGE LIBRARY
APR 29 1903
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

VI.

MIT ZWEI TAFELN UND VIER TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Einzelpreis 1 Mark.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
APR 29 1903
CAMBRIDGE, MASS.

SITZUNG VOM 27. OKTOBER 1902.

Der Sekretär legte ein Schreiben von Sir MICHAEL FOSTER an die Comité-Mitglieder der internationalen Association der Akademien vor, betreffend die Beteiligung an einer internationalen seismologischen Konferenz. Das Schreiben ist im Sinne eines von Herrn CREDNER abgegebenen Gutachtens beantwortet worden.

Herr NEUMANN trägt vor: „Beiträge zur analytischen Mechanik". Zweite und dritte Abhandlung.

Beiträge zur analytischen Mechanik.

Zweite Abhandlung.

Von

C. NEUMANN.

In diesen Berichten [Decbr. 1899, Seite 371—444] ist von mir eine Abhandlung veröffentlicht worden unter dem Titel: „*Beiträge zur analytischen Mechanik*". Zu jener Abhandlung*) erlaube ich mir auf den folgenden sechs Seiten einige nachträgliche Erläuterungen zu geben.

§ 13.

Ueber die Cohäsionskräfte, die normalen Druckkräfte und die tangentialen Reibungskräfte.

Wenn bei einem materiellen System von sogenannten Bedingungsgleichungen oder Bedingungsungleichungen die Rede ist,

*) Jene Abhandlung von 1899 soll im Folgenden kurzweg als Abh. I citirt werden. Dabei sei mir gestattet zu bemerken, dass die hier folgenden Abh. II und Abh. III im Wesentlichen schon im Herbst 1899 vollendet waren. Doch habe ich erst in den letzten Monaten die zu der nicht ganz leichten Redaction derselben erforderliche Zeit erübrigen können. — 3. October 1902. C. N.

so versteht man darunter den analytischen Ausdruck derjenigen *Beschränkungen*, denen die Beweglichkeit des Systems, vermöge seiner von Hause aus gegebenen Constitution, fortdauernd unterworfen ist. Diese Beschränkungen aber werden, genauer betrachtet, stets herrühren von irgend welchen mehr oder weniger unbekannten *Kräften.**)

Wir haben es hier nur mit der *gewöhnlichen Mechanik*, also nur mit solchen materiellen Systemen zu thun, die aus lauter *starren Körpern* bestehen. Die Beschränkungen aber, denen ein derartiges System hinsichtlich seiner Beweglichkeit unterworfen ist, sind im Allgemeinen von zweierlei Art. Die einen offenbaren sich uns in der *Starrheit* der einzelnen Körper; sie rühren her von denjenigen *Cohäsionskräften*, durch welche sämmtliche Massenpuncte eines solchen Körpers zu einem starren Ganzen mit einander verbunden sind. Die andern manifestiren sich in der *gegenseitigen Undurchdringlichkeit* der starren Körper; sie rühren her von gewissen *normalen Druckkräften*, die zur Wirksamkeit gelangen, sobald irgend zwei solche Körper — sei es dauernd, sei es vorübergehend — mit einander in Berührung kommen.

Dabei sei bemerkt, dass, ausser diesen normalen Druckkräften, bei der Berührung zweier starrer Körper noch *andre* Kräfte in Action treten werden, nämlich die *tangentialen Reibungskräfte.* Diese letztern Kräfte werden namentlich dann eine wesentliche Rolle spielen, wenn die einander berührenden Körper in irgend welcher relativen Bewegung gegen einander begriffen sind.

Die in Rede stehenden Kräfte: die Cohäsionskräfte, die normalen Druckkräfte und die tangentialen Reibungskräfte sind uns, ihrer eigentlichen Natur nach, mehr oder weniger unbekannt. Doch werden wir annehmen dürfen, dass all' diese Kräfte dem *allgemeinen Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction entsprechen.*

---

*) Diese Vorstellung, welche den eigentlichen *Grundgedanken* der vorliegenden Abhandlungen (d. i. der Abh. I, II und III) repräsentirt, ist aus dem Bestreben hervorgegangen, jene sogenannten Bedingungsgleichungen und Bedingungsungleichungen ganz zu beseitigen und durch *Kräfte* zu ersetzen. Dass aber dieses Bestreben kein ganz unberechtigtes ist, dürfte deutlich hervorgehen aus einer früheren Abhandlung des Verfassers (diese Berichte 1869), und namentlich aus den dort (Seite 257 und 258) mitgetheilten JACOBI'schen Expectorationen.

In den beiden folgenden Paragraphen werden wir nun insbesondere die *Cohäsionskräfte* und die *normalen Druckkräfte* in Betracht ziehen und nachweisen, dass die *Arbeiten* dieser Kräfte stets $= 0$ sind. Bei diesem Nachweise werden wir Gebrauch machen von folgendem Hülfssatz, der auch noch späterhin (in § 18) uns von Nutzen sein wird.

Hülfssatz: Irgendwo im Raume seien irgend welche Puncte gegeben A, B, C, . . ., H, J, und überdies eine gerade Linie Δ von bestimmter Richtung. Die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Puncte seien, ihrer Richtung nach, mit AB, BC, CD, . . . HJ, JA, andrerseits aber, ihrer absoluten Länge nach, mit $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, . . . $[HJ]$, $[JA]$ bezeichnet. Alsdann wird stets die Gleichung stattfinden:

$$\left.\begin{array}{l}[AB]\cos(\Delta, AB)+[BC]\cos(\Delta, BC)+[CD]\cos(\Delta, CD)+\\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot+[HJ]\cos(\Delta, HJ)+[JA]\cos(\Delta, JA)\end{array}\right\}=0.$$

Auf den Beweis dieses einfachen Satzes hier näher eingehen zu wollen, erscheint überflüssig.

Beiläufige Bemerkung. Man kann die im gegenwärtigen Paragraph angegebenen Vorstellungen vielleicht ein wenig vereinfachen, indem man annimmt, dass zwei in Bewegung begriffene und augenblicklich einander berührende Körper an ihrer Contactstelle *gleich grosse Kräfte von entgegengesetzter Richtung* auf einander ausüben, der Art, dass im Allgemeinen sowohl die Stärke wie auch die *Richtung* derselben völlig unbekannt sind. Diese Kräfte, die man füglich die *Contactkräfte* nennen könnte, werden alsdann zerlegbar sein nach der Normale und nach der Tangentialebene; und die so entstehenden Componenten sind alsdann diejenigen Kräfte, welche wir vorhin als *normale Druckkräfte* und als *tangentiale Reibungskräfte* bezeichnet haben.

§ 14.

Ueber die Arbeit der Cohäsionskräfte.

Es seien m und m' irgend zwei Massenpuncte eines starren Körpers M. Ferner sei r ihr gegenseitiger Abstand. Die zwischen diesen beiden Puncten vorhandene Cohäsionskraft R ist nach unserer Vorstellung nichts Anderes als eine gewöhnliche Centralkraft; so dass also die von ihr während der Zeit dt verrichtete Arbeit

$$= R\,dr$$

sein wird, wo dr den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs von r vorstellt.

Nun wird aber r, weil m und m' ein und demselben starren Körper angehören, fortdauernd *constant* bleiben. Folglich ist $dr = 0$, mithin jene Arbeit ebenfalls $= 0$; so dass wir also zu folgendem Satz gelangen.

Satz. — *Die im Innern eines starren Körpers vorhandenen Cohäsionskräfte haben die Eigenthümlichkeit, dass ihre Arbeit stets* $= 0$ *ist.*

Selbstverständlich wird dieser Satz unter allen Umständen gültig sein, einerlei ob der betrachtete starre Körper in Ruhe oder in Bewegung sich befindet.

§ 15.

Ueber die Arbeit der normalen Druckkräfte.

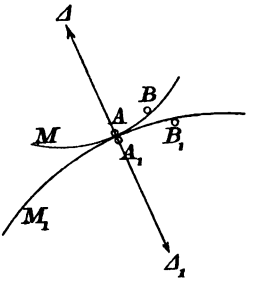
Zwei starre Körper M und M_1 (z. B. zwei Kugeln oder Ellipsoide) mögen unter dem Einfluss gegebener Kräfte sich der Art bewegen, dass sie dabei mit einander in Contact bleiben; wobei im Allgemeinen die Contactstelle auf der Oberfläche des einen Körpers und ebenso auch auf der des andern Körpers von Augenblick zu Augenblick sich verschieben wird. Alsdann werden die beiden Körper in jedem Augenblick an ihrer Contactstelle mit gewissen *normalen Druckkräften* Δ und Δ_1 auf einander einwirken; und diese Kräfte Δ und Δ_1 werden nach dem Gesetze der Gleichheit der Action und Reaction von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung sein. Dabei mag Δ die auf M von M_1 ausgeübte Kraft, und umgekehrt Δ_1 die auf M_1 von M ausgeübte Kraft vorstellen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die von diesen normalen Druckkräften Δ und Δ_1 während irgend eines Zeitelementes verrichtete *Arbeit* näher zu untersuchen.

Die in einem gegebenen Augenblick t mit einander in Contact befindlichen Oberflächenpuncte der beiden Körper mögen A und A_1 heissen. Ferner seien B und B_1 diejenigen beiden Oberflächenpuncte, welche im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ mit einander in Contact kommen.*)

*) Es sind A, A_1 und B, B_1 als bestimmte *Oberflächen-Molecüle der beiden Körper*, d. i. als bestimmte *Massenpuncte* zu denken.

Demgemäss bezieht sich also die beistehende Figur speciell auf den Augenblick t. — Im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ wird nämlich sowohl die Lage der Körper im Raume, wie auch ihre relative Lage zu einander bereits eine etwas *andere* sein; indem z. B. alsdann nicht mehr A und A_1, sondern B und B_1 mit einander coincidiren.



Was die vier *Massenpuncte* A, A_1, B, B_1 betrifft, so wollen wir, zur bequemeren Unterscheidung, die *räumlichen Lagen* derselben in den Augenblicken t und $t + dt$ respective mit A, A_1, B, B_1 und α, α_1, β, β_1 bezeichnen. Solches sei angedeutet durch die Notizen:

(1.) $\underline{A\ A_1}\ \ B\ \ B_1$ (die räumlichen Lagen der vier Massenpuncte im Augenblick t),

(2.) $\alpha\ \ \alpha_1\ \ \underline{\beta\ \ \beta_1}$ (die räumlichen Lagen ebenderselben vier Massenpuncte im Augenblick $t + dt$).

Offenbar liegen alle diese acht Raumpuncte A, A_1, B, B_1, α, α_1, β, β_1 einander *unendlich nahe*. Auch soll in (1.), (2.) durch die horizontalen unteren Klammern darauf aufmerksam gemacht sein, dass A und A_1 mit einander coincidiren [vgl. die obige Figur], und dass andererseits die beiden Raumpuncte β und β_1 ebenfalls mit einander coincidiren [denn dies sind die Lagen der Massenpuncte B und B_1 im Augenblick $t + dt$].

In unserer obigen Figur sind die normalen Druckkräfte Δ und Δ_1 angedeutet, welche die beiden Körper im Augenblick t auf einander ausüben. Die Kraft Δ hat zu ihrem Angriffspunct den Massenpunct A; und dieser durchläuft während der Zeit dt das Wegelement $A\alpha$. Folglich ist die von der Kraft Δ während der Zeit dt verrichtete Arbeit $= \Delta\,(A\alpha)\cos(\Delta, A\alpha)$. Dieser Cosinus wird, je nachdem die Richtungen Δ und $A\alpha$ einen spitzen oder stumpfen Winkel mit einander einschliessen, bald positiv, bald negativ sein. Hingegen sind die *vor* dem Cosinus stehenden Factoren Δ und $(A\alpha)$ die wirklichen, d. i. *absoluten* Werthe dieser Grössen. Bedient man sich, um solches besonders hervorzuheben, der *eckigen Klammern*, so ist also jene Arbeit $= [\Delta]\,[A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha)$. Desgleichen wird die von der Kraft Δ_1 während der Zeit dt ver-

richtete Arbeit $= [\Delta_1]\,[A_1\alpha_1]\cos(\Delta_1, A_1\alpha_1)$ sein; so dass also die Summe beider Arbeiten den Werth hat:

(3.) $\mathfrak{A} = [\Delta]\,[A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha) + [\Delta_1]\,[A_1\alpha_1]\cos(\Delta_1, A_1\alpha_1)$.

Nun sind Δ_1 und Δ von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung. Folglich ist z. B. $[\Delta_1]=[\Delta]$ und $\cos(\Delta_1, A_1\alpha_1) = -\cos(\Delta, A_1\alpha_1)$; so dass man also die Formel (3.) auch so schreiben kann:

(4.) $\mathfrak{A} = [\Delta]\left([A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha) - [A_1\alpha_1]\cos(\Delta, A_1\alpha_1)\right)$.

Die Puncte A und B sind einander *benachbarte* Massenpuncte des starren Körpers M. Der Unterschied zwischen ihren unendlich kleinen Verschiebungen $A\alpha$ und $B\beta$ wird daher unendlich klein in der *zweiten Ordnung* sein; so dass man also, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung, schreiben kann:

(m.) $[A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha) = [B\beta]\cos(\Delta, B\beta)$.

Desgleichen wird, was den Körper M_1 anbelangt, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung, zu schreiben sein:*)

(n.) $[A_1\alpha_1]\cos(\Delta, A_1\alpha_1) = [B_1\beta_1]\cos(\Delta, B_1\beta_1)$;

so dass also die Formel (4.) in folgende Gestalt versetzbar ist:

(5.) $\mathfrak{A} = [\Delta]\left([B\beta]\cos(\Delta, B\beta) - [B_1\beta_1]\cos(\Delta, B_1\beta_1)\right)$.

Zur weiteren Vereinfachung dieser Formel betrachten wir das von den vier Raumpuncten

$$\underbrace{(A \quad A_1)} \qquad B \qquad \underbrace{(\beta \quad \beta_1)} \qquad B_1$$

gebildete *Viereck;* und bringen auf dieses Viereck in Anwendung unsern Hülfssatz Seite 335. In solcher Weise ergiebt sich sofort:

$$\left\{\begin{array}{l}[AB]\cos(\Delta, AB) + [B\beta]\cos(\Delta, B\beta) + \\ + [\beta_1 B_1]\cos(\Delta, \beta_1 B_1) + [B_1 A_1]\cos(\Delta, B_1 A_1)\end{array}\right\} = 0.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung sind das *erste* und *letzte* Glied beide $= 0$, weil Δ senkrecht ist gegen AB, und ebenso auch senkrecht gegen A_1B_1 (vgl. die Figur). Somit folgt:

$$[B\beta]\cos(\Delta, B\beta) + [\beta_1 B_1]\cos(\Delta, \beta_1 B_1) = 0,$$

*) Dass in der That die Gleichungen (m.) und (n.) richtig sind bis auf unendlich kleine Grössen *zweiter Ordnung*, — davon kann man sich leicht überzeugen durch Anwendung rechtwinkliger Coordinaten.

oder, was dasselbe ist:

$$[B\beta]\cos(\Delta, B\beta) - [B_1\beta_1]\cos(\Delta, B_1\beta_1) = 0;$$

so dass also die Formel (5.) sich reducirt auf:

$$\mathfrak{A} = 0. \tag{6.}$$

Die von den beiden normalen Druckkräften Δ und Δ_1 während der Zeit dt verrichtete Arbeit wird also stets $= 0$ sein. Dabei ist von uns vorausgesetzt worden, dass die beiden Körper M und M_1 während dieser Zeit dt mit einander in Contact sind.

Offenbar aber wird die Arbeit jener normalen Druckkräfte auch dann $= 0$ sein, wenn die beiden Körper während des betrachteten Zeitelementes dt *nicht* in Contact, sondern durch irgend welchen Zwischenraum von einander getrennt sind; denn alsdann sind (in Folge jenes Zwischenraumes) die normalen Druckkräfte $= 0$, mithin die von ihnen verrichtete Arbeit ebenfalls $= 0$. — Demgemäss gelangen wir schliesslich zu folgendem Resultat:

Satz. — *Die von zwei starren Körpern auf einander ausgeübten normalen Druckkräfte haben die Eigenthümlichkeit, dass die von ihnen verrichtete Arbeit stets $= 0$ sein wird; — einerlei, ob die beiden Körper während der betrachteten Zeit fortdauernd oder nur vorübergehend mit einander in Contact sind.*

Selbstverständlich wird dabei vorausgesetzt, die Bewegungen der beiden Körper seien der Art, dass niemals ein plötzlicher Zusammenstoss erfolgt, dass vielmehr die Geschwindigkeitsänderungen von Augenblick zu Augenblick in *stetiger* Weise vor sich gehen.

NB. Durch diesen Satz und den Satz Seite 336 ist die Richtigkeit derjenigen Behauptungen dargethan, die in meinem früheren Aufsatz [Abh. I, Seite 375 (unten) und Seite 376], ohne weiteren Beweis, ausgesprochen worden sind.

Druckfertig erklärt 9. XII. 1902.]

Beiträge zur analytischen Mechanik.

Dritte Abhandlung.

Von

C. Neumann.

Dieser dritte Theil meiner Beiträge wird insbesondere vom *Gleichgewicht* handeln. Und zwar sollen die analytischen Kriterien des Gleichgewichtszustandes abgeleitet werden aus den von mir in den beiden ersten Theilen entwickelten allgemeinen Vorstellungen.

§ 16.

Ueber das Gleichgewicht eines Systems starrer Körper.

Es sei gegeben ein System von Körpern, die ausgestattet sind mit den Eigenschaften der *Starrheit* und der *gegenseitigen Undurchdringlichkeit*. Diese Eigenschaften haben, nach unserer Vorstellung, ihren eigentlichen Grund in gewissen Kräften, nämlich in den im Innern eines jeden Körpers vorhandenen *Cohäsionskräften*, und in jenen *normalen Druckkräften*, mit denen je zwei solche Körper bei ihrer gegenseitigen Berührung auf einander einwirken [vgl. § 13]. — Selbstverständlich werden einige der gegebenen Körper äusserst klein, d. i. *materielle Puncte* sein können.

Wir haben einstweilen nur der *Cohäsionskräfte* und der *normalen Druckkräfte* gedacht. Alle sonst noch auf die gegebenen Körper einwirkenden Kräfte mögen (in Ermangelung einer bessern Ausdrucksweise) kurzweg als *gewöhnliche Kräfte* bezeichnet werden. Zu diesen gewöhnlichen Kräften gehören alsdann z. B. jene *tangentialen Reibungskräfte*, welche beim Contact zweier Körper in Action treten [vgl. Seite 334], ferner die *Fernwirkungen*, welche je zwei Körper auf einander ausüben, und endlich alle *äussern*

Kräfte, d. i. alle von Aussen her auf das gegebene Körpersystem ausgeübten Kräfte.*)

Unter Zugrundelegung eines *absolut ruhenden* rechtwinkligen Axensystems $[O, x, y, z]$ mögen nun die einzelnen Massenpuncte des gegebenen Körpersystems mit $m(x, y, z)$ bezeichnet werden. Ferner mag unter X, Y, Z die Gesammtheit aller auf einen solchen Punct $m(x, y, z)$ einwirkenden Kräfte verstanden sein. Diese X, Y, Z sind alsdann im Allgemeinen aus dreierlei Theilen zusammengesetzt:

$$(1.) \quad X = \alpha + \mathsf{A} + A, \quad Y = \beta + \mathsf{B} + B, \quad Z = \gamma + \Gamma + C;$$

der Art, dass die α, β, γ von den *Cohäsionskräften*, und die A, B, Γ von den *normalen Druckkräften* herrühren; während die A, B, C die *gewöhnlichen Kräfte* repräsentiren.

Endlich mögen, wie es üblich ist, unter den *virtuellen Verrückungen* δx, δy, δz alle überhaupt denkbaren Verrückungen verstanden werden, die in Einklang sind mit den vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen; dabei ist im Auge zu behalten, dass diese Beweglichkeitsbeschränkungen herrühren theils von der Starrheit der einzelnen Körper, theils von ihrer gegenseitigen Undurchdringlichkeit.

Das gegebene Körpersystem befinde sich nun, unter dem Einfluss der einwirkenden Kräfte, zufälliger Weise im Augenblick t in völliger Ruhe. Wir stellen uns die Aufgabe, die Bewegung zu untersuchen, welche alsdann, unter dem Einfluss jener Kräfte, eintreten wird während des nächstfolgenden Zeitelementes dt.

Bezeichnen wir die lebendige Kraft des gegebenen Körpersystems in den Augenblicken t und $t + dt$ mit T_0 und T_1, und ihren Zuwachs während des Zeitelementes dt mit dT, so ist offenbar: $dT = T_1 - T_0$. Nach unserer Annahme befindet sich aber das System im Augenblick t in *völliger Ruhe;* folglich ist $T_0 = 0$; so dass man also erhält:

$$(2.) \qquad dT = T_1.$$

Dieser während der Zeit dt erfolgende Zuwachs dT wird nun aber nach einem bekannten allgemeinen Satz [Abh. I, Seite 375] folgendermaassen ausdrückbar sein:

---

*) Um die Hauptsache zu betonen: Unter den *gewöhnlichen Kräften* (dieselben sollen weiterhin mit A, B, C bezeichnet werden) sind in vorliegender Abhandlung alle überhaupt einwirkenden Kräfte zu verstehen, *exclusive* der Cohäsionskräfte und der normalen Druckkräfte.

$$(3.) \qquad dT = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz),$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Massenpuncte $m(x, y, z)$ des gegebenen Körpersystems. Dabei bezeichnen dx, dy, dz die noch unbekannten Verschiebungen dieser Puncte während der Zeit dt, und X, Y, Z die auf dieselben einwirkenden Kräfte. Substituirt man für diese Kräfte X, Y, Z ihre Werthe (1.), so erhält man:

$$(4.) \qquad \begin{aligned} dT = {} & \Sigma(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) + \Sigma(\mathsf{A}dx + \mathsf{B}dy + \Gamma dz) \\ & + \Sigma(Adx + Bdy + Cdz). \end{aligned}$$

Nach den schon bewiesenen Sätzen [Seite 336 und Seite 339] sind aber die von den Cohäsionskräften und von den normalen Druckkräften verrichteten Arbeiten stets $= 0$. Es ist also:

$$\Sigma(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(\mathsf{A}dx + \mathsf{B}dy + \Gamma dz) = 0.$$

Substituirt man dies in (4.), und substituirt man daselbst zugleich für dT den Ausdruck (2.), so erhält man sofort:

$$(5.) \qquad T_1 = \Sigma(Adx + Bdy + Cdz).$$

Die *linke Seite* T_1 dieser Formel repräsentirt die lebendige Kraft des gegebenen Körpersystems im Augenblick $t + dt$ und wird daher (ihrer Natur nach) stets positiv, d. i. stets $\geqq 0$ sein. Diese *linke Seite* T_1 unserer Formel muss daher nothwendig $= 0$ sein, wenn sich in irgend welcher Weise herausstellen sollte, dass die *rechte Seite* der Formel $\leqq 0$ ist. Letzteres aber wird der Fall sein, wenn wir *annehmen*, die Kräfte A, B, C seien von solcher Beschaffenheit, dass für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz die Formel stattfindet:

$$(6.) \qquad \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0.$$

Acceptirt man also diese Annahme (6.), so wird die lebendige Kraft T_1 des gegebenen Körpersystems im Augenblick $t + dt$ nothwendig $= 0$ sein. D. h. es wird alsdann dieses Körpersystem im Augenblick $t + dt$, ebenso wie im Augenblick t, in *völliger Ruhe* sich befinden. Es wird alsdann also während der Zwischenzeit dt *gar keine* Bewegung eingetreten sein. U. s. w. — Kurz wir gelangen zu folgendem Resultat:

Satz. — *Die auf das gegebene Körpersystem einwirkenden gewöhnlichen Kräfte A, B, C und die augenblickliche Lage des*

Systems seien von solcher Art, dass für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz die Formel stattfindet:

$$(7.) \qquad \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0.$$

Alsdann wird das gegebene Körpersystem, falls es augenblicklich in Ruhe ist, fortdauernd in Ruhe bleiben. Oder mit andern Worten: Es wird alsdann dieses Körpersystem, unter dem Einfluss jener Kräfte A, B, C, im Gleichgewicht sein.

§ 17.

Ueber die Umkehrbarkeit des erhaltenen Satzes.

Es fragt sich nun, ob und in wie weit der soeben aufgestellte Satz *umkehrbar* sei, ob also aus der Voraussetzung des Gleichgewichts das Stattfinden der Formel (7.) sich ergiebt.

Um näher hierauf einzugehen, nehmen wir an, das gegebene Körpersystem sei im *Gleichgewicht*, und suchen die aus dieser Annahme sich ergebenden Consequenzen zu entwickeln. Da nach unserer Bezeichnungsweise unter X, Y, Z die Gesammtheit aller überhaupt auf den Punct $m(x, y, z)$ einwirkenden Kräfte zu verstehen ist, dieser Punct aber nach unserer gegenwärtigen Annahme (ebenso wie alle übrigen Puncte des gegebenen Körpersystems) im *Gleichgewicht* ist, so müssen X, Y, Z *Null* sein:

$$(8.) \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Substituirt man hier für X, Y, Z die Ausdrücke (1.), so erhält man die Gleichungen:

$$(9.) \quad \alpha + \mathsf{A} + A = 0, \quad \beta + \mathsf{B} + B = 0, \quad \gamma + \Gamma + C = 0,$$

und zwar als gültig für jedweden Massenpunct $m(x, y, z)$ des gegebenen Körpersystems.

Wir denken uns jetzt das gegebene Körpersystem irgend welchen virtuellen Verrückungen unterworfen, und multipliciren die dem Puncte $m(x, y, z)$ entsprechenden Gleichungen (9.) mit den virtuellen Verrückungen δx, δy, δz dieses Punktes, und addiren. Die so entstehende Gleichung:

$$(10.) \qquad \begin{aligned}(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) + (\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z) \\ + (A\delta x + B\delta y + C\delta z) = 0\end{aligned}$$

summiren wir sodann über sämmtliche Massenpuncte des ganzen Körpersystems und gelangen so zu einer Formel von folgender Gestalt:

$$(11.)\qquad \begin{aligned}&\Sigma(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)+\Sigma(\mathsf{A}\delta x+\mathsf{B}\delta y+\Gamma\delta z)\\&+\Sigma(A\delta x+B\delta y+C\delta z)=0.\end{aligned}$$

Die erste dieser drei Summen repräsentirt offenbar die Arbeit der *Cohäsionskräfte* α, β, γ und wird daher $= 0$ sein [nach dem Satz Seite 336]; so dass also die Formel sich reducirt auf:

$$(12.)\qquad \Sigma(\mathsf{A}\delta x+\mathsf{B}\delta y+\Gamma\delta z)+\Sigma(A\delta x+B\delta y+C\delta z)=0.$$

Man könnte nun vielleicht den von den normalen Druckkräften handelnden Satz [Seite 339] zu Hülfe nehmen wollen, und aus demselben folgern wollen, dass die Summe

$$(13.)\qquad \Omega=\Sigma(\mathsf{A}\delta x+\mathsf{B}\delta y+\Gamma\delta z)$$

ebenfalls $= 0$ sei. Das aber würde eine durchaus *falsche* Anwendung jenes Satzes sein. Jener Satz ist nämlich nur anwendbar auf *wirkliche* Bewegungen (bei denen die normalen Druckkräfte von Augenblick zu Augenblick in *stetiger* Weise sich ändern), nicht aber auf *virtuelle* Bewegungen (bei denen *unstetige* Aenderungen in den Werthen der normalen Druckkräfte stattfinden können). Um über diese Dinge ins Klare zu kommen, mag folgendes Beispiel dienen:

Betrachtung eines Beispiels. — Das gegebene Körpersystem bestehe aus einer grossen Kugel M und aus einer ganz kleinen Kugel m; letztere sei so klein, dass sie als ein einziger materieller Punct anzusehen ist.

Beide Kugeln seien augenblicklich mit einander in *Contact* und im *Gleichgewicht* unter dem Einfluss der auf sie einwirkenden gewöhnlichen Kräfte A, B, C. An der Contactstelle sind alsdann zwei normale Druckkräfte vorhanden von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung, von denen die eine auf M, die andere auf m einwirkt.

Beide Kugeln seien homogen; und die auf sie einwirkenden gewöhnlichen Kräfte A, B, C mögen etwa herrühren von derjenigen *Anziehung*, die zwischen den beiden Kugeln, bei Zugrundelegung des NEWTON'schen Gesetzes, stattfinden wird. Alsdann wird, bei dem betrachteten Gleichgewichtszustande, die gemeinsame Stärke jener beiden normalen Druckkräfte genau ebenso gross sein wie die zwischen den beiden Kugeln vorhandene gegenseitige Anziehungskraft.

Die virtuellen Verrückungen δx, δy, δz wollen wir hier, wo es sich nur um ein Beispiel handelt, der Einfachheit halber, uns der Art denken, dass sie für die einzelnen Massenpuncte der grossen Kugel M durchweg $= 0$ sind, also nur allein Werthe

besitzen für den Punct m (d. i. für die kleine Kugel m). Jene früher in (13.) angegebene Summe

$$(A.) \qquad \Omega = \Sigma(\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z)$$

reducirt sich alsdann auf ein einziges Glied:

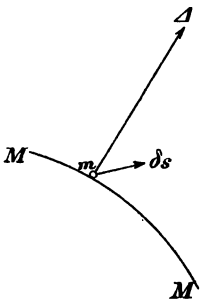
$$(B.) \qquad \Omega = \mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z,$$

wo δx, δy, δz die virtuelle Verrückung δs der kleinen Kugel m repräsentiren, während A, B, Γ die Componenten der von M auf m ausgeübten normalen Druckkraft Δ bezeichnen. (Vgl. die folgende Figur, in welcher die Oberfläche der grossen Kugel M nur *theilweise* angegeben ist.) — Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Entweder liegt nämlich das Linienelement $\delta s\,(\delta x, \delta y, \delta z)$ *auf der Oberfläche* der grossen Kugel M. Alsdann ist dasselbe senkrecht zur normalen Druckkraft $\Delta\,(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$, mithin

$$(C.) \qquad \Omega = \mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z = 0.$$

Oder aber, es wird die kleine Linie $\delta s\,(\delta x, \delta y, \delta z)$, wie in beistehender Figur, abgesehen von ihrem Anfangspunct, *ausserhalb* der Kugel M liegen. Alsdann wird diese Linie δs mit der Kraft Δ einen Winkel machen, der $< 90^0$ ist. Folglich wird alsdann der Ausdruck



$$(D.) \qquad \Omega = \mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z > 0$$

sein; denn es ist zu beachten, dass Δ nicht $= 0$ sein kann, weil Δ gleich gross ist mit der gegenseitigen Anziehungskraft der beiden Kugeln.

Auch bemerkt man, dass der Ausdruck $\Omega = \mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z$ im Falle (D.) diejenige Arbeit vorstellt, welche die im Augenblick des Contactes vorhandene normale Druckkraft $\Delta\,(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$ während der Verrückung δs leisten *würde*, falls sie nach dem Aufhören jenes Contactes *ungeändert* fortbestehen wollte. Es repräsentirt also dieses $\Omega = \mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z$ nur eine *gedachte Arbeit*, nur eine *Pseudoarbeit*, nicht aber diejenige Arbeit, welche von der Druckkraft *in Wirklichkeit* geleistet wird.

Diese *wirkliche Arbeit* ist leicht angebbar, nämlich $= 0$. In der That wird nämlich die kleine Kugel m, während sie das Linienelement δs durchläuft [vgl. die Figur], von der grossen Kugel M fortdauernd durch einen gewissen Zwischenraum getrennt sein (abgesehen vom ersten Augenblick). Folglich wird die in Rede stehende Druckkraft (abgesehen von jenem ersten Augenblick) während der Verrückung δs fortdauernd $= 0$ sein.

Und folglich wird die von ihr während dieser Verrückung verrichtete Arbeit ebenfalls $= 0$ sein. — *Q. e. d.*

Um die Hauptsache hervorzuheben: Im Falle (D.) ist Ω, wie aus der Formel (D.) ersichtlich, nicht $= 0$, sondern > 0. Jene früher, bei (13.), ausgesprochene Ansicht, dass Ω stets $= 0$ sein müsse, ist daher *durchaus falsch*. Auch ist der damals citirte Satz [Seite 339], auf den jene Ansicht sich stützte, *durchaus nicht anwendbar*. Denn der Ausdruck Ω repräsentirt, wie soeben gezeigt wurde, nicht die wirkliche Arbeit der Druckkraft, sondern nur eine gewisse Pseudoarbeit derselben.

Was wir hier bei diesem Beispiel uns klar gemacht haben, wiederholt sich offenbar im Wesentlichen auch im allgemeinen Falle. Wir werden also den Ausdruck (13.):

$$\Omega = \Sigma(\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z) \tag{14.}$$

mit einer gewissen Vorsicht zu behandeln haben. Wir werden ihn nicht schlechtweg die *Arbeit* nennen dürfen, welche von den normalen Druckkräften A, B, Γ während der virtuellen Verrückungen δx, δy, δz verrichtet wird; sondern wir werden ihn zu bezeichnen haben als diejenige nur *gedachte* Arbeit, welche von den normalen Druckkräften während der virtuellen Verrückungen geleistet werden *würde*, falls jene Kräfte während dieser Verrückungen genau dieselben Werthe beibehalten wollten, die sie kurz vor Beginn dieser Verrückungen besassen.

Der Werth dieser nur *gedachten* Arbeit, dieser *Pseudoarbeit* Ω (14.), soll nun im folgenden Paragraph genauer untersucht werden.

§ 18.

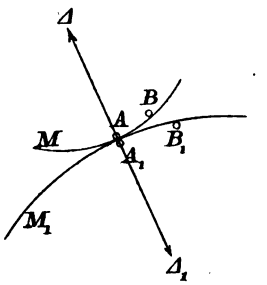
Ein bei virtuellen Verrückungen zur Anwendung kommender Satz über die normalen Druckkräfte.

Zwei starre Körper M und M_1 (etwa zwei Kugeln oder zwei Ellipsoide) mögen bis zum Augenblick t mit einander in Contact sein. Im Augenblick t aber mag, in Folge irgend welcher virtueller Verrückungen, dieser Contact plötzlich aufhören; sodass die Körper, vom Augenblick t ab, durch einen Zwischenraum von einander getrennt sind.

Die normalen Druckkräfte Δ und Δ_1, mit denen die beiden Körper bis zum Augenblick t aufeinander einwirken, werden daher in diesem Augenblick t plötzlich erlöschen. Wir stellen uns nun die Aufgabe, diejenige nur *gedachte* Arbeit zu berechnen, welche

die Kräfte Δ, Δ_1 während der in Rede stehenden virtuellen Verrückungen leisten *würden,* falls sie während dieser Verrückungen genau dieselben Werthe Δ, Δ_1 beibehalten wollten, die sie *vor* diesen Verrückungen besassen. Um uns bequemer ausdrücken zu können, wollen wir den kleinen Zeitraum, während dessen die virtuellen Verrückungen vor sich gehen, mit δt bezeichnen; sodass also diese Verrückungen beginnen im Augenblick t, und vollendet sind im Augenblick $t + \delta t$.

Es seien A und A_1 die im Augenblick t mit einander *coincidirenden* Oberflächenpuncte der beiden Körper. Während des nun folgenden Zeitelementes δt finden die virtuellen Verrückungen statt, und diese sind von solcher Art, dass die Körper vom Augenblick t ab, fortdauernd durch einen gewissen Zwischenraum von einander getrennt sind. Es mögen nun aber B und B_1 diejenigen Oberflächenpuncte der beiden Körper sein, welche im Augenblick $t + \delta t$ einander *am Nächsten* liegen; sodass also in diesem Augenblick $t + \delta t$ die gerade Linie BB_1 die *kürzeste Verbindungslinie* der beiden Oberflächen sein wird.



Die *räumlichen Lagen* der vier Massenpuncte A, A_1, B, B_1 mögen in den Augenblicken t und $t + \delta t$, respektive mit A, A_1, B, B_1 und mit α, α_1, β, β_1 bezeichnet werden. Auch mögen die Körper selber M, M_1 und ihre Oberflächen S, S_1, in den genannten Augenblicken respective mit M, M_1, S, S_1 und μ, μ_1, σ, σ_1 bezeichnet werden. Solches sei angedeutet durch folgende Notizen:

(I.) $M \quad M_1 \quad S \quad S_1 \quad \underbrace{A \quad A_1} \quad B \quad B_1$ (die räumlichen Lagen im Augenblick t),

(II.) $\mu \quad \mu_1 \quad \sigma \quad \sigma_1 \quad \alpha \quad \alpha_1 \quad \beta \quad \beta_1$ (die räumlichen Lagen im Augenblick $t + \delta t$).

Offenbar liegen alle acht Raumpuncte A, A_1, B, B_1 und α, α_1, β, β_1 einander *unendlich nahe.* Auch soll in (I.) durch die horizontale untere Klammer darauf hingewiesen sein, dass die Puncte A und A_1 mit einander coincidiren, [vgl. die obige Figur]. Andererseits ist in (II.) zu beachten, dass die beiden Puncte β und β_1 *nicht* miteinander coincidiren, dass aber die gerade Linie $\beta\beta_1$ die *kürzeste Verbindungslinie* zwischen den beiden Flächen σ und

σ_1 vorstellt; [denn β, β_1 und σ, σ_1 sind die räumlichen Lagen der Puncte B, B_1 und der Flächen S, S_1 im Augenblick $t + \delta t$]. *Hieraus folgt, dass*

(IIa.) *die gerade Linie $\beta\beta_1$ im Puncte β senkrecht steht zur Fläche σ, und dass sie andererseits auch senkrecht sein wird zur Fläche σ_1 im Puncte β_1.*

Dies vorangeschickt, wollen wir nun jene der Zeit δt entsprechende *Pseudoarbeit* der Kräfte Δ, Δ_1, d. h. jene nur *gedachte* Arbeit, von welcher zu Anfang dieses Paragraphs die Rede war, wirklich zu berechnen suchen. — Die von der Kraft Δ während der Zeit δt verrichtete Pseudoarbeit ist offenbar $= \Delta\,(A\alpha)\cos(\Delta, A\alpha)$. Die hier *vor* dem Cosinus stehenden Factoren sind stets ihren *absoluten* Werthen nach zu nehmen. Bedient man sich, um solches anzudeuten (ebenso wie früher, auf Seite 337) der *eckigen Klammern*, so ist also jene Pseudoarbeit $= [\Delta]\,[A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha)$. Ebenso wird die von der Kraft Δ_1 während der Zeit δt verrichtete Pseudoarbeit $= [\Delta_1]\,[A_1\alpha_1]\cos(\Delta_1, A_1\alpha_1)$ sein; sodass also die Summe beider Arbeiten folgenden Wert besitzt:

$$\text{(III.)}\quad \mathfrak{A} = [\Delta]\,[A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha) + [\Delta_1]\,[A_1\alpha_1]\cos(\Delta_1, A_1\alpha_1).$$

Die Kräfte Δ_1 und Δ sind aber von gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung; also

$$[\Delta_1] = [\Delta] \quad \text{und} \quad \cos(\Delta_1, A_1\alpha_1) = -\cos(\Delta, A_1\alpha_1).$$

Demgemäss kann man den Ausdruck (III.) auch so schreiben:

$$\text{(IV.)}\quad \mathfrak{A} = [\Delta]\left([A\alpha]\cos(\Delta, A\alpha) - [A_1\alpha_1]\cos(\Delta, A_1\alpha_1)\right).$$

Dieser Ausdruck (IV.) kann nun leicht [vgl. auf Seite 338 den Uebergang von (4.) zu (5.)] in folgende Gestalt versetzt werden:

$$\text{(V.)}\quad \mathfrak{A} = [\Delta]\left([B\beta]\cos(\Delta, B\beta) - [B_1\beta_1]\cos(\Delta, B_1\beta_1)\right).$$

Zur weiteren Vereinfachung des Ausdrucks betrachten wir jetzt das aus den fünf Raumpuncten

$$\underbrace{(A \quad A_1)} \qquad B \qquad \beta \qquad \beta_1 \qquad B_1$$

bestehende *Fünfeck;* und bringen auf dieses Fünfeck in Anwendung unsern Hülfssatz Seite 335. Alsdann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}&[AB]\cos(\Delta, AB) + [B\beta]\cos(\Delta, B\beta) + [\beta\beta_1]\cos(\Delta, \beta\beta_1)\\ &+ [\beta_1 B_1]\cos(\Delta, \beta_1 B_1) + [B_1 A_1]\cos(\Delta, B_1 A_1)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung sind aber das *erste* und *letzte* Glied beide $= 0$; weil Δ senkrecht steht gegen AB, und ebenso auch gegen A_1B_1 (vgl. die Figur). Somit folgt:

$$[B\beta]\cos(\Delta, B\beta) + [\beta\beta_1]\cos(\Delta, \beta\beta_1) + [\beta_1 B_1]\cos(\Delta, \beta_1 B_1) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$[B\beta]\cos(\Delta, B\beta) - [\beta_1\beta]\cos(\Delta, \beta_1\beta) - [B_1\beta_1]\cos(\Delta, B_1\beta_1) = 0;$$

so dass also die Formel (V.) sich reducirt auf:

$$\text{(VI.)} \qquad \mathfrak{A} = [\Delta][\beta_1\beta]\cos(\Delta, \beta_1\beta).$$

Der hier auftretende Winkel $(\Delta, \beta_1\beta)$ ist, wie sich leicht zeigen lässt, *unendlich klein*. Was nämlich die beiden Schenkel Δ und $\beta_1\beta$ dieses Winkels betrifft, so steht letzterer [nach (IIa.)] im Puncte β_1 senkrecht zur Fläche σ_1. Es ist daher dieser Schenkel $\beta_1\beta$ zu bezeichnen als die *im Puncte* β_1 auf der Fläche σ_1 errichtete äussere Normale.*) Diese äussere Normale unterscheidet sich aber, in ihrer Richtung, nur unendlich wenig von von der auf ebenderselben Fläche σ_1 *im Puncte* α_1 errichteten äusseren Normale. Und diese letztere wird offenbar, in ihrer Richtung, nur unendlich wenig verschieden sein von der *im Puncte* A_1 *auf der Fläche* S_1 errichteten äusseren Normale.**) Diese letztere aber ist [vgl. die obige Figur] dargestellt durch die Richtung Δ. Folglich wird also jener Schenkel $\beta_1\beta$ nur unendlich wenig abweichen von dieser Richtung Δ. Und hieraus ergiebt sich, dass der Winkel $(\Delta, \beta_1\beta)$ unendlich klein ist. — Q. e. d.

Aus der unendlichen Kleinheit des Winkels $(\Delta, \beta_1\beta)$ folgt nun weiter, dass sein Cosinus nur unendlich wenig von *Eins* verschieden, also stets *positiv* ist. Demgemäss wird die rechte Seite der Formel (VI.) ebenfalls stets *positiv* sein; so dass man also erhält:

$$\text{(VII.)} \qquad \mathfrak{A} \geqq 0.^{***})$$

*) Die Fläche σ_1 ist die Oberfläche des Körpers μ_1. Demgemäss ist hier unter der *äusseren* Normale der Fläche σ_1 diejenige zu verstehen, welche hineinläuft in den *Aussenraum* des Körpers μ_1.

**) Hier ist Analoges zu bemerken, wie in der vorigen Note. Nur kommen hier S_1 und M_1 an Stelle von σ_1 und μ_1 in Betracht.

***) Unsere *früheren* Betrachtungen, die zum Resultate (6.) Seite 339 führten, unterscheiden sich von den betreffenden Betrachtungen Delaunay's (*Mécanique rationelle,* Paris 1866, p. 311) nur durch eine andere *Methode.* Diese Methode aber ist von Wichtigkeit, weil sie uns hier in ganz analoger Weise auch zum Resultate (VII.) verholfen hat.

Zu diesem Resultat (VII.) sind wir hier gelangt, unter der Voraussetzung, dass der von Hause aus zwischen den beiden Körpern M und M_1 vorhandene Contact im Augenblick t *plötzlich aufhört*, und dass also die beiden Körper während des nächstfolgenden Zeitelementes δt durch einen gewissen Zwischenraum von einander getrennt sind. Leicht übersieht man nun aber nachträglich, dass man Schritt für Schritt dieselben Betrachtungen auch dann anstellen kann, wenn die beiden Körper während der Zeit δt miteinander in Contact *bleiben;* nur wird in diesem Falle die kürzeste Verbindungslinie $\beta\beta_1$ zwischen den Flächen σ und σ_1 den *speciellen* Werth Null haben. Man erkennt in solcher Weise, dass die Formel (VII.) auch dann noch in Kraft bleibt, wenn jener Contact während des Zeitelementes δt fortdauert*): und gelangt daher, Alles zusammengefasst, zu folgendem Satz:

Satz. — *Zwei starre Körper mögen bis zu einem gewissen Augenblick mit einander in Contact sein, und bestimmte normale Druckkräfte aufeinander ausüben. In diesem Augenblicke aber mögen irgend welche virtuelle Verrückungen eintreten; und es mag völlig dahingestellt bleiben, ob jener Contact während dieser virtuellen Verrückungen fortdauert, oder ob er, bei Beginn derselben, plötzlich aufhört.*

Alsdann kann man, falls es beliebt, diejenige nur gedachte Arbeit in Betracht ziehen, welche jene normalen Druckkräfte während dieser virtuellen Verrückungen leisten würden, falls sie während dieser Verrückungen genau dieselben Werthe beibehalten wollten, die sie kurz vor Beginn dieser Verrückungen besassen.

Diese nur gedachte Arbeit (Pseudoarbeit) hat nun die Eigenthümlichkeit, dass sie stets $\geqq 0$ *ist.*

§ 19.

Fortsetzung der in § 16 und § 17 begonnenen Gleichgewichtsuntersuchungen. Allgemeines Theorem.

Wir halten fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des § 16, und nehmen überdies an, das betrachtete Körpersystem befinde sich im *Gleichgewicht.* Alsdann wird für jedwedes System

*) Sie wird in diesem speciellen Fall, wo die Linie $\beta\beta_1$ gleich *Null* ist, die speciellere Gestalt annehmen: $\mathfrak{A} = 0$; wie solches aus (VI.) sofort zu ersehen ist; — und wie solches auch in Einklang ist mit unsern früheren Resultaten [vgl. (6) Seite 339.].

virtueller Verrückungen δx, δy, δz die in § 17 (auf Seite 344) erhaltene Formel (12.) gelten:

$$(15.) \quad \Sigma(\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z) + \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) = 0.$$

Die hier als erstes Glied auftretende Summe:

$$(16.) \quad \Omega = \Sigma(\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z)$$

repräsentirt aber [vgl. (14.) Seite 346] diejenige nur *gedachte* Arbeit (Pseudoarbeit), welche alle in dem Körpersystem vorhandenen normalen Druckkräfte während jener virtuellen Verrückungen δx, δy, δz leisten *würden*, falls sie während dieser virtuellen Verrückungen genau dieselben Werthe beibehielten, wie kurz vor Beginn derselben. Zufolge des soeben bewiesenen Satzes (Seite 350) ist daher diese Arbeit Ω stets $\geqq 0$. Also

$$(17.) \quad \Omega = \Sigma(\mathsf{A}\delta x + \mathsf{B}\delta y + \Gamma\delta z) \geqq 0.$$

Dies in (15.) substituirt, erhält man sofort:

$$(18.) \quad \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0$$

und gelangt daher zu folgendem Resultat:

Satz. — *Befindet sich das gegebene Körpersystem unter dem Einfluss irgend welcher gewöhnlicher Kräfte A, B, C im Gleichgewicht, so folgt hieraus, dass für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz die Formel stattfinden wird:*

$$(19.) \quad \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0.$$

Vereinigt man endlich diesen Satz mit dem früher gefundenen Satze Seite 342, so ergiebt sich folgendes

Allgemeines Theorem. — *Die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass das gegebene Körpersystem unter dem Einfluss irgend welcher gewöhnlicher Kräfte A, B, C im Gleichgewicht sei, besteht darin, dass für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz folgende Formel erfüllt ist:*

$$(20.) \quad \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0.$$

Dabei ist festgehalten an den früher [Seite 340—341] angegebenen Vorstellungen und Bezeichnungen.

Punctgelenke und Axengelenke. — Bei der Ableitung dieses Theorems ist über die *Anzahl* der Contactpuncte keinerlei Voraussetzung gemacht. Es wird daher dieses Theorem auch dann gelten, wenn diese Anzahl unendlich gross ist, wie solches

z. B. der Fall ist, wenn der Contact zweier Körper in einer *Linie* oder in einer *Fläche* stattfindet. *Contactlinien* können z. B. auftreten, wenn cylindrische Körper einander berühren. Andererseits sind *Contactflächen* vorhanden bei Axengelenken, ebenso bei Punctgelenken.*)

Unbeweglichkeit einzelner Körper. — Ferner ist zu bemerken, dass das vorstehende Theorem (20.) auch dann gelten wird, wenn *einer* der gegebenen Körper *völlig unbeweglich* gedacht werden soll. Denn zu den von uns supponirten *gewöhnlichen Kräften* A, B, C gehören z. B. [vgl. Seite 340 ff.] auch alle auf das Körpersystem einwirkenden *äusseren Kräfte*. Ueber die Beschaffenheit dieser äusseren Kräfte haben wir aber keinerlei Voraussetzung gemacht; und wir können uns daher einen Theil dieser äusseren Kräfte so eingerichtet denken, dass sie von Augenblick zu Augenblick für die Unbeweglichkeit jenes Körpers Sorge tragen. Ebenso können *zwei* Körper unbeweglich gedacht werden. U. s. w.

Die Beweglichkeits-Beschränkungen, denen das betrachtete Körpersystem unterworfen ist [vgl. Seite 333 ff.], werden in jedem gegebenen Fall analytisch formulirbar sein, und zwar theils durch *Gleichungen*, theils aber auch durch *Ungleichungen*.

Sind dieselben durch *lauter Gleichungen* (ohne Hinzunahme irgend welcher *Ungleichung*) ausdrückbar, so wird offenbar jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz *umkehrbar* sein, d. h. aus Grössen bestehen, die, mit -1 multiplicirt, wiederum ein System virtueller Verrückungen liefern. Aus dieser Umkehrbarkeit aber folgt sofort, dass man alsdann in dem allgemeinen Theorem (20.) das Zeichen $\leqq$ durch $=$ ersetzen darf. Andererseits übersieht man sofort, dass eine solche Ersetzung *unstatthaft* sein wird, falls jene Beweglichkeitsbeschränkungen nicht bloss

*) Sind zwei Körper M und M_1 durch ein *Axengelenk* (d. i. durch ein *Cylindergelenk* oder *Zapfengelenk*) mit einander verbunden, so werden zwei gleich grosse *Cylinderflächen* mit einander in Contact sein, von denen die eine zu M, die andere zu M_1 gehört. — Sind andererseits M und M_1 durch ein *Punctgelenk* (d. i. durch ein *Kugelgelenk*) mit einander verbunden, so werden zwei gleich grosse *Kugelflächen* mit einander in Contact sein, von denen die eine zu M, die andere zu M_1 gehört; dabei kann z. B. die eine dieser Kugelflächen durch einen *Theil* derselben ersetzt gedacht werden; auch wird eine solche Ersetzung geradezu nothwendig sein, wenn man ein solches Kugelgelenk wirklich herstellen will.

durch Gleichungen, sondern zum Theil auch durch *Ungleichungen* sich ausdrücken. Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall: *Die vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen sind durch lauter Gleichungen ausdrückbar. — Alsdann wird jedwedes System virtueller Verrückungen:*

(21.) $$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z$$

umkehrbar sein. Und gleichzeitig wird alsdann im Theorem (20.) *das Zeichen* $\leqq$ *durch* $=$ *ersetzbar sein.*

Zweiter Fall: *Die vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen sind entweder durch lauter Ungleichungen, oder aber theils durch Ungleichungen, theils durch Gleichungen ausdrückbar. — Alsdann werden unter den vorhandenen Systemen virtueller Verrückungen:*

(22.) $$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z$$

auch solche existiren, die nicht umkehrbar sind. Und alsdann wird im Theorem (20.) *eine Ersetzung des Zeichens* $\leqq$ *durch* $=$ *durchaus unstatthaft sein.*

Wir wollen jetzt annehmen, die vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen seien ausdrückbar mittelst einer *Ungleichung.* Alsdann ist [nach (22.)] im Theorem (20.) die Ersetzung des Zeichens $\leqq$ durch $=$ *verboten.*

Es kann nun aber [wie im folgenden Paragraph gezeigt werden soll] der Fall eintreten, dass jene gegebene Ungleichung ersetzbar ist durch ein *System von lauter Gleichungen.* Und alsdann wird also [nach (21.)] in jenem Theorem (20.) die Ersetzung des Zeichens $\leqq$ durch $=$ *erlaubt* sein.

Je nach unserem Belieben scheint also in solchem Falle die Ersetzung des Zeichens $\leqq$ durch $=$ einmal *verboten*, das andere Mal aber *erlaubt* zu sein. Wie ist dieser Widerspruch zu erklären oder zu beseitigen?

§ 20.

Erörterungen über den zuletzt angedeuteten Widerspruch.

Um einen ganz bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir uns eine *kleine Bleikugel* m denken, die mit der festen z-Axe des absolut ruhenden Coordinatensystems $[O, x, y, z]$ durch eine *materielle Kette* μ verbunden ist. Diese Kette μ mag aus einer Reihe starrer Körper bestehen, von denen je zwei auf

einander folgende durch ein Axengelenk mit einander zusammenhängen.

Es sei nämlich der *erste* dieser Körper drehbar um jene feste z-Axe. Sodann sei der *zweite* mit dem ersten durch eine Axe verbunden, die zur z-Axe parallel ist. Ferner sei der *dritte* mit dem zweiten durch eine Axe verbunden, die wiederum parallel zur z-Axe ist. U. s. w. Endlich mag der *letzte* Körper starr verbunden sein mit der gegebenen *kleinen Bleikugel* m. Diese Kugel m sei von solcher Kleinheit, dass sie als ein einziger *materieller Punct* anzusehen ist. Ihre Coordinaten mögen x, y, z heissen. Auch mag sie an jenem letzten Körper in solcher Weise befestigt sein, dass ihre Coordinate $z = 0$ ist, mithin auch fortdauernd $= 0$ *bleiben* wird; so dass sie also gezwungen ist, in der xy-Ebene zu bleiben.

Die Beweglichkeit dieses kleinen kugelförmigen Massenpunctes $m(x, y, z)$ ist also, wie man sieht, gewissen Beschränkungen unterworfen; und zwar werden diese Beschränkungen sich ausdrücken durch zwei Formeln von folgender Gestalt:

$$\text{(F.)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 \leqq l^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

wo l eine bestimmte Constante vorstellt.

Andererseits aber ist klar, dass man die vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen des aus dem Punct m und der Kette μ bestehenden Systems auch durch *lauter Gleichungen* auszudrücken vermag. Sind $(0, 0)$, (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ..., (ξ_p, η_p) die Puncte, in denen die xy-Ebene von jenen auf einander folgenden Axen in irgend einem Augenblick getroffen wird, so werden diese Gleichungen lauten:

$$\text{(G.)} \qquad \begin{cases} (\xi_1 - 0)^2 + (\eta_1 - 0)^2 = \lambda_0^2, \\ (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 = \lambda_1^2, \\ (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 = \lambda_2^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x - \xi_p)^2 + (y - \eta_p)^2 = \lambda_p^2, \\ \text{und} \qquad z = 0. \end{cases}$$

Hier sind unter λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_p bestimmte Constanten zu verstehen, die zu der in (F.) auftretenden Constante l in der Beziehung stehen:

$$\text{(Ga.)} \qquad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = l.$$

Uebrigens kann man sich die starren Körper, aus denen die Kette μ besteht, beliebig *fein* und beliebig *klein* denken; auch kann man die Anzahl dieser Körper sich beliebig *gross* vorstellen; so dass man also, falls es beliebt, die Kette μ ansehen kann als einen *dünnen inextensiblen Faden*, der mit all' seinen Puncten in der xy-Ebene zu bleiben gezwungen ist.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Die Beweglichkeitsbeschränkungen des gegebenen (aus dem Puncte m und der Kette μ bestehenden) materiellen Systems sind ausdrückbar durch die Formeln (G.), d. i. durch *lauter Gleichungen*. Folglich sind [vgl. Seite 353 (21.)] die virtuellen Verrückungen des Systems sammt und sonders *umkehrbar*. Und dieses Resultat wollen wir nun in Anwendung bringen auf einen Augenblick, in welchem jener stets in der xy-Ebene bleibende Punct $m(x, y, z)$ gerade seinen *grössten Abstand* l vom Puncte O, d. i. vom Anfangspuncte des Coordinatensystems erreicht hat.

Man denke sich in diesem Augenblick, von m aus, in der xy-Ebene, sonst aber in beliebiger Orientirung, zwei gleich grosse und einander entgegengesetzte Linienelemente δs und $\delta s'$ construirt, der Art, dass δs *innerhalb* eines in der xyEbene um O mit dem Radius l beschriebenen Kreises liegt, während $\delta s'$ *ausserhalb* dieses Kreises liegt. Alsdann wird die virtuelle Verrückung δs *unmöglich* sein; denn sämmtliche virtuelle Verrückungen sind (wie soeben constatirt wurde) umkehrbar; — wäre also die virtuelle Verrückung δs möglich, so müsste auch die entgegengesetzte virtuelle Verrückung $\delta s'$ möglich sein, — was offenbar nicht der Fall ist (weil dieses $\delta s'$ *ausserhalb* jenes Kreises liegt). — *Q. e. d.*

Jene innerhalb des genannten Kreises liegende virtuelle Verrückung δs ist also in der That unmöglich; und wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Der Punct m wird, sobald sein Abstand vom festen Puncte O gleich l geworden ist, niemals, vermöge irgend welcher unendlich kleiner virtueller Verrückungen) des gegebenen materiellen Systems, in das Innere eines in der xy-Ebene um den Punct O mit dem Radius l beschriebenen Kreises einzudringen im Stande sein. Er wird also, wie man jene virtuellen Verrückungen auch einrichten*

*) Die Beifügung des Epithetons der *unendlichen Kleinheit* ist hier eigentlich überflüssig. Denn wenn man von *virtuellen Verrückungen* spricht, so versteht es sich schon von selber, dass dabei immer nur von unendlich kleinen Verrückungen die Rede sein soll.

mag, stets auf der Peripherie dieses Kreises zu bleiben gezwungen sein.

Mit anderen Worten: Ist der Abstand des Punctes m vom festen Puncte O gleich l geworden, so wird man diesen Abstand niemals, durch irgend welche unendlich kleine virtuelle Verrückungen des gegebenen materiellen Systems, zu verringern im Stande sein.

Dem gegenüber könnte man sich auf den Augenschein berufen und, auf diesen gestützt, behaupten, dass auch solche Verrückungen des durch die Kette μ an die z-Axe gefesselten Punctes m möglich seien, bei denen m dieser Axe sich *nähert.* — Das soll nicht in Abrede gestellt werden. Nur geht aus dem soeben Bewiesenen deutlich hervor, dass diese Verrückungen alsdann keine *virtuelle* Verrückungen, oder wenigstens keine *unendlich kleine* virtuelle Verrückungen sein werden, d. h. dass sie die Eigenschaft der unendlichen Kleinheit nicht besitzen können für *sämmtliche* Puncte des betrachteten (aus m selber und der Kette μ bestehenden) materiellen Systems.

Noch einen anderen Einwand könnte man erheben. Man könnte nämlich die Formeln (G.) ganz bei Seite schieben und statt ihrer die Formeln (F.) anwenden, von denen eine eine *Ungleichung* ist. Auf diese Ungleichung gestützt, könnte man alsdann [vgl. Seite 353 (22.)] folgern, dass unter den virtuellen Verrückungen des Punctes m auch solche vorhanden sein müssten, die *nicht* umkehrbar sind. U. s. w. Hierauf ist zu erwidern, dass jene Formeln (F.) hier nicht maassgebend sein können, weil sie die vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen des gegebenen (aus dem Puncte m und der Kette μ bestehenden) materiellen Systems nur ganz *unvollständig* zum Ausdruck bringen.

Wesentlich anders gestalten sich die Dinge, wenn man die Kette μ fortlässt und den Punct m sich auf der xy-Ebene beweglich denkt innerhalb einer *festen materiellen Kreislinie*, die um den Punct O mit dem Radius l beschrieben ist. Alsdann nämlich werden die Formeln (F.) den *vollständigen* Ausdruck aller überhaupt vorhandenen Beweglichkeitsbeschränkungen repräsentiren. Und alsdann werden, sobald der Punct m seinen grössten Abstand l vom Puncte O erreicht hat, in der That unter den virtuellen Verrückungen des Punctes m auch solche existiren, die *nicht* umkehrbar sind.

Nach all' diesen Ueberlegungen erkennt man nun leicht, dass im Theorem (20.) Seite 351 das Zeichen $\leqq$ durch $=$ ersetzt

werden darf, sobald man dasselbe anwendet *auf das aus dem Punct m und der Kette μ bestehende System;* — dass hingegen in jenem Theorem das Zeichen $\leqq$ beibehalten werden muss, sobald man dasselbe anwendet *auf einen einzelnen Punct m, der innerhalb einer festen materiellen Kreislinie zu bleiben gezwungen ist.*

Gewöhnlich pflegt man diese beiden Probleme mit einander zu confundiren und zu glauben, dass beide unter einander identisch seien. Aus den hier von uns angestellten Betrachtungen dürfte indessen deutlich hervorgehen, dass zwischen diesen beiden Problemen wesentliche Unterschiede stattfinden, — und zwar *stets* stattfinden, einerlei, ob man jene im ersten Problem vorhandene Kette μ grob, oder beliebig fein sich vorstellt. (Vgl. die nachträgliche Bemerkung auf Seite 361.)

§ 21.

Ueber das relative Gleichgewicht an der Erdoberfläche.

Die bisherigen Betrachtungen der vorliegenden Abhandlung sind eigentlich — nur ganz *idealer* Natur, indem sie sich anlehnen an ein *absolut ruhendes* Coordinatensystem. Es entsteht die Frage, ob man nicht vielleicht ähnliche Betrachtungen auch durchzuführen im Stande ist, unter Zugrundelegung eines *mit der Erde fest verbundenen* Coordinatensystems.

Dabei wollen wir ausgehen von gewissen in der Abh. I gefundenen Formeln. Dieselben lauten [vgl. Abh. I, Seite 418 (26.) und Seite 415 (η.)]:

$$\text{(a.)}\quad d\mathsf{T} = \Sigma[(mg_1 + (Y_1))\,dy_1 + (mg_2 + (Y_2))\,dy_2 + (mg_3 + (Y_3))\,dy_3],$$

und ferner [vgl. Abh. I, Seite 415 (ξ.) und (η.)]:

$$\text{(b.)}\quad \begin{cases} m[y_1'' + 2(\omega_2 y_3' - \omega_3 y_2')] = mg_1 + (Y_1), \\ m[y_2'' + 2(\omega_3 y_1' - \omega_1 y_3')] = mg_2 + (Y_2), \\ m[y_3'' + 2(\omega_1 y_2' - \omega_2 y_1')] = mg_3 + (Y_3); \end{cases}$$

und diesen Formeln (a.) und (b.) liegt zu Grunde ein rechtwinkliges Axensystem $[E, y_1, y_2, y_3]$, welches mit der Erde fest verbunden ist, sonst aber von beliebiger Orientirung sein kann; nur soll der Anfangspunct E des Axensystems an der *Erdoberfläche* liegen, und zwar an derjenigen Stelle der Erdoberfläche, an welcher das zu betrachtende materielle System sich befindet.

Für unsere augenblicklichen Zwecke scheint es angemessen, die in den Formeln (a.), (b.) enthaltenen Bezeichnungen:

$$\mathsf{T},\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ mg_1+(Y_1),\ mg_2+(Y_2),\ mg_3+(Y_3),\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$

zu ersetzen durch folgende einfachere Bezeichnungen:

$$T,\ x,\ y,\ z,\qquad X,\qquad Y,\qquad Z,\qquad a,\ b,\ c.$$

Auch mag jenes mit der Erde fest verbundene Axensystem $[E, y_1, y_2, y_3]$ gegenwärtig mit $[O, x, y, z]$ bezeichnet werden.

Alsdann wird der in der Formel (a.) enthaltene Satz folgendermassen auszusprechen sein: Es sei O ein gegebener Punct der Erdoberfläche; und von O mögen drei aufeinander senkrechte Axen x, y, z ausgehen, die mit der Erde fest verbunden, übrigens aber von beliebiger Orientirung sind. Innerhalb eines den Punct O enthaltenden Raumes von mässiger Grösse befinde sich nun irgend *ein aus lauter starren Körpern bestehendes System;* dieses System sei in irgend welcher Bewegung begriffen, und seine *relative* lebendige Kraft in Bezug auf die Erde mag T heissen Alsdann wird diese lebendige Kraft T während irgend eines Zeitelementes dt einen Zuwachs dT erhalten, der folgendermassen ausdrückbar ist:

$$\text{(A.)}\qquad dT = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz),$$

die Summation ausgedehnt gedacht über sämmtliche Massenpuncte $m(x, y, z)$ des gegebenen Körpersystems. Dabei bezeichnen X, Y, Z die Componenten aller überhaupt auf den Punct $m(x, y, z)$ einwirkenden Kräfte, inclusive der in (a.) mit mg_1, mg_2, mg_3 bezeichneten Schwerkraft. Endlich sind in der vorstehenden Formel (A.) unter dx, dy, dz die Zuwüchse zu verstehen, welche die Coordinaten x, y, z des Punctes m während des betrachteten Zeitelementes dt erfahren.

Andererseits beziehen sich die Formeln (b.) auf einen *einzelnen Massenpunct m.* Sie enthalten folgenden Satz: Innerhalb eines den Punkt O enthaltenden Raumes von mässiger Grösse befinde sich irgend ein *Massenpunct* m, mit den Coordinaten $x, y, z.$ Alsdann werden für die Bewegung dieses Punctes folgende Differentialgleichungen gelten:

$$\text{(B.)}\qquad \begin{cases} mx'' + 2m(bz' - cy') = X, \\ my'' + 2m(cx' - az') = Y, \\ mz'' + 2m(ay' - bx') = Z, \end{cases}$$

wo die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten. Dabei sind die Componenten aller auf den Punkt m überhaupt einwirkender Kräfte, inclusive der Schwerkraft, bezeichnet zu denken mit X, Y, Z. Ausserdem repräsentiren a, b, c gewisse *Constanten;* es ist nämlich:

$$a = \omega \cos(A, x), \quad b = \omega \cos(A, y), \quad c = \omega \cos(A, z),$$

wo A die Erdaxe bezeichnet, während ω die Winkelgeschwindigkeit vorstellt, mit welcher die Erde um diese Axe A rotirt.

Befindet sich der Punct $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss jener Kräfte X, Y, Z im *Gleichgewicht* (d. h. in fortdauernder relativer Ruhe mit Bezug auf die Erde), so werden jene Kräfte nothwendiger Weise die Werthe besitzen:

$$(C.) \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0;$$

wie solches aus den Formeln (B.) sich sofort ergiebt.

Wir kehren jetzt zurück zum Satze (A.), d. i. zur Formel:

$$(D.) \qquad dT = \Sigma(X dx + Y dy + Z dz),$$

also zur Betrachtung eines aus beliebig vielen starren Körpern bestehenden Systems. Aehnlich wie früher [Seite 340], wollen wir nun von den Kräften X, Y, Z die Cohäsionskräfte und die normalen Druckkräfte absondern, und die alsdann noch übrig bleibenden Theile der X, Y, Z mit A, B, C bezeichnen. Auch wollen wir, ebenso wie damals [Seite 340], diese A, B, C schlechtweg die *gewöhnlichen Kräfte* nennen.*) Alsdann können wir, auf Grund der Formel (D.), Schritt für Schritt dieselben Betrachtungen wiederholen, wie sie früher in § 16 auf Grund der dortigen Formel (3.) angestellt wurden, und gelangen in solcher Weise zu folgendem Resultat:

Satz (parallel stehend dem Satze Seite 342). — *Es sei O ein Punct der Erdoberfläche; und von O mögen drei aufeinander senkrechte Axen x, y, z ausgehen, die mit der Erde fest verbunden, übrigens aber von beliebiger Orientirung sind. Innerhalb eines den Punct O enthaltenden Raumes von mässiger Grösse befinde*

*) Demgemäss sind also unter den *gewöhnlichen Kräften A, B, C* alle überhaupt einwirkenden Kräfte zu verstehen, *inclusive* der Schwerkräfte mg_1, mg_2, mg_3, aber *exclusive* der Cohäsionskräfte und der normalen Druckkräfte. Es ist das in guter Uebereinstimmung mit unsern früheren Festsetzungen. Vergl. die Note Seite 341.

sich nun irgend ein aus lauter starren Körpern bestehendes System. Die auf die einzelnen Massenpuncte $m(x, y, z)$ dieses Systems einwirkenden gewöhnlichen Kräfte mögen mit A, B, C bezeichnet sein; dabei sollen die Coordinaten x, y, z und die Componenten A, B, C bezogen gedacht werden auf das schon angegebene rechtwinklige Axensystem $[O, x, y, z]$.

Man nehme nun an, jene gewöhnlichen Kräfte A, B, C und die augenblickliche Lage des Körpersystems seien von solcher Beschaffenheit, dass für jedwedes System virtueller Verrückungen $\delta x, \delta y, \delta z$ die Formel stattfindet

$$\text{(E.)} \qquad \Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0 .$$

Alsdann wird das gegebene Körpersystem, falls es augenblicklich in Bezug auf die Erde in relativer Ruhe ist, fortdauernd in dieser relativen Ruhe verharren. Oder mit andern Worten: Es wird alsdann dieses Körpersystem in relativem Gleichgewicht sich befinden.

Es fragt sich nun, ob dieser Satz umkehrbar ist. Um hierauf näher einzugehen, wollen wir annehmen, das gegebene Körpersystem befinde sich unter dem Einfluss der einwirkenden Kräfte im *Gleichgewicht* (d. h. in relativem Gleichgewicht mit Bezug auf die Erde), und die aus dieser Annahme sich ergebenden Consequenzen zu entwickeln suchen.

Ebenso wie früher, mag irgend ein Massenpunct des gegebenen Massensystems mit $m(x, y, z)$ und die Gesammtheit aller auf ihn einwirkenden Kräfte mit X, Y, Z bezeichnet werden. Nach unserer Annahme befindet sich aber dieser Punct $m(x, y, z)$, ebenso wie alle übrigen Massenpuncte des gegebenen Körpersystems, augenblicklich im *Gleichgewicht*. Nach dem Satze (C.) müssen daher die auf ihn einwirkenden Kräfte X, Y, Z gleich Null sein. Also

$$\text{(F.)} \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 .$$

Von diesen Gleichungen (F.) aus, werden wir nun Schritt für Schritt denselben Weg verfolgen können, der in § 17, von den dortigen Formeln (8.) aus, eingeschlagen wurde. Und in solcher Weise werden wir, wie leicht zu übersehen ist, zu folgendem Satz gelangen.

Satz (parallel stehend dem Satze Seite 351). — *Befindet sich das gegebene Körpersystem unter dem Einfluss irgend welcher*

gewöhnlichen Kräfte A, B, C im relativen Gleichgewicht (d. h. im Gleichgewicht mit Bezug auf die Erde), — so wird für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz die Formel stattfinden:

(G.) $$\Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0 .$$

Endlich wird die Vereinigung dieses Satzes (G.) mit dem Satze (E.) folgendes Resultat liefern:

Allgemeines Theorem (parallel stehend zum Theorem Seite 351). — *Die ausreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass das gegebene Körpersystem, unter dem Einfluss irgend welcher gewöhnlichen Kräfte A, B, C, mit Bezug auf die Erde in relativem Gleichgewicht sich befinde, — besteht darin, dass für jedwedes System virtueller Verrückungen δx, δy, δz die Formel erfüllt ist:*

(H.) $$\Sigma(A\delta x + B\delta y + C\delta z) \leqq 0 .$$

Dabei sind [vgl. die Note auf Seite 359] unter den gewöhnlichen Kräften A, B, C alle überhaupt einwirkenden Kräfte zu verstehen, inclusive der Schwerkraft, aber exclusive der Cohäsionskräfte und der normalen Druckkräfte.

Selbstverständlich ist den Sätzen (E.), (G.), (H.) keine absolute Zuverlässigkeit, keine absolute Correctheit zuzuschreiben. Denn diese Sätze beruhen, ebenso wie überhaupt die Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphs, wesentlich auf den Vorstellungen, die wir uns über die Bewegung der Erdkugel im Weltraum gebildet haben [Vgl. Abh. I Seite 408—410]; und diese sind sicherlich nur *approximativer* Natur.

Nachträgliche Bemerkung.

In Anbetracht der Erörterungen des § 20 Seite 353—357 müsste man zum Satze (21.), (22.) Seite 353 eigentlich noch hinzufügen, dass die dortigen Formeln (Gleichungen und Ungleichungen) nicht nur als der *vollständige* Ausdruck aller überhaupt vorhandenen Beweglichkeits-Beschränkungen, sondern auch als *frei von gegenseitiger Deckung* vorausgesetzt werden. U. s. w. Besser aber dürfte es wohl sein, derartige Distinctionen bei Seite zu lassen, und jenem Satze (21.), (22.) folgende völlig unverfängliche Fassung zu geben:

Sind die vorhandenen Beweglichkeits-Beschränkungen analytisch ausgedrückt durch irgend welche Formeln, und bestehen diese Formeln aus

lauter Gleichungen, so wird jedwedes System virtueller Verrückungen umkehrbar sein. Und alsdann wird im Theorem (20.) *Seite* 351 *die Ersetzung des Zeichens* $\leqq$ *durch* $=$ *ohne Weiteres erlaubt sein.*

Sind hingegen unter jenen Formeln auch Ungleichungen vorhanden, so werden unter den Systemen virtueller Verrückungen im Allgemeinen — jedoch nicht immer — auch solche sich vorfinden, die nicht umkehrbar sind. Und alsdann wird im Theorem (20.) *die in Rede stehende Ersetzung im Allgemeinen verboten sein; wenigstens wird es alsdann noch einer jedesmaligen genaueren Untersuchung bedürfen, um zu erkennen, ob sie erlaubt ist.*

Inhaltsübersicht.

Beiträge zur analytischen Mechanik. Zweite Abhandlung.

Seite

§ 13. Ueber die Cohäsionskräfte, die normalen Druckkräfte und die tangentialen Reibungskräfte 333
§ 14. Ueber die Arbeit der Cohäsionskräfte 335
§ 15. Ueber die Arbeit der normalen Druckkräfte 336

Beiträge zur analytischen Mechanik. Dritte Abhandlung.

§ 16. Ueber das *Gleichgewicht* eines Systems von Körpern . . . 340
§ 17. Ueber die Umkehrbarkeit des im vorigen Paragraph erhaltenen Satzes 343
§ 18. Ein Satz über die normalen Druckkräfte bei virtuellen Verrückungen. (Pseudo-Arbeit.) 346
§ 19. Fortsetzung der in § 16 und § 17 begonnenen Gleichgewichtsuntersuchungen. *Allgemeines Theorem* 350
§ 20. Erörterungen über den am Schluss des vorigen Paragraphs angedeuteten Widerspruch 353
§ 21. Ueber das *relative Gleichgewicht* an der Erdoberfläche . . . 357
Nachträgliche Bemerkung 361

NB. Der Kürze willen ist im Vorhergehenden von *gewöhnlichen* Kräften die Rede. Darunter sind alle überhaupt einwirkenden Kräfte zu verstehen, *exclusive* der Cohäsionskräfte und der normalen Druckkräfte. [Vgl. die Noten auf Seite 341 und Seite 359.]

Druckfertig erklärt 9. XII. 1902.]

AUSZERORDENTL. SITZUNG VOM 12. NOVEMBER 1902.

Als Aktor der Mendestiftung wird Herr Oberjustizrat Dr. MELTZER bestellt.

Es wird beschlossen, Herrn Dr. SCHUMANN aus den Erträgnissen der Mendestiftung für seine optischen Untersuchungen Mk. 1800.— zur Verfügung zu stellen, wovon die eine Hälfte im laufenden, die andere im nächsten Jahre.

Dem Herausgeber von FECHNERS Kollektivmaßlehre wird ein Nachtragshonorar bewilligt.

Vorträge halten:

Herr MAYER: Abhandlung des Herrn G. SCHEFFERS: „Über Loxodromen".

Herr ENGEL: Abhandlung des Herrn GERHARD KOWALEWSKI: Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes".

Über Loxodromen.

Von

G. SCHEFFERS.

§ 1. Definition der Loxodromen.

Beim Wort Loxodrome denkt man unwillkürlich an eine Rotationsfläche, weil man die Loxodromen als diejenigen Kurven zu definieren pflegt, die alle Meridiankurven einer gegebenen Rotationsfläche unter konstantem Winkel durchsetzen.

Aber diese Definition läßt sich durch eine andere und, wie mir scheint, bessere ersetzen, die von der Rotationsfläche unabhängig ist. Nicht als ob ich meinte, den Begriff der Loxodromen, wie man es gelegentlich tut, auf beliebige Flächen zu verallgemeinern; es handelt sich vielmehr nur um die Loxodromen der Rotationsflächen. Die bessere Definition liegt außerordentlich nahe; ich habe sie jedoch nirgends deutlich ausgesprochen gefunden, sodaß es wohl berechtigt ist, mit Nachdruck auf sie hinzuweisen. Wenn eine Kurve alle Meridiankurven einer Rotations-

fläche unter konstantem Winkel ε durchsetzt, so schneidet sie natürlich auch die Breitenkreise der Rotationsfläche unter einem konstanten Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$; da aber die Tangenten der Breitenkreise Normalen der Meridian*ebenen* sind, so folgt, daß die Loxodrome alle Meridian*ebenen* unter dem konstanten Winkel ε durchsetzt. Umgekehrt: Wenn eine Kurve alle Ebenen eines Büschels von Ebenen unter dem konstanten Winkel ε schneidet, so erzeugt sie, sobald sie um die Achse des Büschels gedreht wird, eine Rotationsfläche, auf der sie eine Loxodrome ist. Demnach kann man die Loxodromen so definieren:

Loxodromen sind diejenigen Kurven, die alle Ebenen eines Ebenenbüschels unter konstantem Winkel durchsetzen.

Hiernach erscheinen die Loxodromen als eine besondere Art von *Raum*kurven und nicht, wie bei der sonst gebräuchlichen Definition, als eine besondere Art von *Flächen*kurven, und das ist der Vorzug der neuen Definition.

Zu jeder Geraden g des Raumes und zu jedem gegebenen Winkel ε gehört eine Familie von Loxodromen, bestehend aus allen denjenigen Kurven, die alle Ebenen durch g unter dem Winkel ε durchsetzen. Liegt die Gerade g unendlich fern, so ergibt sich die Familie der *allgemeinen Schraubenlinien, die daher als Spezialfälle von Loxodromen aufzufassen sind.*

Ist eine Gerade g und ein Winkel ε gegeben, so gehen durch einen beliebigen Punkt P des Raumes unendlich viele zugehörige Loxodromen. Ihre Tangenten in P bilden mit der Ebene (P, g) den Winkel ε und erzeugen daher einen Rotationskegel konstanter Öffnung, dessen Achse auf der Ebene (P, g) in P senkrecht steht. Jedem Punkte P des Raumes gehört ein solcher Kegel zu, den wir den zugeordneten *Elementarkegel* nennen. Die Loxodromen, die zu g und $\sphericalangle \varepsilon$ gehören, sind diejenigen Kurven, die in jedem ihrer Punkte den zugeordneten Elementarkegel berühren. Analytisch werden sie daher durch eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z und den Inkrementen dx, dy, dz definiert, also durch eine MONGEsche *Gleichung*, wenn wir uns der Terminologie von LIE[1]) bedienen. Diese Gleichung ist in dx, dy, dz homogen vom zweiten Grade, und die Loxodromen sind ihre Integralkurven. Auf die analytische Formulierung braucht hier nicht eingegangen zu werden.

1) In LIE-SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, I, Leipzig 1896, S. 249.

§ 2. Bedeutung des sphärischen Loxodromen.

Diejenigen Loxodromen, die auf Kugeln liegen, deren Mitten Punkte der Achse g des Ebenenbüschels sind, heißen kurz *sphärische Loxodromen*, obgleich natürlich auch auf jeder andern Kugel, wie überhaupt auf jeder Fläche, ∞^1 Loxodromen liegen, die zur gegebenen Achse g und zu dem gegebenen Winkel ε gehören. Diese sphärischen Loxodromen sind schon vielfach betrachtet worden.[1]) Hier sollen sie in eine, wie ich glaube, neue Beleuchtung gerückt werden.

Nach der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der Flächen, also der Gleichungen zwischen x, y, z und den ersten partiellen Ableitungen von z nach x und y, ordnet eine partielle Differentialgleichung 1. O. jedem Punkte P des Raumes einen Elementarkegel zu. Umgekehrt: Zu gegebenen Elementarkegeln im Raume gehört eine bestimmte partielle Differentialgleichung 1. O., so auch zu den oben eingeführten Elementarkegeln. Die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung berühren in jedem ihrer Punkte den zugeordneten Kegel, sie sind hier also *diejenigen Flächen, die alle Ebenen des Ebenenbüschels mit der Achse g unter dem konstanten Winkel ε schneiden.* Nach dem Joachimsthalschen Satze sind die Schnittkurven der Integralflächen mit den Ebenen des Büschels *Krümmungslinien* der Flächen.

Es ist leicht, eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung anzugeben, nämlich Kegel, deren Spitzen S auf g liegen: Wenn ein solcher Kegel alle Ebenen durch g unter dem konstanten Winkel ε schneiden soll, so muß die sphärische Kurve, in der der Kegel durch eine Kugel um S getroffen wird, ebenfalls alle Ebenen durch g unter dem Winkel ε durchsetzen, d. h. sie ist eine sphärische Loxodrome. Umgekehrt: Konstruieren wir auf einer Kugel, deren Mitte S auf g liegt, eine zur Achse g und zum Winkel ε gehörige sphärische Loxodrome, so ist der Kegel der Radien, die von S nach der Kurve gehen, augenscheinlich eine Fläche, die alle Ebenen durch g unter dem Winkel ε trifft. Da auf jeder Kugel mit der Mitte auf g ∞^1 unserer sphärischen Loxodromen liegen, da ferner auf jedem der konstruierten Kegel ihrer ∞^1 liegen und da es ∞^2 Kugeln gibt,

1) Sie gehören zu den W-Kurven, vgl. F. Klein und S. Lie, C. R. 70 (1870), S. 1224.

die ihre Mitten auf g haben, so liefert eine einfache Abzählung, daß es gerade ∞^2 Kegel der betrachteten Art gibt.

Diese ∞^2 Kegel bilden zusammen eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Die partielle Differentialgleichung hat ∞^3 charakteristische Kurven. Einerseits gehören sie nach der allgemeinen Theorie zu den Integralkurven der oben erwähnten Mongeschen Gleichung und sind daher Loxodromen, andererseits liegen sie auf den ∞^2 Kegeln. Jeder dieser Kegel enthält aber von Loxodromen nur ∞^1 sphärische. Daher: *Die charakteristischen Kurven der partiellen Differentialgleichung sind die ∞^3 sphärischen Loxodromen.*

Die allgemeinste Integralfläche der partiellen Differentialgleichung ist nach der allgemeinen Theorie die Umhüllende von ∞^1 jener Kegel. Daraus folgt:

Um die allgemeinste Fläche zu erhalten, die alle Ebenen durch eine Gerade g unter dem konstanten Winkel ε schneidet, wählt man in einer Ebene durch g eine Kurve c beliebig, konstruiert in jedem ihrer Punkte P die Tangente und ihren Schnittpunkt S mit g. Auf der Kugel um S, die durch P geht, zieht man diejenige Loxodrome, die von P ausgeht und zur Achse g und dem Winkel ε gehört. Die Gesamtheit der so konstruierten ∞^1 sphärischen Loxodromen erzeugt die Fläche.

Man erkennt sofort, daß diese ∞^1 sphärischen Loxodromen die Kurve c und überhaupt alle Schnittkurven der Fläche mit den Ebenen durch g senkrecht treffen. Da nun diese Schnittkurven, wie schon bemerkt wurde, Krümmungslinien sind, so *bilden die ∞^1 sphärischen Loxodromen auf der Fläche die zweite Schar der Krümmungslinien.*

Nach der allgemeinen Theorie der Mongeschen Gleichungen umhüllen die ∞^1 charakteristischen Kurven auf einer Integralfläche eine allgemeine Integralkurve der Mongeschen Gleichung. Demnach folgt:

Die allgemeinste Fläche, die alle Ebenen durch eine gegebene Gerade g unter dem konstanten Winkel ε trifft, wird von denjenigen zur Axe g und zum Winkel ε gehörigen sphärischen Loxodromen gebildet, die eine beliebige Loxodrome mit derselben Achse g und demselben Winkel ε berühren. Auf ihr sind die sphärischen Loxodromen die eine Schar der Krümmungslinien; die der anderen Schar sind die Schnittkurven der Fläche mit den Ebenen durch g.

Aus dem Vorhergehenden läßt sich auch eine Methode ab-

leiten, *alle Loxodromen durch Differentiation und Elimination zu bestimmen.* Denn zunächst lassen sich ja alle *sphärischen* Loxodromen, weil sie durch stereographische Projektion in logarithmische Spiralen übergehen, ohne weiteres in endlicher Form angeben. Daher lassen sich auch diejenigen unter ihnen sofort angeben, die von einer in einer Ebene durch g beliebig gewählten Kurve c so ausgehen, wie es oben auseinandergesetzt wurde. Ihre Umhüllungskurve, die sich durch Differentiation und Elimination ergibt, ist eine allgemeine Loxodrome. Wenn man dagegen von einer Rotationsfläche allgemeiner Art mit der Achse g ausgeht und ihre Loxodromen bestimmen will, so hat man bekanntlich noch eine Quadratur auszuführen, bei der unter dem Integralzeichen eine allgemeine Funktion auftritt.

Ferner erhellt hieraus, *daß sich auch diejenigen Flächen, die ein Büschel von Ebenen unter konstantem Winkel treffen, durch Differentiation und Elimination ohne Quadratur bestimmen lassen.*

§ 3. Verallgemeinerung vermöge Transformation durch reziproke Radien.

Wendet man auf den Raum eine beliebige Transformation durch reziproke Radien an, so geht das Büschel der Ebenen durch g in ein allgemeines Büschel von Kugeln über, deren gemeinsamer Kreis der Kreis k sei. Da die Transformation durch reziproke Radien konform ist, so folgt sofort:

Will man die allgemeinste Fläche bez. Kurve finden, die alle Kugeln mit einem gemeinsamen Kreis k unter konstantem Winkel ε treffen, so wählt man auf einer dieser Kugeln eine Kurve c beliebig. Durch jeden Punkt P von c legt man darauf diejenige Kugel, die die Kurve c in P senkrecht trifft und zugleich den Kreis k senkrecht schneidet. Auf dieser Kugel zieht man darauf von P aus diejenige Kurve, die alle Kugeln durch k unter dem Winkel ε schneidet. Die Gesamtheit dieser von den Punkten P von c ausgehenden ∞^1 sphärischen Kurven erzeugt die gesuchte Fläche und ihre Umhüllende die gesuchte Kurve. Zugleich sind jene ∞^1 sphärischen Kurven Krümmungslinien der Fläche. Die andere Schar von Krümmungslinien sind diejenigen Kurven, in denen die Kugeln durch k die Fläche schneiden.

Jene von den Punkten von c ausgehenden ∞^1 Kurven sind diejenigen, die aus den sphärischen Loxodromen durch die angewandte Transformation durch reziproke Radien hervorgehen.

Sie lassen sich also durch Differentiation und Elimination bestimmen. *Demnach lassen sich auch alle Flächen und Kurven, die ein Büschel von Kugeln unter konstantem Winkel treffen, durch Differentiation und Elimination bestimmen.*

Die gefundenen Flächen sind *Flächen, bei denen beide Scharen von Krümmungslinien sphärische Kurven sind.* Alle derartigen Flächen sind allerdings schon bekannt.[1]) Ich möchte auch nur Nachdruck darauf legen, daß die Kurven, die ein Kugelbüschel unter konstantem Winkel treffen, durch das angegebene Verfahren gefunden werden.

Ein besonderer Fall sei noch erwähnt: In dem Grenzfall, wo das Büschel der Kugeln aus konzentrischen Kugeln besteht, sind die fraglichen Kurven diejenigen, die alle von einem festen Punkte (dem Zentrum) ausgehenden Strahlen unter konstantem Winkel treffen. Daher folgt in diesem Falle:

Will man alle Raumkurven finden, die ihre von einem festen Punkte O ausgehenden Radienvektoren unter konstantem Winkel treffen, so wählt man auf einer Kugel um O eine Kurve c beliebig. Durch die Punkte P von c legt man darauf die Ebenen, die dort c senkrecht treffen und durch O gehen. In jeder diesen Ebenen konstruiert man darauf diejenige logarithmische Spirale, die O zum asymptotischen Punkt hat, ferner durch den betreffenden Punkt P geht und drittens ihre Radienvektoren unter dem gegebenen Winkel schneidet. Die so konstruierten ∞^1 logarithmischen Spiralen umhüllen die gesuchte Kurve.

Zugleich ist die von den logarithmischen Spiralen gebildete Fläche die allgemeinste Fläche, die alle von O ausgehenden Strahlen unter dem konstanten Winkel trifft. Auf ihr sind die Spiralen Krümmungslinien. Die andere Schar von Krümmungslinien besteht aus denjenigen Kurven, in denen die Fläche von den konzentrischen Kugeln getroffen wird.

§ 4. Raumkurven, die ihre Radienvektoren unter konstantem Winkel schneiden.

Wir wurden soeben zu denjenigen Kurven im Raume geführt, die ihre von einem festen Punkte *O* ausgehenden Radienvektoren unter einem konstanten Winkel treffen. In betreff dieser Kurven, die man gelegentlich weniger glücklich als konische

1) Vgl. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, IV, Paris 1896, S. 266.

Schraubenlinien bezeichnet hat, macht Herr E. Cesàro in seinen sonst vortrefflichen *Vorlesungen über natürliche Geometrie,* deutsch von Kowalewski, Leipzig 1901, S. 184, einige Bemerkungen, denen ich nicht zustimmen kann. Es handelt sich um die Frage, welche Kurven der soeben bezeichneten Art zugleich Schraubenlinien im gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. auf Cylindern sind. Ist P ein Punkt einer solchen Kurve, g diejenige Gerade durch O, die der Richtung des Cylinders parallel ist, so soll die Kurve also die Eigenschaft haben, daß erstens die Tangente t in P mit OP einen konstanten Winkel ε und zweitens mit der Parallelen h durch P zu g einen konstanten Winkel δ bildet. Um alle derartigen Kurven zu finden, verfahren wir so: Wir legen durch P und g die Ebene $\mathfrak{E}$ und projizieren die Tangente t senkrecht auf $\mathfrak{E}$. Es sei t' die Projektion. Alsdann erkennt man sofort, da $\sphericalangle(OP, t) = \varepsilon$, $\sphericalangle(h, t) = \delta$ sein soll, daß

$$\cos(OP, t') : \cos(h, t') = \cos\varepsilon : \cos\delta$$

ist. Nun aber gilt in der Ebene $\mathfrak{E}$ der aus den Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte leicht zu beweisende Satz: Konstruiert man in der Ebene $\mathfrak{E}$ alle Kegelschnitte mit dem einen Brennpunkt O, mit der Geraden g durch O als Achse und mit der Exzentrizität $\cos\varepsilon : \cos\delta$, so hat in jedem Punkte P der Ebene gerade die Tangente t' des hindurchgehenden Kegelschnittes die in obiger Proportion ausgesprochene Eigenschaft, wobei wir nur daran erinnern, daß h die Parallele zu g durch P bedeutet. Da nun t' die Projektion der Tangente t der gesuchten Kurve auf die Ebene $\mathfrak{E}$ durch P und g ist, so folgt, daß die gesuchte Kurve in jedem ihrer Punkte P eine Rotationsfläche zweiter Ordnung berührt und zwar diejenige, die aus dem durch P gehenden Kegelschnitt durch Drehen um die Achse g hervorgeht.

Konstruieren wir also alle Rotationsflächen um g, deren Meridiane die Kegelschnitte mit O als einem Brennpunkt, mit g als Achse und mit der Exzentrizität $\cos\varepsilon : \cos\delta$ sind, so folgt, daß die gesuchten Kurven in allen ihren Punkten solche Flächen berühren müssen und daher jede von ihnen auf einer der Rotationsflächen liegt.

Umgekehrt erhellt alsdann leicht: Wenn man auf einer dieser Rotationsflächen eine Kurve konstruiert, deren Tangenten mit den Parallelen zur Achse g einen konstanten Winkel δ bilden, d. h. also, wenn man auf der Fläche eine Schraubenlinie kon-

struiert, deren Cylinder der Achse parallel ist und die alle Mantellinien des Cylinders unter dem Winkel δ durchsetzt, so bildet die Kurve mit den von O ausgehenden Radienvektoren einen konstanten Winkel ε.

Zugleich folgt ohne weiteres, daß diese Kurve auch alle vom zweiten Brennpunkt U des Meridians ausgehenden Radienvektoren unter demselben konstanten Winkel ε trifft.

Wir finden also:

Diejenigen Kurven, die erstens mit ihren von einem festen Punkte P ausgehenden Radienvektoren einen konstanten Winkel bilden und zweitens Schraubenlinien sind, liegen auf Rotationsflächen zweiter Ordnung. Läßt man nämlich einen Kegelschnitt, der O zum einen Brennpunkt hat, um seine durch O gehende Achse g rotieren und konstruiert man auf der Rotationsfläche eine Schraubenlinie, deren Cylinder der Achse g parallel ist und von der die Mantellinien des Cylinders unter einem konstanten Winkel ε geschnitten werden, so bilden sowohl die von O als auch die vom zweiten Brennpunkt U des Kegelschnittes ausgehenden Radienvektoren der Kurve längs der Kurven einen konstanten Winkel δ mit den Tangenten. Dabei ist:

$$\cos \varepsilon : \cos \delta = e,$$

wenn e die Exzentrizität des Kegelschnittes bedeutet.

Man kann also sagen, *daß jede der gesuchten Kurven auf drei Kegeln liegt und die Mantellinien jedes dieser Kegel unter einem konstanten Winkel schneidet.* O und U sind die Spitzen zweier der Kegel und der dritte Kegel ist ein Cylinder parallel OU.

Artet die Rotationsfläche in einen Rotationskegel aus, so ergeben sich die sogenannten *cylindro-konischen Schraubenlinien*, die vielfach untersucht worden sind. *Die cylindro-konischen Schraubenlinien sind also nur ein spezieller Fall der gesuchten Kurven*, und demnach kann ich Herrn Cesàro nicht zustimmen, der eben nur diese speziellen Kurven hat. Auch seine Bemerkung, daß auf den Kurven der Krümmungsradius der Bogenlänge proportional ist, gilt nur für den speziellen Fall, nicht für die auf allgemeinen Rotationsflächen zweiter Ordnung gefundenen Kurven.

Einige andere Betrachtungen über Loxodromen und verwandte Kurven, die sich hieran anschließen, behalte ich mir für eine spätere Gelegenheit vor.

Darmstadt, Okt. 1902.

Druckfertig erklärt 2. XII. 1902.]

Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes.

Von

GERHARD KOWALEWSKI.

In der vorliegenden Arbeit[1]) handelt es sich um eine Gruppe, die aus der Invariantentheorie der binären Formen wohlbekannt ist. Sie besteht aus allen projektiven Transformationen des R_n, welche eine sogenannte Normkurve in sich überführen, d. h. eine rationale Kurve n-ter Ordnung, die in keiner ebenen Punktmannigfaltigkeit des R_n enthalten ist. Ich liefere eine vollständige Erledigung der Aufgabe, alle projektiven Gruppen[2]) des R_n $(n > 1)$ zu bestimmen, denen die bezeichnete Gruppe als Untergruppe angehört. Dabei stellt sich eine merkwürdige Eigenschaft des R_6 heraus. Im R_6 nämlich steckt die Gruppe einer Normkurve in *zwei* projektiven Gruppen, die von der allgemeinen projektiven Gruppe verschieden sind, in jedem andern Raume dagegen nur in *einer* solchen Gruppe und in der Ebene sogar in *keiner*.[3])

Die im folgenden angewandte Methode habe ich zum ersten Male in meiner Habilitationsschrift[4]) benutzt. Sie beruht auf

---

1) Die Resultate meiner Untersuchung habe ich im September dieses Jahres auf der Naturforscherversammlung in Karlsbad mitgeteilt.

2) Es handelt sich in der ganzen Arbeit nur um kontinuierliche Gruppen im Sinne LIES.

3) Für die Ebene ist unser Problem durch einen Satz von LIE erledigt. Vgl. LIE-ENGEL, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III, S. 357.

4) Diese Berichte, 1899, S. 69—144. Vgl. besonders S. 120.

einer Verallgemeinerung eines Gedankens von LIE, die ich einer Anregung des Herrn ENGEL verdanke.

1. Klassifikation der infinitesimalen Transformationen einer projektiven Gruppe nach dem Gewicht.

Es seien $x_0, x_1, \cdots, x_n$ homogene Punktkoordinaten im R_n. Wir denken uns die infinitesimalen Transformationen einer projektiven Gruppe G dieses Raumes homogen, also in der Form $\sum a_{ik} x_k p_i$ geschrieben und fügen noch

$$Uf = x_0 p_0 + x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$$

hinzu. Kommt in G eine infinitesimale Transformation

$$Vf = a_0 x_0 p_0 + a_1 x_1 p_1 + \cdots + a_n x_n p_n$$

vor, wo die Konstanten a nicht alle denselben Wert haben, so können wir in folgender Weise zu einer Klassifikation der infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe nach dem Gewicht gelangen.[1]) Wir legen x_i das Gewicht a_i und p_i das Gewicht $-a_i$ bei $(i = 0, 1, \cdots, n)$. Das Gewicht eines Produktes von Faktoren x, p ist gleich der Summe ihrer Gewichte, und eine infinitesimale Transformation $\sum a_{ik} x_k p_i$ heißt isobar und vom Gewicht g, wenn $\sum a_{ik} x_k p_i$ als Funktion der x, p isobar und vom Gewicht g ist. Bezeichnen wir nun mit Xf eine infinitesimale Transformation von G, die nicht isobar ist, so können wir sie in isobare Summanden von verschiedenem Gewicht zerlegen:

$$Xf = X_{g_1} f + X_{g_2} f + \cdots + X_{g_m} f.$$

Dabei soll $X_g f$ das Gewicht g haben. Man erkennt leicht, daß $(VX_g) = g X_g f$ ist, und findet dann durch Bildung der Klammerausdrücke (VX), $\big(V(VX)\big)$ u. s. w., daß

$$g_1^\lambda X_{g_1} f + g_2^\lambda X_{g_2} f + \cdots + g_m^\lambda X_{g_m} f$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ eine infinitesimale Transformation von G ist. Daraus folgt, weil die g alle verschieden sind, daß $X_{g_1} f$, $X_{g_2} f$, $\cdots$, $X_{g_m} f$ selbständig in G vorkommen. Wir können uns also

1) Die folgenden Betrachtungen lassen sich bei jeder nichtintegrablen projektiven Gruppe anwenden, da jede derartige Gruppe sich auf eine solche Form bringen läßt, daß sie eine infinitesimale Transformation Vf enthält.

auf die Betrachtung von isobaren infinitesimalen Transformationen der Gruppe beschränken, die sich dann nach dem Gewicht klassifizieren lassen. Wird mit zweien on ihnen, deren Gewichte g und g' sein mögen, der Klammerausdruck gebildet, so ergibt sich eine infinitesimale Transformation von G mit dem Gewicht $g + g'$. Sie kann aber auch identisch verschwinden, und das wird z. B. immer der Fall sein müssen, wenn $g + g'$ größer ist als das in G vorkommende Maximalgewicht oder kleiner als das Minimalgewicht.

Enthält G noch andere infinitesimale Transformationen von derselben Form wie Vf, so gibt jede von ihnen Veranlassung zu einer Belegung der x, p mit Gewichten. Man braucht dann nur solche infinitesimalen Transformationen von G zu betrachten, die bei einer jeden von diesen Belegungen isobar sind. Im folgenden werden wir die Belegungen, welche den infinitesimalen Transformationen $\sum a_\nu x_\nu p_\nu$, $\sum b_\nu x_\nu p_\nu$, $\cdots$ entsprechen, immer kurz als die Belegungen (a), (b), $\cdots$ bezeichnen.

II. Allgemeines über die umfassenden projektiven Gruppen der Gruppe einer Normkurve.

Die Gruppe einer Normkurve im R_n kann man auf folgende Form bringen:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_{-1} f = x_0 p_1 + 2 x_1 p_2 + \cdots + n x_{n-1} p_n, \\ X_1 \quad f = n x_1 p_0 + (n-1) x_2 p_1 + \cdots + x_n p_{n-1}, \\ V \quad f = x_1 p_1 + 2 x_2 p_2 + \cdots + n x_n p_n, \\ \overline{V} \quad f = n x_0 p_0 + (n-1) x_1 p_1 + \cdots + x_{n-1} p_{n-1}. \end{cases}$$

$Vf + \overline{V}f = n\,Uf$ läßt alle Punkte des R_n in Ruhe.

Wir denken uns eine die Gruppe (1) umfassende projektive Gruppe G. G soll also (1) als Untergruppe enthalten. Mit Rücksicht darauf, daß in G die infinitesimale Transformation Vf vorkommt, erteilen wir x_i das Gewicht i, p_i das Gewicht $-i$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ und brauchen dann nur isobare infinitesimale Transformationen von G in Betracht zu ziehen. Jede solche hat ein bestimmtes Gewicht, und das in G vorkommende Maximalgewicht sei gleich k.

Wäre $k = 1$ und gleichzeitig das in G auftretende Minimalgewicht k' kleiner als -1, so würde es genügen die Indices

$0, 1, \cdots, n$ der x, p der Reihe nach durch $n, n-1, \cdots, 0$ zu ersetzen, um auf den Fall $k > 1$ zu kommen.[1]) Nehmen wir daher an $k = 1$, $k' = -1$ und sei Xf eine in G vorkommende infinitesimale Transformation vom Gewicht 1. Dann muß, weil 1 das Maximalgewicht ist, $(XX_1) = 0$ sein. Daraus folgt aber leicht, daß Xf bis auf einen konstanten Faktor mit $X_1 f$ identisch ist. Ebenso unterscheidet sich wegen $k' = -1$ eine infinitesimale Transformation von G, welche das Gewicht -1 hat, von $X_{-1} f$ nur um einen konstanten Faktor. Ist endlich

$$a_0 x_0 p_0 + a_1 x_1 p_1 + \cdots + a_n x_n p_n$$

eine infinitesimale Transformation vom Gewicht 0, die in G vorkommt, so muß $X_1 f$ auch bei der Belegung (a) isobar sein. Sonst würde sich nämlich $X_1 f$ in wenigstens zwei Summanden zerlegen, deren jeder eine infinitesimale Transformation von G wäre, was aber gerade ausgeschlossen ist. Es muß daher sein

$$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} = c,$$

das heißt

$$a_0 x_0 p_0 + a_1 x_1 p_1 + \cdots + a_n x_n p_n = a_0 Uf + cVf.$$

Wir erkennen also, daß G mit (1) zusammenfällt. Sehen wir von diesem trivialen Falle ab, so *dürfen wir* also *immer die Annahme machen, das Maximalgewicht k sei größer als 1.*

Ist nun

$$Mf = c_0 x_k p_0 + c_1 x_{k+1} p_1 + \cdots + c_{n-k} x_n p_{n-k}$$

eine infinitesimale Transformation von G, welche dieses Maximalgewicht hat, so muß $(MX_1) = 0$ sein. Daraus ergibt sich aber (abgesehen von einem konstanten Faktor)

$$Mf = \sum_0^{n-k} \frac{\binom{n-k}{\varrho}}{\binom{n}{\varrho}} x_{k+\varrho} p_\varrho. \tag{2}$$

Es ist also in G nur diese eine infinitesimale Transformation vom Gewicht k vorhanden.

Da in G auch $X_{-1} f$ vorkommt, so enthält G alle diejenigen infinitesimalen Transformationen, welche durch wiederholtes Kombinieren von Mf mit $X_{-1} f$ entstehen, also $(X_{-1} M)$

1) Wir begnügen uns mit dieser Reduktion auf den Fall $k > 1$ anstatt zu zeigen, daß immer $k + k' = 0$ sein muß.

$\left(X_{-1}(X_{-1}M)\right)$ u. s. w. Wir wollen nun, wenn Zf irgend eine infinitesimale Transformation von der Form $\sum a_{ik}\, x_k\, p_i$ ist, $(X_{-1}Z)$ kurz mit δZf bezeichnen und $\delta^\nu Zf$ durch die Rekursionsformel

$$\delta^\nu Zf = \delta\,(\delta^{\nu-1}Zf)$$

definieren. Das Zeichen δ darf wie ein Variationszeichen behandelt werden, wenn man übereinkommt zu setzen

$$\delta x_0 = 0, \quad \delta x_i = i x_{i-1} \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$\delta p_n = 0, \quad \delta p_i = -(i+1)\,p_{i+1} \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

Man bestätigt in der Tat leicht, daß

$$\delta\,(x_\varrho p_\sigma) = (X_{-1}f,\ x_\varrho p_\sigma) = x_\varrho\,\delta p_\sigma + p_\sigma\,\delta x_\varrho$$

ist. Bei den später durchzuführenden Rechnungen ist sehr nützlich die folgende leicht beweisbare Formel

$$(3) \qquad \delta^i(x_\varrho p_\sigma) = \sum \binom{i}{\nu}\,\delta^{i-\nu}x_\varrho\,\delta^\nu p_\sigma.$$

Die rechts auftretenden Operationen $\delta^\nu\,(\nu=2,3,\cdots)$ sind wieder durch die Rekursionsformel $\delta^\nu = \delta\,(\delta^{\nu-1})$ definiert, wobei $\delta\,(0)=0$ sein soll.

Wenn wir nun Mf mit $X_{-1}f$ kombinieren oder Mf *deltaieren,* wie wir es kurz nennen wollen, so kommt

$$\delta Mf = \sum_0^{n-k} \frac{\binom{n-k}{\varrho}}{\binom{n}{\varrho}}\,(k+\varrho)\,x_{k+\varrho-1}\,p_\varrho$$
$$-\sum_0^{n-k} \frac{\binom{n-k}{\varrho}}{\binom{n}{\varrho}}\,(\varrho+1)\,x_{k+\varrho}p_{\varrho+1}.$$

Dies ist wieder eine infinitesimale Transformation von G, und wir dürfen daher behaupten, daß G auch die infinitesimale Transformation $(Mf,\ \delta Mf)$ enthält. Dieselbe hat, wenn wir $2k-1 \leqq n$ annehmen, das Gewicht $2k-1$, und der Koeffizient von $x_{2k-1}p_0$ wird $\dfrac{2k\binom{n-k}{k-1}}{\binom{n}{k}} \gtrless 0$, so daß $(Mf,\ \delta Mf)$ nicht identisch verschwindet. Da nun aber $k>1$ und daher $2k-1 = k+(k-1) > k$ ist, so steht dieses Resultat im Wider-

spruch damit, daß k das Maximalgewicht sein sollte. Es muß also $2k-1>n$ oder $2k>n+1$ sein.

III. Das Maximalgewicht in G bei ungeradem n.

Wir haben gesehen, daß das in der Gruppe G vorkommende Maximalgewicht die Bedingung $2k>n+1$ erfüllen muß. Wenn wir nun Mf $(2k-n)$-mal deltaieren, so ergibt sich

$$\frac{n!}{(k!)^2}\,\delta^{2k-n}Mf=\binom{n}{k}x_{n-k}p_0+\cdots+(-1)^n x_n p_k,$$

wobei wir auf der rechten Seite nur die Glieder mit p_0 und p_k hingeschrieben haben. Kombinieren wir diese infinitesimale Transformation mit Mf, so kommt

$$\left(1+(-1)^{n+1}\right)x_n p_0.$$

Wenn n ungerade ist, so kommt also in G sicher die infinitesimale Transformation $x_n p_0$ vor, d. h. das Maximalgewicht ist gleich n.

IV. Das Maximalgewicht in G bei geradem n.

Bei geradem n ist, wie wir jetzt zeigen wollen, das Maximalgewicht in G entweder gleich n oder gleich $n-1$. Der Beweis dieses Satzes gelingt dadurch, daß wir bei Verfolgung der Annahme $k<n-1$ auf einen Widerspruch kommen.

In G kommt die infinitesimale Transformation $\delta^{2k-n+1}Mf$ vor, und man findet unter Benutzung der Formel (3)

$$\begin{aligned}\frac{n!\,n}{(k!)^2}\,\delta^{2k-n+1}Mf=\;&n(k+1)\binom{n}{k+1}x_{n-k-1}p_0\\&+\binom{n}{k}\left[(k+1)(n-k)-n(2k-n+1)\right]x_{n-k}p_1\\&+\cdots-n\left[(k+1)(n-k)-n(2k-n+1)\right]x_{n-1}p_k\\&-n(k+1)x_n p_{k+1},\end{aligned}$$

wenn man nur die Glieder mit p_0, p_1, p_k, p_{k+1} hinschreibt. G muß nun auch die infinitesimale Transformation enthalten, welche sich durch Kombination der vorstehenden mit Mf ergibt, also die folgende

$$\left[n(n+1)-2k(k+1)\right](n x_{n-1}p_0+x_n p_1).$$

Da wir aber $k < n-1$ annehmen, so muß zwischen n und k die Relation bestehen

$$n(n+1) = 2k(k+1), \tag{4}$$

damit jene infinitesimale Transformation vom Gewicht $n-1$ identisch verschwindet.

Man überzeugt sich leicht, daß unmöglich $k = n-2$ sein kann, Denn in diesem Falle wäre nach (4)

$$n(n+1) = 2(n-2)(n-1), \text{ d h. } n^2 - 7n + 4 = 0,$$

was für keinen ganzzahligen Wert von n zutrifft. Ebensowenig kann $k = n-3$ sein. Sonst erhielten wir aus (4)

$$n(n+1) = 2(n-3)(n-2), \text{ d. h. } n^2 - 11n + 12 = 0,$$

eine Gleichung, die durch keine ganze Zahl n befriedigt wird. Wir müssen also annehmen $k < n-3$. Bilden wir jetzt aber $\delta^{2k-n+3} Mf$, so ergibt sich mit Hilfe der Formel (3)

$$\frac{n!}{k!\,(k+1)!}\,\delta^{2k-n+3} Mf = \cdots$$

$$+ \binom{n}{k+1}\Big[(2k-n+3)(2k-n+2) - 2\frac{n-k}{n}(2k-n+3)(k+1)$$

$$+ \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}(k+1)(k+2)\Big]\, x_{n-k-1}\, p_2 + \cdots$$

$$+ (k+2)\Big[n(2k-n+3) - (n-k)(k+1)\Big]\, x_{n-1}\, p_{k+2} + \cdots,$$

wobei wir nur die Glieder mit p_2 und p_{k+2} aufgeschrieben haben. Kombinieren wir diese infinitesimale Transformation mit Mf, so wird der Koeffizient von $x_{n-1}\, p_2$ abgesehen von dem Faktor $\frac{n-k}{n(n-1)}$ lauten

$$\begin{aligned} &n(n-1)(2k-n+3)(2k-n+2) \\ &\quad - 2(n-1)(2k-n+3)(n-k)(k+1) \\ &\quad + 2(n-k)(n-k-1)(k+1)(k+2) \\ &\quad - n(2k-n+3)(n-k-1)(k+2) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(n-1)(2k-n+3)\big(2k(k+1) - n^2\big) \\ &\quad + (n-k-1)(k+2)\big(n^2 - n - 2k(k+1)\big). \end{aligned}$$

Benutzen wir nun die Relation (4), so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$n(2k^2 + 4k + 1 - n^2).$$

Da n eine gerade Zahl sein soll, so kann der zweite Faktor nicht verschwinden, d. h. die von uns hergestellte infinitesimale Transformation von G ist nicht identisch null und hat andererseits, wie man sieht, das Gewicht $n-3>k$. Das ist offenbar ein Widerspruch, und wir dürfen also behaupten, daß bei geradem n das Maximalgewicht in G entweder gleich n oder gleich $n-1$ ist.

V. Die umfassenden projektiven Gruppen der Gruppe einer Normkurve in Räumen mit ungerader Dimensionenzahl.

Wir wissen, daß bei ungeradem n die Gruppe G die infinitesimale Transformation $x_n p_0$ enthält. Sie enthält also auch $\delta^n(x_n p_0)$. Nach Formel (3) ist

$$\frac{1}{n!}\,\delta^n(x_n p_0)=\sum_0^n g_\nu x_\nu p_\nu=\sum_0^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x_\nu p_\nu .$$

Offenbar hat man

$$g_{n-\nu}=-g_\nu . \tag{5}$$

Wenn wir die Belegung (g) einführen, so bleibt die infinitesimale Transformation

$$\delta(x_n p_0)=n x_{n-1} p_0 - x_n p_1$$

isobar, weil nach (5) $g_{n-1}-g_0=g_n-g_1$ ist. Betrachten wir dagegen

$$\delta^2(x_n p_0)=n(n-1)\,x_{n-2}p_0-2n x_{n-1}p_1+2x_n p_2 ,$$

so haben wir zwar $g_{n-2}-g_0=g_n-g_2$, aber nicht $g_{n-1}-g_1=g_n-g_2$, weil dann nach (5) sein müßte $2g_1=g_0+g_2$, was nicht zutrifft. $\delta^2(x_n p_0)$ zerfällt also nach Einführung der Belegung (g) in zwei isobare Summanden mit verschiedenem Gewicht, von denen wir dann nach Kapitel I schließen dürfen, daß sie selbständig in G vorkommen. Insbesondere gilt dies von $x_{n-1}p_1$, und G enthält also auch $\delta^{n-2}(x_{n-1}p_1)$. Nun wird aber

$$-\frac{n}{(n-2)!}\,\delta^{n-2}(x_{n-1}p_1)=\sum_0^n g'_\nu x_\nu p_\nu$$

$$=-n(n-1)\sum_0^{n-2}\binom{n-2}{\nu}(-1)^\nu x_{\nu+1}p_{\nu+1},$$

so daß $g'_\nu=\nu(n-\nu)\,g_\nu$ ist und wieder

$$g'_{n-\nu}=-g'_\nu . \tag{5'}$$

Um die beiden Belegungen (g) und (g') in bequemer Weise gleichzeitig zu verwerten, führen wir die Belegung (γ) ein, welche der infinitesimalen Transformation

$$\sum_0^n \gamma_\nu x_\nu p_\nu = \varkappa \sum g_\nu x_\nu p_\nu + \varkappa' \sum g'_\nu x_\nu p_\nu$$

entspricht, wobei wir uns vorbehalten über die Konstanten $\varkappa, \varkappa'$ später in geeigneter Weise zu verfügen. Auch hier gilt die Relation

$$\gamma_{n-\nu} = -\gamma_\nu. \tag{6}$$

Es ist nun für das Folgende wichtig zu beweisen, daß bei passender Wahl der Konstanten $\varkappa, \varkappa'$ die Reihe

$$\gamma_1 - \gamma_0,\ \gamma_2 - \gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_{\frac{n+1}{2}} - \gamma_{\frac{n-1}{2}} \tag{7}$$

aus lauter verschiedenen Zahlen besteht. Dazu genügt es zu zeigen, daß keine der Differenzen

$$(\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu) - (\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu) \quad \left(\mu \gtrless \nu;\ \mu, \nu = 0, 1, \cdots, \tfrac{n-1}{2}\right)$$

identisch, d. h. für alle Werte von $\varkappa$ und $\varkappa'$, verschwindet[1]), daß also die beiden Gleichungen

$$g_{\mu+1} - g_\mu = g_{\nu+1} - g_\nu,\quad g'_{\mu+1} - g'_\mu = g'_{\nu+1} - g'_\nu \tag{8}$$

niemals gleichzeitig erfüllt sein können, wenn μ und ν zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, \frac{n-1}{2}$ sind.

Man findet leicht

$$g_{\nu+1} - g_\nu = (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} \frac{n+1}{\nu+1},$$

$$g'_{\nu+1} - g'_\nu = (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} (n-1)(n-\nu),$$

und die Gleichungen (8) reduzieren sich auf folgende:

$$(-1)^{\mu+1} \binom{n}{\mu} \frac{1}{\mu+1} = (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} \frac{1}{\nu+1},$$

$$(-1)^{\mu+1} \binom{n}{\mu} (n-\mu) = (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} (n-\nu).$$

Daraus folgt, da $\binom{n}{\mu}$ und $\binom{n}{\nu}$ nicht verschwinden,

---

1) Dann lassen sich nämlich $\varkappa$ und $\varkappa'$ sogar ganzzahlig derart bestimmen, daß alle jene Differenzen von Null verschieden sind.

$$(n-\mu)(\mu+1)-(n-\nu)(\nu+1)=(\mu-\nu)(n-\mu-\nu-1)=0,$$

d. h. $n-1=\mu+\nu$.

μ, ν sollen aber zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, \frac{n-1}{2}$ sein. Ihre Summe ist also höchstens gleich $n-2$.

Denken wir uns nun x und x' so gewählt, daß die Reihe (7) aus lauter verschiedenen Zahlen besteht, und betrachten wir die infinitesimale Transformation

$$\frac{1}{n!}\,\delta^{n-1}(x_n p_0)=\sum_0^{n-1}(-1)^\nu\binom{n-1}{\nu}\frac{x_{\nu+1}p_\nu}{\nu+1},$$

die sicher in G vorkommt. Setzen wir zur Abkürzung

$$Y_\nu f=\frac{x_{\nu+1}p_\nu}{\nu+1}+\frac{x_{n-\nu}p_{n-\nu-1}}{n-\nu}\quad\left(\nu=0,1,\cdots,\frac{n-1}{2}\right),$$

so können wir schreiben

$$(9)\quad \frac{1}{n!}\,\delta^{n-1}(x_n p_0)=\sum_0^{\frac{n-3}{2}}(-1)^\nu\binom{n-1}{\nu}Y_\nu f+\tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}Y_{\frac{n-1}{2}}f.$$

Aus (6) geht hervor, das $Y_\nu f$ bei der Belegung (γ) isobar ist. Die Gewichte von $Y_0 f, Y_1 f, \cdots, Y_{\frac{n-1}{2}}$ sind gerade die Zahlen (7), von denen keine zwei gleich sind. Wir können also schließen, daß die Yf alle selbständig in G vorkommen.[1]) Dann enthält G aber auch die infinitesimalen Transformationen

$$\delta Y_\nu f=(x_\nu p_\nu-x_{n-\nu}p_{n-\nu})-(x_{\nu+1}p_{\nu+1}-x_{n-\nu-1}p_{n-\nu-1})\quad\left(\nu=0,1,\cdots,\frac{n-3}{2}\right)$$

und

$$\tfrac{1}{2}\,\delta Y_{\frac{n-1}{2}}f=x_{\frac{n-1}{2}}p_{\frac{n-1}{2}}-x_{\frac{n+1}{2}}p_{\frac{n+1}{2}},$$

also überhaupt alle infinitesimalen Transformationen

$$(10)\qquad x_\nu p_\nu-x_{n-\nu}p_{n-\nu}\qquad\left(\nu=0,1,\cdots,\frac{n-1}{2}\right).$$

1) Dabei ist es wesentlich, daß die Koeffizienten, mit denen die Yf in der Formel (9) behaftet sind, sämtlich von Null verschieden sind.

Die infinitesimale Transformation $\sum_0^n \mathfrak{g}_\nu x_\nu p_\nu$ kommt hiernach in G vor, sobald die Relationen

$$(11)\quad \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_n = 0,\ \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{n-1} = 0,\ \cdots,\ \mathfrak{g}_{\frac{n-1}{2}} + \mathfrak{g}_{\frac{n+1}{2}} = 0$$

erfüllt sind. Bilden wir nun unter der Annahme $0 < i < n$ die folgende infinitesimale Transformation von G:

$$\frac{1}{n!}\,\delta^i (x_n p_0) = \sum_0^i \binom{i}{\nu} \frac{(-1)^\nu \nu!}{(n-i+\nu)!}\, x_{n-i+\nu} p_\nu,$$

so sehen wir zunächst, daß auf der rechten Seite alle Koeffizienten von Null verschieden sind. Das Gewicht des $(\nu+1)$-ten Gliedes der obigen Summe ist, wenn wir die Belegung $(\mathfrak{g})$ zu Grunde legen, $\mathfrak{g}_{n-i+\nu} - \mathfrak{g}_\nu$. Es ändert sich nach (11) nicht, wenn man ν durch $i-\nu$ ersetzt. Fassen wir die Glieder gleichen Gewichts zusammen, so können wir schreiben

$$\frac{1}{n!}\,\delta^i (x_n p_0) = \sum_0^{\left[\frac{i}{2}\right]} Z_\nu f,$$

wobei $Z_\nu f$ das Gewicht $\mathfrak{g}_{n-i+\nu} - \mathfrak{g}_\nu$ hat und $\left[\frac{i}{2}\right]$ das größte Ganze von $\frac{i}{2}$ bedeutet. Es ist leicht zu erkennen, daß sich die Konstanten $\mathfrak{g}$ unbeschadet der Relationen (11) so wählen lassen, daß alle Zf verschiedene Gewichte haben. Wäre nämlich infolge von (11)

$$\mathfrak{g}_{n-i+\mu} - \mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}_{n-i+\nu} - \mathfrak{g}_\nu,$$

während μ und ν zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, \left[\frac{i}{2}\right]$ sind, so müßte für passend gewählte Werte der λ folgende Identität bestehen:

$$\mathfrak{g}_{n-i+\mu} - \mathfrak{g}_\mu - \mathfrak{g}_{n-i+\nu} + \mathfrak{g}_\nu = \sum_0^{\frac{n-1}{2}} \lambda_j (\mathfrak{g}_j + \mathfrak{g}_{n-j}).$$

Dazu würde aber, wenn etwa $\mu < \nu$ ist, nötig sein $\lambda_\mu = -1$, und auf der linken Seite müßte das Glied $-\mathfrak{g}_{n-\mu}$ vorkommen, was nicht der Fall ist, weil unmöglich $n - i + \nu = n - \mu$, d. h. $\mu + \nu = i$ sein kann. Da also keiner der Ausdrücke

$g_{n-i+\mu} - g_\mu - g_{n-i+\nu} + g_\nu$ identisch verschwindet, wenn man ihn mit Hilfe der Relationen (11) in einen Ausdruck in $g_0, g_1, \cdots g_{\frac{n-1}{2}}$ verwandelt, so ist es möglich, den letztgenannten Größen solche Werte beizulegen, daß keiner der Ausdrücke den Wert Null hat. Dann haben aber die $\left[\frac{i}{2}\right] + 1$ Summanden von $\frac{1}{n!}\,\delta^i\,(x_n\,p_0)$ lauter verschiedene Gewichte und kommen daher alle selbständig in G vor.

Lassen wir i die Wertreihe $1, 2, \cdots, n-1$ durchlaufen, so haben wir, wenn wir noch $x_n\,p_0$ mitzählen $n + \sum_1^{n-1} \left[\frac{i}{2}\right]$ $= n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ infinitesimale Transformationen von G, die nach der ursprünglichen Festsetzung der Gewichte (Gewicht von x_i gleich i, Gewicht von p_i gleich $-i$) von positivem Gewicht sind. Da in G auch $\delta^{2n}\,(x_n p_0)$ vorkommt, welches bis auf einen nicht verschwindenden Faktor gleich $x_0 p_n$ ist, so ist leicht einzusehen, daß in G ebenso viele infinitesimale Transformationen von negativem Gewicht vorhanden sein müssen. Ersetzt man nämlich die Indices $0, 1, \cdots, n$ der x, p bezüglich durch $n, n-1, \cdots, 0$, so geht $x_0\,p_n$ in $x_n\,p_0$ über, während die Gruppe der Normkurve, wie man durch den Anblick von (1) erkennt, ungeändert bleibt, und wir können demnach alle bisher ausgeführten Schlüsse wiederholen. Die $n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ infinitesimalen Transformationen von positivem Gewicht, welche wir dabei finden würden, verwandeln sich, wenn man jene Vertauschung der Indices wieder rückgängig macht, in ebenso viele mit negativem Gewicht. Beachten wir endlich, daß wir vorhin die $\frac{n+1}{2}$ infinitesimalen Transformationen (10) in G nachgewiesen haben, so kennen wir (abgesehen von Uf) bis jetzt

$$2n + \tfrac{1}{2}\,(n-1)^2 + \frac{n+1}{2} = \tfrac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2)$$

infinitesimale Transformationen von G. Nun lassen die infinitesimalen Transformationen (1) und auch $x_n p_0$ das durch die Gleichung

$$\sum_0^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu}\, x_\nu\, y_{n-\nu} = 0$$

dargestellte Nullsystem invariant, und wenn wir uns erinnern, daß alle unsere Operationen zur Herleitung neuer infinitesimaler Transformationen von G im Grunde nur Klammeroperationen waren, so dürfen wir den Schluß ziehen, daß die oben genannten $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ infinitesimalen Transformationen von G die projektive Gruppe dieses Nullsystems bilden, welche ja gerade $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$-gliedrig ist. Da diese Gruppe in keiner größeren Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe steckt, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Theorem 1. *In einem Raume von ungerader Dimensionenzahl $n\,(>1)$ steckt die Gruppe einer Normkurve abgesehen von der allgemeinen projektiven Gruppe nur noch in einer projektiven Gruppe, nämlich in der $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$-gliedrigen projektiven Gruppe eines Nullsystems.*

VI. Die umfassenden projektiven Gruppen der Gruppe einer Normkurve in Räumen mit gerader Dimensionenzahl.

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Maximalgewicht gleich n oder gleich $n-1$ ist.

Erster Fall: Das Maximalgewicht ist gleich n. In der Gruppe G kommt $x_n p_0$, also auch

$$\frac{1}{n!}\,\delta^n(x_n p_0) = \sum_0^n g_\nu x_\nu p_\nu = \sum_0^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x_\nu p_\nu$$

vor. Da n gerade ist, so haben wir diesmal $g_{n-\nu} = g_\nu$. Die in G vorkommende infinitesimale Transformation

$$\delta(x_n p_0) = n x_{n-1} p_0 - x_n p_1$$

ist bei der Belegung (g) nicht mehr isobar. In der Tat ist

$$g_{n-1} - g_0 = g_1 - g_n \neq g_n - g_1,$$

da $g_n - g_1 = 1 + n$ von Null verschieden ist. In G kommt also auch $x_{n-1} p_0$ vor, und dasselbe gilt von

$$\frac{n}{(n-1)!}\,\delta^{n-1}(x_{n-1} p_0) = \sum_0^n g'_\nu x_\nu p_\nu = n \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{\nu} (-1)^\nu x_\nu p_\nu.$$

Hiernach haben wir $g'_\nu = (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)$. Ferner ist

$$g_{\nu+1} - g_\nu = (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} \frac{n+1}{\nu+1}, \quad g'_{\nu+1} - g'_\nu = (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} \frac{n(n-\nu)}{\nu+1}.$$

Die Gleichungen

$$g_{\mu+1} - g_\mu = g_{\nu+1} - g_\nu, \quad g'_{\mu+1} - g'_\mu = g'_{\nu+1} - g'_\nu,$$

in denen μ und ν zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, n$ bedeuten, reduzieren sich also auf

$$(-1)^{\mu+1}\binom{n}{\mu}\frac{1}{\mu+1} = (-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}\frac{1}{\nu+1},$$

$$(-1)^{\mu+1}\binom{n}{\mu}\frac{n-\mu}{\mu+1} = (-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}\frac{n-1}{\nu+1},$$

woraus $\mu = \nu$ folgen würde gegen die Voraussetzung. Setzen wir daher $\gamma_\nu = \varkappa g_\nu + \varkappa' g'_\nu$, so lassen sich die Konstanten $\varkappa$, $\varkappa'$ so wählen, daß die Zahlen $\gamma_1 - \gamma_0$, $\gamma_2 - \gamma_1$, $\cdots$, $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ sämtlich verschieden sind.

Bei der Belegung (γ) haben also alle Glieder von

$$\frac{1}{n!}\,\delta^{n-1}(x_n p_0) = \sum_0^{n-1}(-1)^\nu\binom{n-1}{\nu}\frac{x_{\nu+1}p_\nu}{\nu+1}$$

verschiedene Gewichte. Daraus folgt, da die Koeffizienten alle von Null verschieden sind, daß in G die infinitesimalen Transformationen $x_{\nu+1}p_\nu$ einzeln vorkommen, mithin auch die folgenden

$$\frac{1}{\nu+1}\,\delta(x_{\nu+1}p_\nu) = x_\nu p_\nu - x_{\nu+1}p_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n-1).$$

G enthält also auch die infinitesimalen Transformationen $x_\nu p_\nu - x_n p_n$, deren Summe $U - n x_n p_n$ uns zeigt, daß in G auch $x_n p_n$, folglich überhaupt jedes $x_\nu p_\nu$ vorkommt. Nun ist sofort einzusehen, daß die $i+1$ Glieder von $\delta^i(x_n p_0)$, welche unter der Annahme $0 < i < n$ mit lauter nicht verschwindenden Koeffizienten behaftet sind, selbständig in G vorkommen. G enthält also überhaupt alle infinitesimalen Transformationen $x_\varrho p_\sigma$ $(\varrho \geqq \sigma)$. Beachtet man endlich, daß $\delta^{2n}(x_n p_0)$ abgesehen von einem nicht verschwindenden Faktor gleich $x_0 p_n$ ist und ebenfalls in G vorkommt, so ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß G mit der allgemeinen projektiven Gruppe des R_n identisch ist.

Zweiter Fall: Das Maximalgewicht ist gleich $n-1$.[1]) Die Gruppe G enthält, wie wir wissen, nur eine infinitesimale Trans-

---

1) Da wir das Maximalgewicht größer als 1 voraussetzen dürfen, so ist $n-1 > 1$, also $n \geqq 4$.

formation, welche das Maximalgewicht hat. Dieselbe läßt sich nach Formel (2) schreiben

$$Mf = n x_{n-1} p_0 + x_n p_1.$$

In G kommt nun auch vor

$$\frac{1}{(n-1)!}\,\delta^{n-1} Mf = n \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{\nu} (-1)^\nu x_\nu p_\nu + n \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{\nu} (-1)^\nu x_{\nu+1} p_{\nu+1} = \sum_0^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-2\nu)\, x_\nu p_\nu.$$

Wir setzen diese infinitesimale Transformation gleich $\sum g_\nu x_\nu p_\nu$, so daß $g_\nu = (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-2\nu)$ ist, und führen die Belegung (g) ein. Wir notieren hier noch die Relation $g_{n-\nu} = -g_\nu$.

Die infinitesimale Transformation

$$\delta Mf = n(n-1)\, x_{n-2} p_0 - 2 x_n p_2$$

bleibt bei der Belegung (g) isobar, da $g_{n-2} - g_0 = g_n - g_2$ ist. Betrachten wir dagegen

$$\delta^2 Mf = n(n-1)(n-2)\, x_{n-3} p_0 - n(n-1)\, x_{n-2} p_1 - 2n x_{n-1} p_2 + 6 x_n p_3,$$

so ist das Gewicht des ersten Gliedes gleich dem des letzten, und die beiden andern Glieder haben auch gleiches Gewicht. Aber es ist keineswegs immer

$$g_{n-3} - g_0 = g_{n-2} - g_1, \text{ d. h. } g_0 + g_3 = g_1 + g_2.$$

Denn dann müßte man haben, weil $g_\nu = (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-2\nu)$ ist,

$$n - \tfrac{1}{6} n(n-1)(n-2)(n-6) = -n(n-2) + \tfrac{1}{2} n(n-1)(n-4),$$

d. h. nach Division durch $n(n-1)$

$$6 = n(n-5).$$

Diese Gleichung wird aber nur durch $n = 6$ befriedigt. Diesen Ausnahmefall $n = 6$ werden wir nachher für sich untersuchen

und nehmen daher vorläufig an $n \gtrless 6$. Dann enthält G die beiden infinitesimalen Transformationen

$$\binom{n}{3} x_{n-3} p_0 + x_n p_3, \quad n(n-1)\, x_{n-2} p_1 + 2n x_{n-1} p_2,$$

aus welchen sich $\delta^2 Mf$ zusammensetzt. Es kommt also in G auch die folgende infinitesimale Transformation vor

$$-\frac{1}{(n-3)!}\,\delta^{n-3}\left(n(n-1)\, x_{n-2} p_1 + 2n x_{n-1} p_2\right) = \sum_0^n g'_\nu x_\nu p_\nu.$$

Dabei ist, wie man leicht mit Hilfe der Formel (3) berechnen kann,

$$g'_\nu = (-1)^\nu\, \nu\,(n-\nu)\,(n-2\nu)\binom{n}{\nu}.$$

Man beachte die Relation $g'_{n-\nu} = -g'_\nu$, die sich der oben gefundenen $g_{n-\nu} = -g_\nu$ an die Seite stellt, so daß auch $\gamma_{n-\nu} = -\gamma_\nu$ ist, wenn wir wieder $\gamma_\nu = \varkappa g_\nu + \varkappa' g'_\nu$ setzen und unter $\varkappa$, $\varkappa'$ beliebige Konstanten verstehen.

Es läßt sich nun zeigen, daß bei passender Wahl von $\varkappa$, $\varkappa'$ unter den $\frac{n}{2}$ Werten

$$\gamma_1 - \gamma_0,\ \gamma_2 - \gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_{\frac{n}{2}} - \gamma_{\frac{n}{2}-1}$$

keine zwei gleich sind. Dazu genügt es auch hier wieder zu konstatieren, daß die Gleichungen

$$g_{\mu+1} - g_\mu = g_{\nu+1} - g_\nu, \quad g'_{\mu+1} - g'_\mu = g'_{\nu+1} - g'_\nu$$

nicht zusammen bestehen können, wenn μ und ν zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, \frac{n}{2} - 1$ sind. Man hat aber in der Tat

$$g_{\nu+1} - g_\nu = (-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}\frac{n(n-2\nu-1)}{\nu+1} \text{ und}$$

$$g'_{\nu+1} - g'_\nu = (-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}(n-2)(n-2\nu-1)(n-\nu),$$

so daß sich die obigen Gleichungen auf folgende reduzieren:

$$(-1)^{\mu+1}\binom{n}{\mu}(n-2\mu-1)\cdot\frac{1}{\mu+1} = (-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}(n-2\nu-1)\cdot\frac{1}{\nu+1},$$

$$(-1)^{\mu+1}\binom{n}{\mu}(n-2\mu-1)\cdot(n-\mu) = (-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu}(n-2\nu-1)\cdot(n-\nu).$$

Daraus folgt, da $\binom{n}{\mu}(n-2\mu-1)$ und $\binom{n}{\nu}(n-2\nu-1)$ von Null verschieden sind,

$$(n-\mu)(\mu+1)-(n-\nu)(\nu+1)=(\mu-\nu)(n-\mu-\nu-1)=0.$$

Das ist aber unmöglich, weil die Summe von μ und ν kleiner als $n-2$ ist und μ und ν verschieden sein sollen.

Beachten wir jetzt noch, daß

$$\gamma_{n-\nu}-\gamma_{n-\nu-1}=\gamma_{\nu+1}-\gamma_{\nu}$$

ist, so erkennen wir, daß die in G vorkommende infinitesimale Transformation

$$\frac{1}{(n-2)!}\,\delta^{n-2}\,Mf=\sum_{0}^{n-1}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu+1}(n-2\nu-1)\,x_{\nu+1}p_{\nu},$$

in welcher kein Koeffizient gleich Null ist, sich bei passender Wahl von x und x' in $\frac{n}{2}$ Summanden spaltet, die bei der Belegung (γ) isobar sind, aber lauter verschiedene Gewichte haben. Diese $\frac{n}{2}$ Summanden kommen daher alle selbständig in G vor. Abgesehen von konstanten Faktoren lauten sie

$$Y_{\nu}f=\frac{x_{\nu+1}p_{\nu}}{\nu+1}+\frac{x_{n-\nu}p_{n-\nu-1}}{n-\nu}\quad\left(\nu=0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1\right).$$

G enthält ferner auch die infinitesimalen Transformationen

$$\delta\,Y_{\nu}f=(x_{\nu}p_{\nu}-x_{n-\nu}p_{n-\nu})-(x_{\nu+1}p_{\nu+1}-x_{n-\nu-1}p_{n-\nu-1}),$$

das heißt:

$$(x_0p_0-x_np_n)-(x_1p_1-x_{n-1}p_{n-1}),\ (x_1p_1-x_{n-1}p_{n-1})$$
$$-(x_2p_2-x_{n-2}p_{n-2}),\ \cdots,\ x_{\frac{n}{2}-1}p_{\frac{n}{2}-1}-x_{\frac{n}{2}+1}p_{\frac{n}{2}+1}.$$

Es kommen also in G alle infinitesimalen Transformationen $x_{\nu}p_{\nu}-x_{n-\nu}p_{n-\nu}$ vor, und wir können demgemäß die x mit beliebigen Gewichten $g_0, g_1, \cdots, g_n$ belegen, welche den Bedingungen $g_{n-\nu}=-g_{\nu}$ genügen, so daß wir z. B. $g_0, g_1, \cdots, g_{\frac{n}{2}-1}$ ganz beliebig annehmen dürfen.

Betrachten wir nun die folgende infinitesimale Transformation von G:

$$\frac{1}{i!}\,\delta^{i}\,Mf=\sum_{0}^{i+1}(-1)^{\nu}\binom{n}{i-\nu+1}(i-2\nu+1)\,x_{n-i+\nu-1}p_{\nu}$$
$$(0<i<n-1).$$

Wie man sieht, ändert sich das Gewicht des $(\nu+1)$-ten Gliedes dieser Summe in Bezug auf die Belegung $(\mathfrak{g})$ nicht, wenn man ν durch $i+1-\nu$ ersetzt. Im Falle eines ungeraden i verschwindet das mittelste Glied, welches dem Wert $\nu=\frac{i+1}{2}$ entspricht.

Wir haben also stets eine gerade Anzahl von Gliedern mit nicht verschwindenden Koeffizienten und können $\left[\frac{i}{2}\right]+1$ Paare aus ihnen bilden, indem wir je zwei Glieder gleichen Gewichts zusammenfassen. $\delta^i Mf$ zerlegt sich also in $\left[\frac{i}{2}\right]+1$ isobare Summanden. Man kann leicht zeigen, daß zwei solche Summanden bei passender Wahl der Belegung $(\mathfrak{g})$ niemals gleiches Gewicht haben. Zunächst bemerke man, daß es unmöglich ist konstante Werte λ zu finden, für welche die Gleichung

$$\mathfrak{g}_{n-i+\mu-1}-\mathfrak{g}_\mu-\mathfrak{g}_{n-i+\nu-1}+\mathfrak{g}_\nu=\sum_0^{\frac{n}{2}}\lambda_j(\mathfrak{g}_j+\mathfrak{g}_{n-j})$$

identisch (d. h. für alle Werte der $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1\cdots, \mathfrak{g}_n$) besteht, während μ und ν zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \cdots, \left[\frac{i}{2}\right]$ sind. Da nämlich $i<n-1$ ist, so ist, wenn man $\mu<\nu$ annimmt, μ der kleinste Index auf der linken Seite. Man müßte also $\lambda_\mu=-1$ setzen, und auf der linken Seite müßte dann das Glied $-\mathfrak{g}_{n-\mu}$ vorkommen[1]), was aber nicht der Fall ist, weil unmöglich $i+1=\mu+\nu$ sein kann. Damit ist gezeigt, daß keine der Gleichungen

$$\mathfrak{g}_{n-i+\mu-1}-\mathfrak{g}_\mu-\mathfrak{g}_{n-i+\nu-1}+\mathfrak{g}_\nu=0\quad\left(\mu\gtrless\nu;\mu,\nu=0,1,\cdots,\left[\frac{i}{2}\right]\right)$$

eine Folge der Relationen $\mathfrak{g}_j+\mathfrak{g}_{n-j}=0$ ist. Die $\mathfrak{g}$ lassen sich dann aber immer so bestimmen, daß diese Relationen erfüllt sind, dagegen keine von jenen Gleichungen. Wir dürfen also in der Tat behaupten, daß $\delta^i Mf$ in $\left[\frac{i}{2}\right]+1$ isobare Summanden zerfällt, die lauter verschiedene Gewichte haben und daher einzeln in G vorkommen.

---

1) Da $\mu<\left[\frac{i}{2}\right]\leqq\frac{n}{2}-1$ ist, so sind μ und $n-\mu$ verschieden.

Lassen wir i die Werte $1, 2, \cdots, n-2$ durchlaufen und rechnen Mf selbst mit, so haben wir in G

$$n-1+\sum_{1}^{n-2}\left[\frac{i}{2}\right]=n-1+\tfrac{1}{4}(n-2)^2$$

infinitesimale Transformationen, die in dem ursprünglichen Sinne von positivem Gewicht sind. Beachtet man, daß in G auch $\delta^{2n-2}Mf$ vorkommt, welches abgesehen von einem nicht verschwindenden Faktor gleich $nx_1p_n+x_0p_{n-1}$ ist, so übersieht man leicht[1]), daß es auch $n-1+\frac{1}{4}(n-2)^2$ infinitesimale Transformationen in G gibt, deren Gewicht (im ursprünglichen Sinne) negativ ist. Vom Gewicht 0 waren die in G nachgewiesenen $\frac{n}{2}$ infinitesimalen Transformationen $x_\nu p_\nu - x_{n-\nu}p_{n-\nu}$, so daß wir im Ganzen (außer Uf)

$$2(n-1)+\tfrac{1}{2}(n-2)^2+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

infinitesimale Transformationen von G kennen. Man bestätigt nun leicht, daß die Mannigfaltigkeit zweiten Grades, welche durch die Gleichung

$$\sum_{0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}x_nx_{n-\nu}=0$$

dargestellt wird[2]), die Gruppe der Normkurve und die infinitesimale Transformation Mf gestattet. Dann darf man aber den Schluß ziehen, daß die $\frac{1}{2}n(n+1)$ gefundenen infinitesimalen Transformationen die projektive Gruppe dieser Mannigfaltigkeit zweiten Grades bilden. Diese Gruppe steckt, wie Lie gezeigt hat, in keiner größeren Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe des R_n, und wir können also folgenden Satz formulieren:

Theorem 2. *In einem Raume, dessen Dimensionenzahl gerade, aber nicht gleich 6 ist, steckt die Gruppe einer Normkurve abgesehen von der allgemeinen projektiven Gruppe nur noch in einer*

1) Man braucht nur wieder die Indices $0, 1, \cdots, n$ bezüglich durch $n, n-1, \cdots, 0$ zu ersetzen.

2) Will man die Analogie zwischen den Räumen gerader und ungerader Dimensionenzahl hervortreten lassen, so betrachtet man besser das durch $\sum(-1)^\nu\binom{n}{\nu}x_\nu y_{n-\nu}=0$ dargestellte Polarsystem.

projektiven Gruppe, nämlich in der $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrigen projektiven Gruppe einer nichtausgearteten $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit zweiten Grades.

Für $n=2$ fällt übrigens die umfassende $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrige Gruppe mit der Gruppe der Normkurve zusammen.

VII. Erledigung des Falles $n=6$.

Die Gruppe G enthält, wie wir von $Mf = 6x_5p_0 + x_6p_1$ ausgehend finden, zunächst die folgenden infinitesimalen Transformationen:

$$\tfrac{1}{2}\delta\, Mf = 15x_4p_0 - x_6p_2,$$
$$\tfrac{1}{6}\delta^2 Mf = 20x_3p_0 - 5x_4p_1 - 2x_5p_2 + x_6p_3,$$
$$\tfrac{1}{24}\delta^3 Mf = 15x_2p_0 - 10x_3p_1 + 3x_5p_3 - x_6p_4,$$
$$\tfrac{1}{24}\delta^4 Mf = 30x_1p_0 - 45x_2p_1 + 20x_3p_2 + 15x_4p_3 - 18x_5p_4 + 5x_6p_5,$$
$$\tfrac{1}{720}\delta^5 Mf = x_0p_0 - 4x_1p_1 + 5x_2p_2 - 5x_4p_4 + 4x_5p_5 - x_6p_6.$$

Der letzten entspricht eine Belegung der x, p mit Gewichten, bei welcher Mf, δMf, $\delta^2 Mf$, $\delta^3 Mf$ isobar sind. Dagegen ist $\delta^4 Mf$ nicht mehr isobar, sondern setzt sich linear aus den isobaren Bestandteilen

$$6x_1p_0 + 4x_3p_2 + 3x_4p_3 + x_6p_5, \quad 5x_2p_1 + 2x_5p_4$$

zusammen, von denen wir also behaupten können, daß sie selbständig in G vorkommen. Deltaiert man sie oder besser nur den zweiten Ausdruck, so kommt abgesehen von einem Zahlenfaktor

$$x_1p_1 - x_2p_2 + x_4p_4 - x_5p_5.$$

Aus dem vorigen Kapitel wissen wir, daß in G auch $6x_1p_6 + x_0p_5$ vorkommt, eine infinitesimale Transformation, die in Mf übergeht, wenn man die Indices $0, 1, \cdots, 6$ bezüglich durch $6, 5, \cdots, 0$ ersetzt. Auf diesem Umstand und darauf, daß die Gruppe der Normkurve bei dieser Vertauschung der Indices in sich übergeht, beruht es, daß die gefundenen infinitesimalen Transformationen von G sich wieder in infinitesimale Transformationen von G verwandeln, wenn man auf sie die angegebene Indicesvertauschung anwendet. Wir kennen also im ganzen (ohne Uf) folgende 14 infinitesimalen Transformationen von G:

$$
\begin{array}{ll}
6x_5p_0+x_6p_1 & 6x_1p_6+x_0p_5, \\
15x_4p_0-x_6p_2 & 15x_2p_6-x_0p_4, \\
20x_3p_0-5x_4p_1-2x_5p_2+x_6p_3, & 20x_3p_6-5x_2p_5-2x_1p_4+x_0p_3, \\
15x_2p_0-10x_3p_1+3x_5p_3-x_6p_4, & 15x_4p_6-10x_3p_5+3x_1p_3-x_0p_2, \\
6x_1p_0+4x_3p_2+3x_4p_3+x_6p_5, & 6x_5p_6+4x_3p_4+3x_2p_3+x_0p_1, \\
5x_2p_1+2x_5p_4, & 5x_4p_5+2x_1p_2,
\end{array}
$$

$$x_1p_1-x_2p_2+x_4p_4-x_5p_5,$$

$$x_0p_0+x_2p_2-x_4p_4-x_6p_6.$$

Diese bilden aber, wie man leicht verifiziert, eine Gruppe, die offenbar die Gruppe der Normkurve als Untergruppe enthält. Sie steckt ihrerseits in der 21-gliedrigen Gruppe, welche uns das Verfahren des vorigen Kapitels liefern würde, aber in keiner andern Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe, wie man unschwer beweisen könnte. Herr Engel[1]) hat eine einfache geometrische Definition dieser Gruppe gegeben und ein eigentümliches Gebilde untersucht, welches die Gruppe auf der durch

$$\sum_0^6 (-1)^\nu \binom{6}{\nu} x_\nu x_{6-\nu} = 0$$

dargestellten Mannigfaltigkeit zweiten Grades invariant läßt und welches eine merkwürdige Analogie zu einem Nullsystem hat. Daß zu jeder Normkurve des R_6 eine ganz bestimmte 14-gliedrige Gruppe gehört, wie wir oben gefunden haben, ist ein Satz, der sich schon in der ersten der beiden citierten Engelschen Arbeiten findet.

Wir können jetzt noch ein drittes Theorem formulieren, welches die Besonderheit hervorhebt, die wir im R_6 gefunden haben.

Theorem 3. *Unter allen ebenen Räumen ist der sechsdimensionale Raum dadurch ausgezeichnet, daß in ihm zu der Gruppe einer Normkurve zwei umfassende projektive Gruppen existieren, die von der allgemeinen projektiven Gruppe verschieden sind. Die eine ist die 21-gliedrige projektive Gruppe einer gewissen Mannigfaltigkeit zweiten Grades und hat ihr Analogon in*

1) Vgl. seine beiden Arbeiten über *„Ein neues dem linearen Komplexe analoges Gebilde“*. Diese Berichte 1900, S. 63—76 u. S. 220—239.

den andern Räumen mit gerader Dimensionenzahl. Die andere, eine 14-gliedrige Untergruppe von dieser, läßt auf der Mannigfaltigkeit zweiten Grades einen ENGELschen *Komplex*[1]) *invariant.*

VIII. Eine Anwendung der gefundenen Resultate.

Für $n > 2$ bleiben bei der projektiven Gruppe einer Normkurve außer der Normkurve noch andere Punktmannigfaltigkeiten invariant, und zwar für $n = 3$ eine, für $n > 3$ unendlich viele (wegen der Intransitivität der Gruppe). Man kann eine von diesen Mannigfaltigkeiten für sich betrachten und fragen, ob sie vielleicht eine größere projektive Gruppe gestattet als die Normkurve. Diese Frage können wir jetzt für jede solche Mannigfaltigkeit sofort beantworten. Denn jene größere projektive Gruppe muß eine von den umfassenden projektiven Gruppen der Gruppe der Normkurve sein, und zwar eine solche, bei der eine Punktmannigfaltigkeit invariant bleibt. Bei ungeradem n gibt es aber nach den oben gefundenen Resultaten keine derartige Gruppe, und für gerades n nur dann, wenn die betrachtete Mannigfaltigkeit eine $(n-1)$-dimensionale nichtausgeartete Mannigfaltigkeit zweiten Grades ist. Die Sachlage ist also folgende:

Wenn im R_n *eine Mannigfaltigkeit M bei jeder projektiven Transformation invariant bleibt, die eine Normkurve N in sich überführt, so bleibt auch umgekehrt N bei jeder projektiven Transformation invariant, die M in sich überführt, außer wenn M eine nichtausgeartete* $(n-1)$*-dimensionale Mannigfaltigkeit zweiten Grades ist.*

---

1) So nenne ich das von Herrn ENGEL in den citierten Arbeiten behandelte Gebilde.

Druckfertig erklärt 20. XII. 1902.]

INHALT.

Seite

C. Neumann, Beiträge zur analytischen Mechanik. Zweite und dritte Abhandlung 333

G. Scheffers, Über Loxodromen. 363

Gerhard Kowalewski, Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des sechsdimensionalen Raumes 371

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Z Soc 1726.9

HARVARD COLLEGE LIB.
APR 29 1903
CAMBRIDGE, MASS.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

VII.

MIT VIERZEHN TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1902.

Einzelpreis 75 Pfg.

SITZUNG VOM 1. DEZEMBER 1902.

Vorträge hielten:

Herr ZIRKEL: „Über Urausscheidungen in rheinischen Basalten". (Für die „Abhandlungen".)

Herr NEUMANN: Vorlegung einer Arbeit des Herrn HEINRICH LIEBMANN: „Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum".

Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum.

Von

HEINRICH LIEBMANN.

§ 1. Einleitung.

1. *Fragestellung.* Die Mechanik des nichteuklidischen Raumes hat vielfach das Interesse der Mathematiker erregt, und namentlich die Statik ist bis zu einem großen Maße der Vollkommenheit ausgebildet. Was die Dynamik angeht, so sind die vorliegenden Untersuchungen meistens abstrakter Natur, sie betreffen die Gültigkeit der mechanischen Prinzipien im nichteuklidischen Raume.[1]) — Die Frage nach der Gestalt der Bahnkurven bei bestimmt vorgeschriebenen Kräften scheint fast noch gar nicht[2]) behandelt worden zu sein, selbst nicht in dem einfachen Falle eines Anziehungsgesetzes, das dem NEWTONschen Anziehungsgesetze im euklidischen Raum entspricht. Das zugehörige Potential ist zwar von SCHERING[3]) aufgestellt worden, doch hat SCHERING die Be-

1) Man vgl. z. B.: R. LIPSCHITZ, Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges. Crelles Journal 82 (1877). S. 316—342.

2) Vgl. indessen Anmerkung 3, S. 394.

3) E. SCHERING, Gesammelte Werke I (Berlin 1902): S. 156—163 und S. 177—184.

wegung eines Punktes, der dem Gesetz unterliegt, nicht untersucht. Eine derartige Untersuchung wird hier durchgeführt, und es ergibt sich dabei das einfache und überraschende Resultat, daß das dem NEWTONschen Gesetz entsprechende Gesetz ebenfalls, wie im euklidischen Raum, die Bewegung des Punktes in einem *Kegelschnitt* zur Folge hat, wobei das *Attraktionscentrum* mit einem *Brennpunkt des Kegelschnitts* zusammenfällt.

2. *Gang der Untersuchung.* Die vorliegende Arbeit geht zuerst auf die Kegelschnitte der L_2 ein.[1]) Dieselben sind zwar bereits mehrfach eingehend untersucht worden[2]), doch bedarf man für die Zwecke der Dynamik einer besonderen Darstellung, die der bekannten Darstellung der Kegelschnitte der E_2 durch Polarkoordinaten entspricht, wobei ein Brennpunkt zum Koordinatenanfangspunkt gewählt ist. — Nachdem sodann die Ableitung des Potentials für den L_3 und S_3, die SCHERING gegeben hat, vervollständigt und auch geometrisch gedeutet worden ist, wird die Planetenbewegung im S_2 behandelt. (Nach Abschluß dieser Untersuchung machte mich Herr Prof. ENGEL darauf aufmerksam, daß die Ergebnisse der Aufgabe für die S_2, von der hier die Lösung entwickelt wird, bereits im Jahre 1886 von Herrn Geheimrat NEUMANN veröffentlicht worden sind, wenn auch ohne Beweis.[3]) Ich gebe im folgenden meinen Beweis).

Die Untersuchungen im S_3 sind den anderen voranzustellen, da in diesem Falle der nichteuklidischen Geometrie „die Sätze sich an derselben Figur vereinigen", während in der anderen

---

1) Ich bediene mich der Einfachheit halber der von Herrn HAUSDORFF eingeführten Bezeichnungen L_2 und L_3 für die LOBATSCHEFSKIJsche Ebene und den LOBATSCHEFSKIJschen Raum. (Vgl. die in diesen Berichten 1899, S. 161—214 erschienene Abhandlung: Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie). — Entsprechend wird später S_2 und S_3 für die Kugel und für den Raum der sphärischen Geometrie gebraucht, ebenso E_2 und E_3 für die Euklidische Ebene und den Euklidischen Raum.

2) Man vgl. z. B. W. KILLING. Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885. S. 37—45. — W. E. STORY. On non-Euclidian properties of conics. Am. J. f. Math. V (1882). S. 358—382.

3) C. NEUMANN. Ausdehnung der KEPPLERschen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugel stattfindet. (Diese Berichte Band 38, 1886, S. 1—2).

Raumform, im L_3, „die entsprechenden Eigenschaften sich auf mehrere Gebilde verteilen und dann noch Übergänge stattfinden.“[1])

Durch eine bekannte imaginäre Übertragung bekommt man sodann die Planetenbewegung in der L_2; es ist indessen nützlich, einige Fälle dieser Bewegung auch unmittelbar ohne jenes Hilfsmittel zu behandeln, was noch am Schlusse geschieht, wenigstens für einige einfache Fälle.

§ 2. Synthetische Ableitung der Kegelschnitte des L_3.

Herr Killing hat bereits darauf aufmerksam gemacht[2]), daß man die Kegelschnitte des S_2 genau so durch Schneiden eines Rotationskegels im S_3 mit einer Ebene erhalten kann, wie entsprechend im E_3. Hier soll zum Teil diese Untersuchung auch für den L_3 durchgeführt werden, wobei natürlich alle von Lobatschefskij herrührenden geometrischen Sätze als bekannt vorausgesetzt werden.[3])

1. *Die Parabel mit einem Brennpunkt.* Schneiden wir einen Rotationskegel mit einer Ebene, die nur einen der beiden Mäntel trifft und zwar in einer geschlossenen Kurve, so kann man genau wie im E_3 nach dem Quetelet-Dandelinschen[4]) Verfahren zeigen, daß diese Schnittlinie der Ort eines Punktes ist, für den die Summe oder die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist. Diese beiden „Brennpunkte“ sind die Punkte, in denen zwei bestimmte den Kegel berührende Sphären[5]) zugleich die Schnittebene berühren. — Ähnlich bekommt man die zweiastige Hyperbel, wenn man den Kegel mit einer beide Mäntel schneidenden Ebene zum Schnitt bringt. —

---

1) Killing a. a. O. S. V (Vorwort).

2) Killing a. a. O. S. 38.

3) Im folgenden wird mehrfach verwiesen auf: N. J. Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen. Übersetzt und herausgegeben von F. Engel. Leipzig 1898. (Citiert als „Lobat.“), sowie auf meine Übersetzung der Lobatschefskijschen *Pangeometrie*. (Leipzig 1902).

4) Vgl. S. 60 des Berichtes von F. Kötter über die Entwickelung der synthetischen Geometrie. (Leipzig 1901.)

5) Mit dem Namen „Sphäre“ bezeichne ich sowohl die Kugel, als die Grenzfläche, als auch die Fläche gleichen Abstandes. (Vgl. S. 246 dieser Berichte. 1902.)

Um eine der verschiedenen Parabelformen zu erhalten, können wir etwa so verfahren: Es seien m_1 und m_2 die in einem Achsenschnitt des Kegels gelegenen Mantellinien[1]) (s. Fig. 1). Durch einen Punkt der Achse (z) lege man dann die Parallele a zur Mantellinie m_1; a möge m_2 in S schneiden und so gewählt sein, daß $\sphericalangle (a, m_2) = \sphericalangle (m_1, m_2)$ ist. Durch a legen wir dann die auf dem Achsenschnitt senkrecht stehende Ebene (E) und untersuchen nun die Schnittkurve dieser Ebene und des Rotationskegels. F sei der Punkt, in dem die dem Kegel einbeschriebene QUETELETsche Kugel die Ebene berührt, k der Kreis, in dem sie den Kegel berührt.

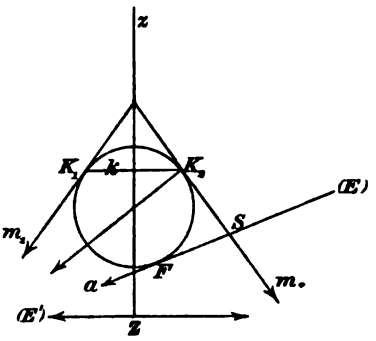


Fig. 1.

Es gibt dann eine bestimmte auf z in einem Punkte Z senkrecht stehende Ebene (E'), zu der alle Mantellinien parallel sind. Legen wir nun durch einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve die Parallele zu a — sie möge mit g bezeichnet werden — und fällen wir das Lot PP' auf E'. Da g parallel zur Ebene E' ist, so läßt sich die Ebene (g, PP') durch Drehung um PP' mit (m, PP') zur Deckung bringen, unter m die durch P gehende Mantellinie verstanden. Der Fußpunkt G des Lotes, das in der Ebene (g, PP') auf g senkrecht und parallel zu E' gezogen ist, geht dabei über in den Punkt K, in dem die Mantellinie m den Kreis k trifft. Denn die im Punkte K auf m errichtete (in der Ebene (m, PP'), die zugleich auch z enthält, gelegene) Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel hindurch, muß also, da $\sphericalangle (a, m_2) = \sphericalangle (m_1 m_2)$ ist, ebenfalls zu E' parallel sein. —

Es ergibt sich also, daß

$$FP = PK = PG$$

ist. G ist aber der Ort der Fußpunkte von den Loten, die auf E parallel zu E' errichtet sind, d. h. die Punkte G liegen auf

1) Die Fig. 1 stellt *schematisch* den Achsenschnitt dar. Entsprechend auch Fig. 2.

dem Randbild[1]) von E', das auf der zur E' parallelen Ebene E gelegen ist, d. h. auf einem Grenzkreis. Somit bekommen wir den Satz:

Die Punkte P der Schnittlinie des Kegels und der Ebene E sind von einem festen Punkt F und einem festen Grenzkreis gleich weit entfernt.

2. *Die einastige Hyperbel.* Legen wir die Gerade a so, daß m_1 und a ein gemeinsames Lot haben, so erhält man eine Kurve, deren Punkte von einem festen Punkt (Brennpunkt) und einer bestimmten Abstandslinie gleich weit entfernt sind. (Vgl. Fig. 2).

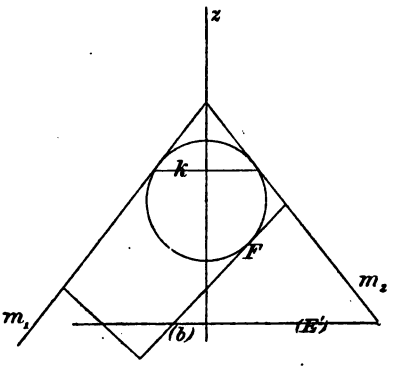


Fig. 2.

Dies lehrt das folgende Schlußverfahren, was dem soeben angewendeten entspricht und daher nur in den Hauptzügen angegeben zu werden braucht. Die Hilfsebene E', welche wir einzuführen haben, steht auf z senkrecht und muß a, m_1 und m_2 unter gleichen Winkeln schneiden. E' und E müssen sich notwendig schneiden in einer Geraden b, da, wie sehr leicht zu beweisen ist, die Gerade, welche E' mit dem durch a gelegten Achsenschnitt gemein hat, die drei Geraden a, m_1 und m_2 schneiden muß. Legen wir jetzt durch einen Punkt P der Schnittkurve die Gerade senkrecht zu b und verlängern diese Gerade über P hinaus bis zum Punkte G, der so bestimmt ist: Es wird die durch P gehende Mantellinie m um das Lot PP', das von P aus auf E' gefällt ist, so lange gedreht, bis sie mit a zusammenfällt. Da m und a mit E' beide denselben Winkel bilden, so kommt der Punkt (m, E') mit (a, b) zur Deckung. Der Punkt K, in dem die durch P gehende Gerade m die einbeschriebene Kugel berührt, geht dabei über in G. Der senkrechte Abstand von G

1) Das Wort „Randbild" für die hier gebrauchte Zuordnung der Ebenen des Raumes zu den Cyklen einer Ebene ist von mir eingeführt diese Berichte 1902. S. 250. — Der Begriff ist z. B. auch in der oben (S. 394 Anm. 1) genannten Arbeit von Herrn Hausdorff erörtert.

und b ist eine Konstante, nämlich gleich der Länge des Stückes von m zwischen den Berührungskreis k und der Ebene E'. Der Ort der Punkte G ist also eine Abstandslinie.

Ferner aber ist wie oben:

$$FP = PG\ (= PK):$$

Die Punkte P sind also von einem festen Punkt F und einer Abstandslinie gleichweit entfernt.

3. *Zusatz.* In ähnlicher Weise kann man alle Formen von Kegelschnitten, die später in § 4 analytisch dargestellt werden, durch Schneiden eines Rotationskegels erhalten. Um aber diejenigen in § 5 und § 6 besprochenen Kegelschnitte zu erhalten, die keinen reellen Brennpunkt haben, müßte man noch andere Kegel zu Hilfe nehmen, z. B. den „Kegel", welcher entsteht, wenn man in allen Punkten einer Abstandslinie auf der Ebene der Abstandslinie Lote errichtet.

§ 3. Übergang zur analytischen Ableitung der Kegelschnitte in der L_2.

1. *Definition der Kegelschnitte.* Für diejenige analytische Darstellung, die später gebraucht wird, ist folgende Definition am geeignetsten:

Der Ort aller Punkte, die von einem Punkt (oder einer Geraden) und einem Cykl[1]) *gleich weit entfernt sind, ist ein Kegelschnitt.*

Würden wir die einfacher aussehende Definition der Kegelschnitte als Orte von Punkten wählen, für die die Summe oder die Differenz von zwei festen Punkten konstant ist, so würden dabei eine Reihe von Formen verloren gehen.

Einfacher als jede metrische Definition, ist die Definition, die man erhält, wenn man mit STORY sich der CAYLEY-KLEINschen Darstellung der L_2 bedient. Die Kegelschnitte sind dann einfach wieder Kegelschnitte der E_2, und sie sind je nach ihrer Lage zum reellen Fundamentalkegelschnitt als metrisch zu unterscheidende Gebilde aufzufassen. Diese Definition ermöglicht auch erst eine genaue Übersicht über die durch metrische Betrachtungen gewonnenen Formen.

Hier werden wir aus Zweckmäßigkeitsgründen die vorausgeschickte metrische Definition bevorzugen.

---

1) Cykl bedeutet: Kreis, Grenzlinie oder Abstandslinie.

2. *Die verschiedenen Koordinatensysteme.* Die notwendigsten Formeln, welche zur Aufstellung der Gleichungen gebraucht werden, mögen hier kurz zusammengestellt werden.[1])

Es seien

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

die hyperbolischen Funktionen, für die die bekannten Additionstheoreme bestehen:

$$\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} v \operatorname{ch} u,$$
$$\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v,$$

dann bestehen in Fig. 3 die folgenden Beziehungen

$$\operatorname{sh} \xi = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y,$$
$$\operatorname{ch} r = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y;$$
$$\operatorname{th} \eta = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x};$$
$$\operatorname{sh} \xi = \operatorname{sh} r \cdot \cos \varphi,$$
$$\operatorname{th} x = \operatorname{th} r \cdot \cos \varphi,$$
$$\operatorname{sh} y = \operatorname{sh} r \cdot \sin \varphi.$$

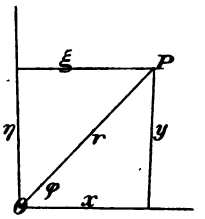


Fig. 3.

Hiermit ist also der Übergang zwischen x und y einerseits (rechtwinklige Koordinaten) und r und φ andererseits (Polarkoordinaten) gegeben. Die Größen $\operatorname{ch} r$, $\operatorname{sh} \xi$ und $\operatorname{sh} y$ sind die Weierstrassschen Koordinaten.[2])

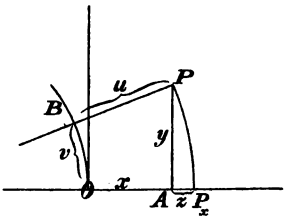


Fig. 4.

Um auch noch die später für die Parabeln gebrauchten Grenzkreiskoordinaten zu erhalten, definieren wir die Größen u und v so: Durch den Koordinatenanfang legen wir einen auf der linken Seite der y-Achse gelegenen diese Achse im Nullpunkt berührenden Grenzkreis. (S. Fig. 4).

u sei dann der Abstand PB des Punktes P von diesem Grenzkreis, v der Grenzkreisbogen BO, v_x der Bogen PP_x, $AP_x = z$.

---

1) Man findet eine ausführliche Zusammenstellung z. B. „Lobat." S. 345—348.

2) Vgl. Killing a. a. O. S. 17.

Dann ist bekanntlich[1])

$$v_1 = ve^u,$$

$$v_1 = \cot \Pi(y) = \operatorname{sh} y$$

$$e^{-z} = \sin \Pi(y) = \frac{1}{\operatorname{ch} y}$$

und endlich

$$x = u - z.$$

Hieraus folgt:

$$e^{-z} = \sqrt{e^{-2u} + v^2}$$

$$\operatorname{sh} y = ve^u.$$

3. *Abstände von Geraden und Punkten.* Der hyperbolische Sinus des Abstandes eines Punktes von einer Geraden ist eine lineare Funktion der WEIERSTRASSschen Koordinaten[2]) des Punktes. Wir wollen die Funktion für bestimmte Geraden angeben.

Schneidet die Gerade die x-Achse senkrecht in dem Punkt mit der Abscisse a, so kommt

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y.$$

Tritt an die Stelle der x-Achse die y-Achse, so kommt

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} y. \quad —$$

Der Abstand z eines Punktes von der Geraden, die im Koordinatenanfang die x-Achse unter dem Winkel α schneidet, ist bestimmt durch

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \sin \alpha - \operatorname{sh} y \cos \alpha.$$

Endlich für den Abstand eines Punktes von derjenigen Geraden, die im ersten Quadranten liegt und nach der einen Richtung hin zur positiven x-Achse, nach der anderen zur positiven y-Achse parallel ist, erhält man

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} y \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y. \quad —$$

Der Abstand ϱ zweier Punkte xy und $x_0 y_0$ endlich erfüllt die Gleichung

$$\operatorname{ch} \varrho = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \operatorname{ch} x_0 \operatorname{ch} y_0 - \operatorname{ch} y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y_0 \operatorname{sh} x_0 - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} y_0.$$

---

1) „Lobat." S. 189. — Pangeometrie S. 32 u. 35.

2) Vgl. KILLING a. a. O. S. 17. HAUSDORFF a. a. O. S. 167.

§ 4 Kegelschnitte mit mindestens einem Brennpunkt.

Wir beginnen jetzt mit der Aufstellung der Gleichungen (in Polarkoordinaten) von denjenigen Kegelschnitten, deren Punkte von einem festen Punkte (dem zum Koordinatenanfang zu wählenden *Brennpunkt*) und einem symmetrisch zur Geraden $\varphi = 0$ angenommenen Cykl gleichweit entfernt sind.

1. *Der Cykl ist ein den Koordinatenanfang enthaltender Kreis. (Ellipse).* Der Kreis möge den Mittelpunkt $y = 0$, $x = -2e$ haben, sein Radius sei $2a$. Dann wird

$$2a - r = r_1,$$

unter r_1 die Entfernung des Punktes P von dem Mittelpunkt des Kreises verstanden.

Die Polargleichung bekommt man dann leicht, da nach § 3, 3

$$\operatorname{ch}(2a - r) = \operatorname{ch} r_1 = \operatorname{ch}(x + 2e) \operatorname{ch} y$$

ist.

Wendet man die Additionstheoreme § 3, 2 an sowie die Transformationsformeln, so kommt hieraus

$$\operatorname{ch} 2a \operatorname{ch} r - \operatorname{sh} 2a \operatorname{sh} r = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} 2e + \operatorname{sh} r \cos\varphi \operatorname{sh} 2e,$$

oder

$$\operatorname{th} r = \frac{\operatorname{ch} 2a - \operatorname{ch} 2e}{\operatorname{sh} 2a + \operatorname{sh} 2e \cos\varphi}, \qquad a > e.$$

Diese Kurve ist der Euklidischen Ellipse vollkommen entsprechend, und wenn man die Größen r, a und e ersetzt durch die Quotienten $r : k$, $2a : k$, $2e : k$ und dann zur Grenze $k = \infty$ übergeht, so ergibt sich die bekannte Polargleichung der Ellipse:

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos\varphi}.$$

2. *Der Cykl ist ein den Punkt O nicht enthaltender Kreis.*

a) Der konkave Hyperbelast.

Die Abscisse des Mittelpunktes sei $2e$, der Radius $2a$ $(< 2e)$. Hierbei kommt man auf die Gleichung

$$\operatorname{ch}(r + 2a) = \operatorname{ch} r_1 = \operatorname{ch}(2e - x) \operatorname{ch} y$$

oder

$$\operatorname{th} r = \frac{\operatorname{ch} 2e - \operatorname{ch} 2a}{\operatorname{sh} 2a + \operatorname{sh} 2e \cos\varphi}, \qquad e > a.$$

b) der konvexe Hyperbelast.

Die Gleichung

$$r_1 + 2a = r$$

führt auf

$$\operatorname{th} r = \frac{\operatorname{ch} 2e - \operatorname{ch} 2a}{\operatorname{sh} 2e \cos\varphi - \operatorname{sh} 2a}, \qquad e > a.$$

Diese Kurve entspricht genau der Hyperbel der E_2.

3. *Der Cykl ist eine Abstandslinie* (Semihyperbel).[1]) Es sei a der Abstand der Mittellinie der Abstandslinie von O, $a + e$ die Entfernung der Abstandslinie von O. (S. Fig. 5).

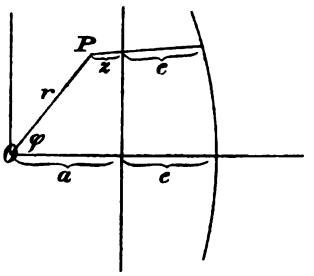


Fig. 5.

Dann wird also

$$z + e = r,$$

oder

$$\operatorname{sh} z = (\operatorname{sh} a \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y)$$
$$= \operatorname{sh}(r - e) = \operatorname{sh} r \operatorname{ch} e - \operatorname{sh} e \operatorname{ch} r,$$

und wenn man Polarkoordinaten einführt, kommt

$$\operatorname{th} r = \frac{\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} e}{\operatorname{ch} e + \operatorname{ch} a \cos\varphi}, \qquad a + e > 0.$$

Die Bedingung ist hinzugefügt, damit für $\varphi = 0$ die Größe

$$\operatorname{th} r_0 = \frac{\operatorname{sh} a + \operatorname{sh} e}{\operatorname{ch} e + \operatorname{ch} a} = \operatorname{th}\left(\frac{a+e}{2}\right)$$

positiv wird.

Es ist klar, daß man diese Kurve auch als Ort der Punkte definieren kann, für die die Differenz der Abstände von einem Punkt und einer Geraden konstant ist.

Herr KILLING nennt die Kurve, die man für $e = 0$ erhält, „eigentliche Parabel"; doch scheint dieser Ausdruck, der zwar der unmittelbaren Übertragung einer bekannten Konstruktion der euklidischen Parabel gerecht wird, nicht ganz geeignet zu sein, weil die Kurve nicht den Fundamentalkegelschnitt berührt.

4. *Der Cykl ist eine Grenzlinie.* (Elliptische Parabel.)

a) die Grenzlinie ist gegen den Punkt konkav.

Setzt man in der vorigen Gleichung

$$e = m + n,$$
$$a = m - n,$$

1) Nach der Bezeichnung von STORY, die wir immer beifügen wollen.

so kommt

$$\operatorname{th} r = \frac{2 \operatorname{sh} m \operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} m \operatorname{ch} n + \operatorname{sh} m \operatorname{sh} n + \cos\varphi\,(\operatorname{ch} n \operatorname{ch} m - \operatorname{sh} m \operatorname{sh} n)}.$$

Geht man zur Grenze $n = \infty$ über, so bekommt man die gesuchte Kurve. Es wird also

$$\operatorname{th} r = \frac{2 \operatorname{sh} m}{\operatorname{ch} m + \operatorname{sh} m + (\operatorname{ch} m - \operatorname{sh} m)\cos\varphi} = \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}\cos\varphi}.$$

b) die Grenzlinie ist gegen den Punkt konvex.

Um diesen Fall zu erhalten, hat man in der obigen Gleichung nur e durch $-e$ zu ersetzen:

$$\operatorname{th} r = \frac{\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} e}{\operatorname{ch} e + \operatorname{ch} a \cos\varphi}, \quad a - e > 0,$$

und sodann

$$a + e = 2n,$$

$$a - e = 2m$$

und zur Grenze $n = \infty$ überzugehen, wodurch man bekommt:

$$\operatorname{th} r = \frac{2 \operatorname{sh} m}{\operatorname{ch} m - \operatorname{sh} m + \cos\varphi\,(\operatorname{ch} m + \operatorname{sh} m)} = \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}\cos\varphi}.$$

Man könnte diese Kegelschnitte natürlich auch durch Grenzübergang von der Ellipse oder der Hyperbel aus erhalten.

5. *Konvexität und Konkavität.* Für die Dynamik (vgl. § 9, 2) ist es wichtig zu wissen, ob ein Kegelschnitt gegen den Brennpunkt konvex oder konkav ist. Man braucht dazu nur *einen Punkt* der Kurve zu untersuchen, da ein Übergang vom Konvexen zum Konkaven im Endlichen niemals stattfinden kann, weil einerseits ein Kegelschnitt keinen Wendepunkt haben kann und andererseits von einem Brennpunkt aus niemals eine reelle Tangente an den Kegelschnitt gelegt werden kann. (Eine Tangente vom Brennpunkt, d. h. vom Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten des Kegelschnitts und des Fundamentalkegelschnitts aus, kann niemals reell im Innern des Fundamentalkegelschnitts verlaufen).

Zu dem Punkt nehmen wir den einen Scheitelpunkt.

Gegeben sei also O, ferner der Scheitelpunkt S und der Punkt O_1, durch den jener Cykl hindurchgehen muß, der zusammen mit O für die geometrische Konstruktion des Kegelschnittes gebraucht wird.

Nehmen wir nun für den Cykl der Reihe nach: Den Punkt O_2, dann einen Kreis, dessen Mittelpunkt links von O_2 liegt, immer weiter nach links wandert, bis der Kreis in eine Grenzlinie übergeht, dann in eine Abstandslinie, deren Mittellinie von links nach rechts zurückwandert, sodann wieder in eine Grenzlinie, die nun gegen den Punkt konvex ist, endlich wieder in einen Kreis, dessen Mittelpunkt rechts von O_2 liegt, und der zuletzt wieder auf O_2 zusammenschrumpft.

Wir bekommen dann folgende Kegelschnitte: Die Mittellinie von OO_2; einen dem Punkte O abgewendeten Hyperbelast, die Gerade OO_2, eine Ellipse, von der O der links gelegene Brennpunkt ist, einen Kreis, wieder eine Ellipse, dann die in (4a) definierte Parabel, die Semihyperbel (3), die in (4b) definierte Parabel, die schließlich in den konkaven Hyperbelast übergeht. Nimmt der Radius des Kreises durch O_2 bis zur Grenze Null ab, so verwandelt sich dieser Hyperbelast wieder in die Mittellinie.

Man erkennt also, daß gegen den Brennpunkt konvex nur der Hyperbelast (2b) ist; alle andern Kurven, die hier aufgezählt wurden, sind gegen ihren Brennpunkt konkav.

§ 5. Die Kegelschnitte mit einer Brenngeraden.

Weniger einfach ist die Übersicht über die Kegelschnitte mit einer „Brenngeraden" zu erreichen, d. h. diejenigen Kegelschnitte, die der Ort von Punkten sind, welche gleiche Entfernung von einer Geraden und einem Cykl haben.

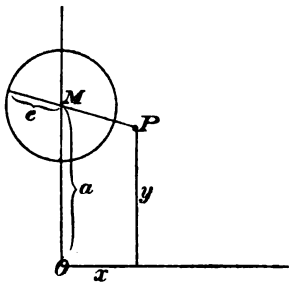


Fig. 6.

1. *Der Cykl ist ein Kreis.* (Vgl. § 4, 3).

Es seien die Koordinaten des Kreismittelpunktes $x = 0$, $y = a$, die Brenngerade sei die x-Achse (s. Fig. 6), e der Radius des Kreises.

Dann ist

$$PM + e = y$$

$$\operatorname{ch} PM = \operatorname{ch} y \operatorname{ch} x \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} a = \operatorname{ch}(y - e)$$
$$= \operatorname{ch} y \operatorname{ch} e - \operatorname{sh} y \operatorname{sh} e,$$

und daher

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} a - \operatorname{ch} e}{\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} e}, \quad a - e > 0.$$

Die Kurve ist gegen die x-Achse konvex, was man durch geometrische Betrachtungen leicht einsehen kann, aber auch analytisch erschließen, da

$$\operatorname{th}\eta = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} e} - \frac{\operatorname{ch} e}{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} e)}$$

für $x = 0$ ein Maximum erreicht.

Ist der Kreis so gelegen, daß er die x-Achse schneidet, so wird natürlich das innerhalb des Kreises gelegene Kurvenstück gegen die x-Achse konkav, das außerhalb gelegene konvex sein.

2. *Der Cykl ist eine Abstandslinie, deren Mittellinie mit der Brennlinie ein gemeinsames Lot besitzt.* (Hyperbel).

Aus Fig. 7 und § 3 kann man, wenn die Gleichung bestehen soll

$$y + 2a = z,$$

leicht ableiten

$$\operatorname{sh} y \operatorname{ch} 2a + \operatorname{ch} y \operatorname{sh} 2a = \operatorname{sh} z$$

$$= \operatorname{sh} 2e \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} 2e \operatorname{sh} y$$

das heißt:

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh} 2e \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2a + \operatorname{ch} 2e}, \qquad e - a > 0.$$

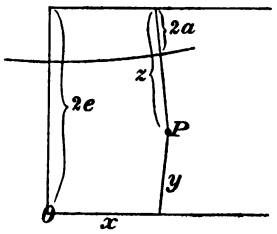


Fig. 7.

Diese Kurve ist gegen die x-Achse konvex, ein zweiter, symmetrisch zum ersten in Bezug auf die Gerade $y = e$ gelegener Teil derselben, der die Gleichung hat

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh} 2e \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{ch} 2e + \operatorname{ch} 2a}$$

ist gegen die x-Achse konkav.

Es kann auch der Fall eintreten, daß die Kurve die y-Achse nicht schneidet, und in zwei zur y-Achse symmetrisch gelegene Teile zerfällt, die gegen diese Achse konvex sind. Der oberhalb der x-Achse gelegene Teil dieser Kurven ist dann gegen diese Achse konkav, der unterhalb gelegene konvex.

3. *Der Cykl ist eine Abstandslinie, deren Mittellinie die Brennlinie schneidet.* Die Gleichung der Kurve wird (vgl. Fig. 8 und § 3, 2 und 3)

$$\operatorname{sh}(y + a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \sin\alpha - \operatorname{sh} y \cos\alpha$$

das heißt

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x \sin\alpha - \operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + \cos\alpha}.$$

Der betrachtete Kurvenast ist konvex gegen die x-Achse, soweit er oberhalb liegt, konkav, soweit er unterhalb liegt. Das Umgekehrte ist der Fall bei dem in Bezug auf der Halbierungslinie des Winkels α symmetrisch zu dem Aste gelegenen Kurvenast

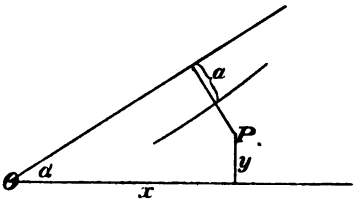


Fig. 8.

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \sin \alpha + \operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + \cos \alpha}.$$

Zusatz: Die oben besprochenen Formen (3) und (4) sind verschiedene Darstellungsformen desselben Kegelschnitts, der im ganzen sechs Brennlinien hat: Zwei sich schneidende Geraden und die vier Geraden, von denen jede nach jeder Richtung hin zu je einer dieser beiden sich schneidenden Geraden parallel ist.[1])

4. *Der Cykl ist eine Abstandslinie, deren Mittellinie zu der Brennlinie parallel ist.* (Hyperbolische Parabel).

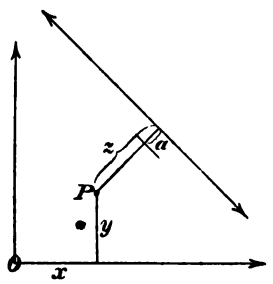


Fig. 9.

Fig. 9 zusammen mit den Formeln in § 3, 2 führt auf die Gleichung

$$y + a = z$$

$$\operatorname{sh} y \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} y \operatorname{sh} a = \operatorname{ch} y \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$$

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{1 + \operatorname{ch} a} = \frac{e^{-x} - \operatorname{sh} a}{1 + \operatorname{ch} a}.$$

Die Kurve ist, soweit sie oberhalb der x-Achse liegt, gegen diese Gerade konvex, unterhalb konkav; man kann Letzteres z. B. daraus folgern, daß sie sich für $x = \infty$ der gegen die Achse konkaven Abstandslinie

$$\operatorname{th} y = \frac{-\operatorname{sh} a}{1 + \operatorname{ch} a} = -\operatorname{th} \frac{a}{2}$$

asymptotisch nähert.

Es gibt noch einen symmetrisch in Bezug auf die Winkelhalbierende des Nullwinkels zwischen x-Achse und der Mittellinie

$$\operatorname{ch} y \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = 0$$

gelegenen Ast

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} a}{1 + \operatorname{ch} a},$$

1) KILLING a. a. O. S. 44. (§ 5, 26, 3).

der die x-Achse überhaupt nicht schneidet und gegen sie konkav ist.

Endlich kann der Fall eintreten, daß die Kurve nur einen Ast hat, und dann, soweit sie oberhalb der x-Achse gelegen ist, gegen sie konkav ist, soweit unterhalb, konvex.

5. *Der Cykl ist eine Grenzlinie.* (Hyperbolische Parabel). Man könnte diesen Kegelschnitt durch Grenzübergang aus § 5, 1 oder § 5, 2 erhalten. Da aber hierbei leicht vorkommen kann, daß man eine Form doppelt erhält oder ganz übersieht, wollen wir die verschiedenen Möglichkeiten direkt ableiten.

Schneidet die Gerade die Grenzlinie nicht, so hat man (Fig. 10 und § 3, 2).

$$m - \eta + z = y,$$

wo

$$e^z = \operatorname{ch} \xi = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}$$

und

$$\operatorname{th} \eta = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x}$$

ist.

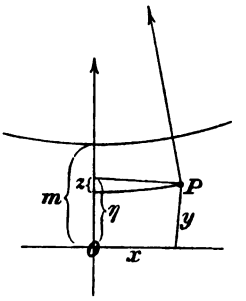


Fig. 10.

Hieraus bekommt man leicht

$$\operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x - e^{-m}}{1 + e^{-m}}.$$

Die Kurve ist gegen die x-Achse konvex.

Schneidet die x-Achse die Grenzlinie, so kommen die beiden Fälle

$$\text{(a)} \quad \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{ch} x - e^{m}}{1 + e^{m}}$$

und

$$\text{(b)} \quad \operatorname{th} y = \frac{e^{m} - \operatorname{ch} x}{e^{m} - 1}.$$

(a) besteht aus einem, (b) aus zwei Ästen. Über Konvexität und Konkavität gibt die Figur 11 Aufschluß.

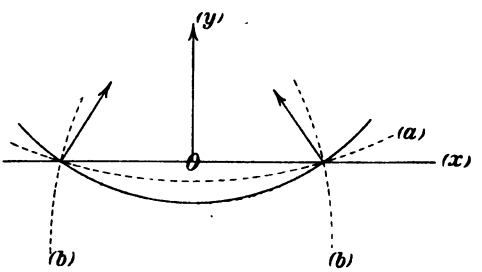


Fig. 11.

Zusatz: (4) und (5) sind ebenfalls zwei Darstellungsformen desselben Kegelschnitts, der also drei

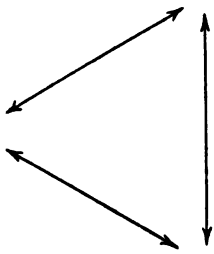


Fig. 12.

Brennlinien hat, die wechselseitig parallel sind in dem Sinne, wie Fig. 12 es angibt.

6. *Der Cykl ist eine Grenzlinie, von der die Brennlinie eine Achse ist.* (Semicirkulare Parabel).

Nimmt man die Brennlinie zur x-Achse und nimmt man die Lage der Grenzlinie wie die Linie $u = 0$ in Fig. 4 an, so bekommt man die Gleichung

$$y = u = x + z$$

oder

$$y - x = z,$$

d. h.

$$e^z = \operatorname{ch} y$$

oder

$$e^y = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x} - 1}}.$$

Diese Kurve (die Herr KILLING in seiner Aufzählung nicht besonders erwähnt) ist oberhalb konvex, unterhalb konkav gegen die x-Achse.

§ 6. Die Kegelschnitte mit einem unendlich fernen Brennpunkt.

Hier begegnen uns nur Formen, die bereits behandelt sind, aber in neuer Darstellung.

1. *Der Kegelschnitt hat einen Brennpunkt.* (Vgl. § 4, 4).

Der Ort der Punkte, die von einem festen Punkte $(y = 0, x = m)$ und der wie in Fig. 4 angenommenen Grenzlinie gleichweit entfernt sind, läßt sich durch Grenzlinienkoordinaten so ausdrücken:

Die Entfernung ϱ des Punktes (u, v) von dem festen Punkte ist zuerst zu bestimmen nach der Formel

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \varrho &= \operatorname{ch} y \operatorname{ch} (x - m) \\ &= \operatorname{ch} y \,(\operatorname{ch} x \operatorname{ch} m - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} m), \\ 2 \operatorname{ch} \varrho &= e^{u-m} + e^{-u+m} \cdot (1 + v^2 e^{2u}). \end{aligned}$$

Die Entfernung ϱ soll gleich u sein.

Hieraus kommt die Gleichung

$$v = e^{-u} \left(1 - e^{-m}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(e^{2u-m} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Kurve liegt symmetrisch zur x-Achse und ist zur Richtung des Parallelismus konvex.

Ersetzt man m durch $-m$, so bekommt man die gegen die Richtung des Parallelismus konkave Kurve

$$v = e^{-u}(e^m - 1)^{\frac{1}{2}}(1 - e^{2u+m})^{\frac{1}{2}}.$$

2. *Der Kegelschnitt hat eine Brennlinie, die nicht Achse der Grenzlinie ist.* (Vgl. § 5, 5).

Es sei a der Abstand der (auf der x-Achse senkrecht stehenden) Geraden von dem Grenzkreis, so bekommt man aus

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{sh} u = \operatorname{ch} y\,(\operatorname{sh} a \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} x)$$
$$= \operatorname{ch} y \operatorname{sh}(a - x)$$

leicht

$$v = e^{-u}(1 + e^{-a})^{\frac{1}{2}}(e^{2u-a} - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Kurve ist gegen die Richtung des Parallelismus konkav. (Vgl. Fig. 10.) Die Kurve

$$v = e^{-u}(1 + e^{a})^{\frac{1}{2}}(e^{2u+a} - 1)^{\frac{1}{2}},$$

die man erhält, wenn die Gerade und die Grenzlinie sich schneiden, ist konkav. (Vgl. Fig. 11 (a).)

Dazu kommt noch die Kurve

$$v = e^{-u}(e^{a} - 1)^{\frac{1}{2}}(e^{-a-2u} + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

(Vgl. Fig. 11 (b).) Sie besteht aus zwei gegen die Richtung des Parallelismus konkaven Zweigen.

3. *Die Brennlinie ist Achse der Grenzlinie.* (Vgl. § 5, 6).

Die Gleichung wird dann, wenn man wieder von Fig. 4 ausgeht,

$$\operatorname{sh} u = \operatorname{sh} y = v\, e^u$$

oder

$$v = \frac{1 - e^{-2u}}{2}.$$

Die Kurve ist konkav gegen die Richtung des Parallelismus.

4. *Weitere Fragen.* Hiermit ist die Theorie der Kegelschnitte soweit dargestellt, als wir sie für unsern Zweck brauchen. Doch soll wenigstens noch auf einige Fragen hingewiesen werden. Es sind z. B. die Systeme konfokaler Kegelschnitte aufzustellen, es sind die Tangentenkonstruktionen anzugeben, wobei sich immer erweisen würde, daß die Tangente den Winkel zwischen zwei „Brennstrahlen" halbiert. Unter „Brennstrahl" ist eine Gerade

zu verstehen, die durch einen Brennpunkt geht oder auf einer Brenngeraden senkrecht steht, oder endlich (bei den Parabeln) eine Achse der zur Definition benützten Grenzlinie ist.

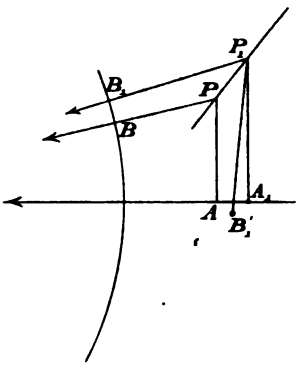


Fig. 13.

Beispiel: Die semicirkulare Parabel. (Fig. 13).

Wir wollen zeigen, daß die Gerade, welche den Winkel BPA halbiert, Tangente ist.

Nehmen wir auf der Geraden einen andern Punkt P_1 an, fällen von ihm aus das Lot auf die Brenngerade $(P_1 A_1)$ und ziehen $P_1 B_1 \parallel PB$. Spiegelt man nun die Gerade $P_1 B_1$ an $P_1 P$, so wird das Spiegelbild B_1' von B_1 unterhalb der Brennlinie zu liegen kommen, daher

$$B_1 P_1 = B_1' P_1 > P_1 A_1 .$$

Also nur der eine Punkt P der Winkelhalbierenden gehört dem Kegelschnitte an, d. h. die Gerade ist Tangente.

Übrigens werden die konfokalen Kegelschnitte

$$v = \frac{1 - e^{-2(u-a)}}{2}$$

orthogonal geschnitten von den konfokalen Kegelschnitten

$$v = \frac{e^{-2(u-b)} - 1}{2},$$

die aus ihnen durch Spiegelung an der Brenngeraden entstehen.

§ 7 Ableitung des Potentials.

Um für die verschiedenen später zu betrachtenden dynamischen Probleme das Potential zu erhalten, müssen wir jetzt, nachdem die Bestimmung der quadratischen Differentialform für das Bogenelement vorausgegangen ist, die LAPLACEsche Differentialgleichung aufstellen. Den aus dieser Gleichung, die in drei verschiedenen Gestalten auftritt, abgeleiteten Anziehungsgesetzen läßt sich auch eine geometrische Bedeutung unterlegen.

1. *Die quadratischen Differentialformen für das Bogenelement.*

Das Bogenelement des L_3 drückt sich in Polarkoordinaten r (Entfernung vom Anfangspunkt O), φ (geographische Länge), ϑ (geographische Breite) so aus[1]):

$$ds^2 = dr^2 + \cos^2\vartheta \operatorname{sh}^2 r\, d\varphi^2 + \operatorname{sh}^2 r\, d\vartheta^2.$$

Führt man rechtwinklige Koordinaten ein (z ist der Abstand des Punktes von der xy-Ebene, y das von dem Fußpunkt von z auf die y-Achse gefällte Lot, x das Stück auf der x-Achse vom Anfangspunkt bis zum Fußpunkt von y), so kommt[2])

$$ds^2 = dz^2 + \operatorname{ch}^2 z dy^2 + \operatorname{ch}^2 z \operatorname{ch}^2 y\, dx^2.$$

Endlich wollen wir noch „Grenzflächenkoordinaten" einführen: u sei die Länge des von einem Punkt auf eine bestimmte Grenzfläche gefällten Lotes, v der krummlinige, ein Stück einer Grenzlinie bildende Radiusvektor, der von einem bestimmten Punkt O auf der Fläche nach dem Fußpunkt des Lotes gezogen ist, φ der Winkel, den dieser Radiusvektor in O mit einer bestimmten Anfangsrichtung bildet.

Macht man nun davon Gebrauch, daß auf der Grenzfläche die euklidische Geometrie gilt[3]), daß außerdem zwei Grenzlinienbogen, die koaxial sind und von denselben Achsen begrenzt werden, sich verhalten[4]) wie 1 zu e^u, unter u den Abstand der beiden Grenzlinien verstanden, so erhält man

$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2 + v^2 e^{2u} d\varphi^2.$$

2. *Die Laplacesche Differentialgleichung und die verschiedenen Potentiale.*

Wenn die quadratische Differentialform für das Bogenelement durch den Ausdruck gegeben ist

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2$$

und man

$$\sqrt{ABC} = D$$

setzt, so lautet bekanntlich[5]) die Laplacesche Differentialgleichung

1) Vgl. „Lobat." S. 290 u. S. 33.

2) Vgl. „Lobat." S. 288 u. S. 31.

3) „Lobat." S. 12.

4) „Lobat." S. 189.

5) Jacobi, Über eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. Crelles Journal 36, 1848 (S. 113—134).

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{D}{A}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{D}{B}\frac{\partial f}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{D}{C}\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right) = 0.$$

Den drei Formen entsprechend, die soeben für das Bogenelement aufgestellt sind, gelangt man also zu den Differentialgleichungen:

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\vartheta \operatorname{sh}^2 r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{ch}^2 z \operatorname{ch} y \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{ch} y \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{2u} v \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(v \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

Wir suchen jetzt in den drei Fällen eine Funktion von r, z und u zu bestimmen, die der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt und erhalten[1])

$$V = c \operatorname{cth} r, \quad V = c \operatorname{th} z, \quad V = c e^{-2u}.$$

Jede dieser Funktionen könnte noch um eine additive Konstante vermehrt werden.

3. *Zusatz:* Für den S_3 erält man, der ersten dieser Gleichungen entsprechend

$$V = c \cdot \cot r.$$

Den beiden andern Gleichungen entsprechen im S_3 keine neuen Gleichungen.

Die zweite Form des Potentials in dem L_3 kann auch aus der ersten abgeleitet werden, indem man von einem Dreieck ausgehend, in bestimmter Weise zwei Ecken festhält und die dritte imaginär werden läßt[2]), wobei der Punkt in das gemeinsame Lot zweier sich nicht schneidenden Geraden übergeht; wenn dagegen der Punkt sich ins Unendliche entfernt, erhält man bei geeignetem Grenzübergang das an dritter Stelle angeführte Potential.

4. *Geometrische Deutung der gewonnenen Anziehungsgesetze.* Wir werden einen Punkt der Reihe nach den Bedingungen unterwerfen:

Er soll sich einmal so bewegen, daß das Potential $c \operatorname{cth} r$ ist, das andere Mal so, daß das Potential $-c \operatorname{th} z$ ist, endlich so, daß das Potential $c e^{-2u}$ ist. Die Kraft ist in den drei Fällen

---

1) Bei SCHERING (vgl. Anmerkung 3 zu Seite 393) ist nur das erste dieser drei Potentiale aufgestellt, sowie das Potential $V = c \cdot \cot r$ für den sphärischen (RIEMANNschen) Raum.

2) Vgl. Seite 164 der in Anm. 1 zu Seite 394 genannten Arbeit.

$$-\frac{\partial}{\partial r}(c \operatorname{cth} r) = \frac{c}{\operatorname{sh}^2 r}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(c \operatorname{th} z) = -\frac{c}{\operatorname{ch}^2 z},$$

$$-\frac{\partial}{\partial u}(c e^{-2u}) = 2c e^{-2u}.$$

Im ersten Fall haben wir also Anziehung (oder Abstoßung) des beweglichen Punktes von einem festen Punkt, die dem Quadrat des hyperbolischen Sinus der Entfernung umgekehrt proportional ist, im zweiten Fall wird der Punkt durch eine Ebene, der Sinus durch den Kosinus ersetzt, im dritten Fall der Punkt durch eine Grenzfläche, der Sinus durch die einfache Exponentialfunktion.

Geht man zum euklidischen Raume zurück, so entspricht dem ersten Fall das Newtonsche Anziehungsgesetz, den beiden anderen die konstante in einer Richtung wirkende Kraft. —

Daraus, daß die Laplacesche Differentialgleichung zur Bestimmung des Potentials benützt wurde, ergibt sich eine weitere Eigenschaft des Anziehungsgesetzes, wenn man bedenkt, daß jede der Differentialgleichung genügende Funktion als Geschwindigkeitspotential für die Strömung einer inkompressibeln Flüssigkeit aufgefaßt werden kann.

Die Anziehung, die auf zwei Flächenelemente wirkt, die zwei verschiedenen Flächen konstanten Potentials angehören und von denselben Kraftlinien begrenzt werden, verhält sich *umgekehrt* wie die *Größe der Flächenelemente.*

In der Tat ist z. B. das Flächenelement einer Kugel vom Radius r in Polarkoordinaten bestimmt durch[1])

$$df = d\varphi d\vartheta \cos\vartheta \operatorname{sh}^2 r,$$

und das entsprechende Flächenelement auf der Kugel vom Radius r_1

$$df_1 = d\varphi d\vartheta \cos\vartheta \operatorname{sh}^2 r_1,$$

also

$$df : df_1 = \operatorname{sh}^2 r : \operatorname{sh}^2 r_1$$

w. z. b. w.

§ 8. Die Planetenbewegung in der S_2.[2])

Obwohl das Ziel der Untersuchung die Planetenbewegung in der L_2 ist, beginnen wir doch mit der S_2, weil hier die Verhältnisse einfacher liegen.[3])

1) Vgl. „Pangeometrie" S. 73.

2) Die Ergebnisse der in diesem Paragraphen ausgeführten Untersuchungen stehen in der oben (Anm. 3 zu Seite 394) genannten Mitteilung.

3) Vgl. S. 395 Anm. 1.

1. *Einführung von elliptischen Koordinaten auf der Kugel.* Wir führen auf der Kugel elliptische Koordinaten ein. Der Radius der Kugel sei k, dann ist in Polarkoordinaten ein Punkt der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - k^2 = 0$$

dargestellt durch

$$x = k \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = k \sin \vartheta \sin \varphi$$
$$z = k \cos \vartheta.$$

ϑ ist das Komplement der geographischen Breite, φ die geographische Länge.

Setzt man $\vartheta = \frac{r}{k}$ und sodann $z_1 = k(1 - \cos \vartheta)$, $k = \infty$, so erhält man die Polarkoordinaten in der Ebene.

Den Übergang zu den elliptischen Koordinaten erhält man durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{e^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{k^2 - \lambda} = 0$$

oder

$$\frac{\cos^2 \varphi}{e^2 + \lambda} + \frac{\sin^2 \varphi}{\lambda} - \frac{\cot^2 \vartheta}{k^2 - \lambda} = 0.$$

$\lambda = 0$, d. h. $y = 0$, $z = \pm x : e$ stellt die Brenngeraden der durch die erste Gleichung gegebenen konfokalen Kegel dar. Einem Wertsystem φ, ϑ entsprechen zwei Wurzeln der Gleichung, die wir mit λ und μ bezeichnen wollen. λ sei diejenige Wurzel, die beim Übergang zur Ebene die Ellipse liefert, μ diejenige, welche die Hyperbel liefert. Dann ist

$$-e^2 < \mu < o < \lambda < k^2.$$

Ferner erhält man leicht:

$$\operatorname{tang}^2 \varphi = -\frac{\lambda \mu (k^2 + e^2)}{k^2 (e^2 + \lambda)(e^2 + \mu)},$$

$$\cot^2 \vartheta = \frac{(k^2 - \mu)(k^2 - \lambda)}{k^2 (\lambda + \mu) - \lambda \mu + k^2 e^2},$$

und für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = \tfrac{1}{4} (\Lambda \, d\lambda^2 + M \, d\mu^2),$$

wo

$$\Lambda = \frac{\lambda - \mu}{\lambda (k^2 - \lambda)(e^2 + \lambda)}$$

und

$$M = \frac{\mu - \lambda}{\mu (k^2 - \mu)(e^2 + \mu)}$$

ist.

2. *Ansatz der dynamischen Differentialgleichungen.*

Der Sinus des sphärischen Abstandes eines Punktes λ, μ vom Brennpunkt $\varphi = 0$, $\vartheta = \text{arctang}\,(e:k)$ ist

$$\sin\varrho = \frac{\sqrt{(k^2-\mu)(e^2+\lambda)} - \sqrt{(k^2-\lambda)(e^2+\mu)}}{(e^2+k^2)}.$$

Hier ist für ϱ derjenige der beiden Abstände genommen, der kleiner als π ist. Diese Annahme soll fortan immer gemacht werden.

Dem Potential wollen wir nach § 7, 3 den Wert erteilen

$$V = \frac{c}{k}\cot\varrho = \frac{c}{k}\cdot\frac{V_1}{V_2},$$

wo

$$V_1 = \sqrt{(k^2-\mu)(k^2-\lambda)} + \sqrt{(e^2+\lambda)(e^2+\mu)}$$

$$V_2 = \sqrt{(k^2-\mu)(e^2+\lambda)} - \sqrt{(k^2-\lambda)(e^2+\mu)}$$

ist.

Die dynamischen Differentialgleichungen (Lagrangeschen Gleichungen der zweiten Form) werden dann

$$\tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}(\lambda' A) - \tfrac{1}{8}\lambda'^2\frac{\partial A}{\partial\lambda} - \tfrac{1}{8}\mu'^2\frac{\partial M}{\partial\lambda}$$
$$= -\frac{\partial V}{\partial\lambda} = +\frac{c}{2V_2^2}\frac{(k^2+e^2)^2}{\sqrt{(k^2-\lambda)(e^2+\lambda)}},$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{d}{dt}(\mu' M) - \tfrac{1}{8}\lambda'^2\frac{\partial A}{\partial\mu} - \tfrac{1}{8}\mu'^2\frac{\partial M}{\partial\mu}$$
$$= -\frac{\partial V}{\partial\mu} = -\frac{c}{2V_2^2}\frac{(k^2+e^2)^2}{\sqrt{(k^2-\mu)(e^2+\mu)}}$$

und das Integral der lebendigen Kraft:

$$\tfrac{1}{8}(A\lambda'^2 + M\mu'^2) + \frac{c}{k}\frac{V_1}{V_2} = h.$$

3. *Die Kegelschnitte als Bahnkurven.* Wir wollen zeigen, daß die Ellipse

$$\lambda = \text{constans} = \lambda_0,$$

wo λ_0 ein beliebiger Wert ist, eine mögliche Bahnkurve ist.

Beim Beweis brauchen wir nur zu zeigen, daß die erste der beiden Gleichungen, wenn man $\lambda = \lambda_0$ setzt, im Einklang mit dem Integral der lebendigen Kraft steht. Die zweite muß dann von selbst erfüllt sein. (Es wird bei dieser Berechnung das Auftreten der zweiten Differentialquotienten vermieden.)

Die erste Differentialgleichung nimmt die einfache Form an:

$$-\tfrac{1}{8}\mu'^2\frac{\partial M}{\partial \lambda}=\left(\tfrac{1}{8}\cdot\frac{\mu'^2}{\mu(k^2-\mu)(e^2+\mu)}\right)=\frac{c(k^2+e^2)^2}{2V_2^2\sqrt{(k^2-\lambda_0)(e^2+\lambda_0)}}.$$

Die linke Seite des Integrals der lebendigen Kraft wird dann

$$\frac{\mu'^2}{8}M+\frac{c}{k}\frac{V_1}{V_2}=\frac{(\mu-\lambda_0)}{\mu(k^2-\mu)(e^2+\mu)}\cdot\frac{1}{2}\frac{c}{k}\frac{(k^2+e^2)^2\mu(k^2-\mu)(e^2+\mu)}{V_2^2\sqrt{(k^2-\lambda_0)(e^2+\lambda_0)}}+\frac{c}{k}\frac{V_1}{V_2}.$$

Wenn man noch den Ausdruck

$$(\mu-\lambda_0)(k^2+e^2)$$

in die Faktoren zerlegt:

$$(\mu-\lambda_0)(k^2+e^2)=V_2\cdot\left(\sqrt{(k^2-\mu)(e^2+\lambda_0)}+\sqrt{(k^2-\lambda_0)(e^2+\mu)}\right),$$

so nimmt nach einigen Umrechnungen die rechte Seite der Gleichung die Form an:

$$\frac{c}{2k}\frac{(k^2-e^2-2\lambda_0)\cdot V_2}{V_2}=\frac{c}{2k}(k^2-e^2-2\lambda_0).$$

Dies steht, da ja λ_0 konstant angenommen ist, in Übereinstimmung mit dem Integral der lebendigen Kraft, w. z. b. w.

4. *Zusatz.* Hiermit ist nun freilich erst gezeigt, daß ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt mit dem Attraktionszentrum zusammenfällt, als Bahnkurve auftreten *kann*.

Um zu zeigen, daß er auftreten muß, hat man so zu schließen:

Durch die Anfangsgeschwindigkeit und die Kraft ist, wie aus den Sätzen über die Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen folgt, das erste Krümmungselement und die ganze Bahnkurve bestimmt.

Andererseits kann man immer einen sphärischen Kegelschnitt (eindeutig) konstruieren, dessen Brennpunkt mit dem Kraftzentrum zusammenfällt und von dem ein Krümmungselement eine beliebig gegebene Lage hat. (Ausgenommen ist nur der Fall, daß die Tangente des Krümmungselementes durch das Kraftzentrum geht, dann findet aber einfach Bewegung in einem größten Kreisbogen statt).

Hieraus läßt sich die aufgestellte Behauptung bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems leicht beweisen. — Unsere Rechnung

zeigt noch, daß eine λ-Kurve nur im Falle der Anziehung auftreten kann, da bei reellem negativen $\mu\,(\mu > -e^2)$ der Ausdruck

$$-\tfrac{1}{8}\,\mu'^2\,\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \tfrac{1}{8}\,\frac{\mu'^2}{\mu\,(k^2-\mu)\,(e^2+\mu)}$$

negativ ist, also auch c negativ sein muß.

Umgekehrt könnte man zeigen, daß (bei der Annahme $\varrho < \pi$) der gegen das Kraftzentrum konvexe Ast der μ-Kurve nur bei Abstoßung auftreten kann.

§ 9. Übertragung auf die L_2.

Die Resultate des vorigen Paragraphen sind analytisch abgeleitet, und haben daher (abgesehen von dem im Zusatz Ausgesprochenen) eine analytische Bedeutung auch dann noch, wenn man alle Größen oder einen Teil derselben durch imaginäre ersetzt. Diesen Umstand können wir anwenden, um zur Bestimmung der Bewegung eines Punktes nach einem der drei in § 7, 2 gegebenen Gesetze in der L_2 überzugehen.

1. *Imaginäre Abbildung der Kugel auf die L_2.*[1])

Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{ch} y \operatorname{ch} x \\ ix_1 &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \\ iy_1 &= \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Dann wird

$$-(z_1^2 + x_1^2 + y_1^2) = -\operatorname{ch} y^2 \operatorname{ch} x^2 + \operatorname{sh} x^2 \operatorname{ch} y^2 + \operatorname{sh} y^2 = -1$$

außerdem

$$\begin{aligned} -(dz_1^2 + dx_1^2 + dy_1^2) &= -(dy \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x + dx \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y)^2 \\ &\quad + (dy \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x + dx \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y)^2 \\ &\quad + dy^2 \operatorname{ch}^2 y \\ &= dy^2 + dx^2 \operatorname{ch}^2 y = ds^2. \end{aligned}$$

Die Kugel $(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1)$ wird hierdurch kongruent auf die L_2 abgebildet, freilich entsprechen den reellen Punkten der Kugel imaginäre der Lobatschefskijschen Ebene und umgekehrt. Den durch eine homogene Gleichung zweiten Grades in $x_1\ y_1\ z_1$ definierten Kegelschnitten auf der Kugel entsprechen Kegelschnitte der L_2 — denn diese Kurven sind durch eine homogene Glei-

1) Vgl. Killing a. a. O. S. 15.

chung zweiten Grades in den WEIERSTRASSschen Koordinaten $\operatorname{ch} y \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} y$ definiert.[1]) Den Brennpunkten entsprechen wieder Brennpunkte.

Wendet man die Transformation auch auf das mechanische Problem an, so folgt, daß die Bewegung mit dem Potential

$$c_1 \cot r_1 = c \operatorname{cth} r \qquad (c_1 = ic)$$

in Kegelschnitten stattfinden muß, wobei das Attraktionszentrum mit dem Brennpunkt zusammenfällt. —

Geht man in geeigneter Weise zur Grenze $r = \infty$ über, oder läßt das Attraktionszentrum imaginär werden, wodurch an Stelle des Punktes eine Gerade tritt, so erhält man die beiden anderen Potentiale (§ 7, 2) und entsprechend die Kegelschnitte in § 6 und § 5.

2. *Übergang zu besonderen Fällen.* Da durch die angewendete imaginäre Transformation noch nicht alle Einzelheiten der reellen Bewegung in der L_2 deutlich werden, wollen wir darauf etwas näher eingehen und zu diesem Zweck den leicht zu beweisenden Satz vorausschicken:

Die Krümmung der Bahnkurve ist so beschaffen, daß die Bahnkurve gegen die Kraftrichtung konkav ist.

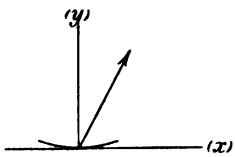


Fig. 14.

Es sei $f(x, y)$ die Kräftefunktion, und für $x = 0$, $y = 0$ sei $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, außerdem $y' = 0$, was sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems immer erreichen läßt. Dann werden die LAGRANGEschen Gleichungen:

$$x'' \operatorname{ch}^2 y + x' y' \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$y'' - x'^2 \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

es wird also, wenn

$$x_0 = y_0 = y_0' = 0$$

ist,

$$y_0'' > 0,$$

d. h. die Kurve berührt die x-Achse von oben, ist konkav gegen die Kraftrichtung (s. Fig. 14).

1) KILLING a. a. O. S. 46.

3. *Ein Fall der Bewegung nach dem Potential* ce^{-2u}. Nehmen wir z. B. (vgl. Fig. 4.) die Bewegung mit dem Potential

$$-\tfrac{1}{2}e^{-2u}$$

und führen wir Grenzlinienkoordinaten ein, so daß

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2$$

wird. Das Integral der lebendigen Kraft wird dann

$$\frac{u'^2 + e^{2u}v'^2}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-u} = h$$

und die zweite der beiden dynamischen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}(v'e^{2u}) = 0.$$

Integrieren wir jetzt und gehen aus von den Anfangsbedingungen

$$u_0 = v_0 = 0,$$
$$u_0' = v_0' = 1,$$

so wird

$$h = \tfrac{1}{2}, \quad \frac{dt}{dv} = e^{2u},$$

und man kann in das Integral der lebendigen Kraft v als unabhängige Veränderliche einführen. Es kommt:

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + e^{2u} = (1 + e^{-2u})e^{4u};$$

daher, mit Berücksichtigung der Anfangswerte

$$v = \frac{1 - e^{-2u}}{2}.$$

Wir bekommen also einen Kegelschnitt mit unendlich fernem Brennpunkt (§ 6, 4) der außerdem gegen die Richtung der Kraft (Richtung des abnehmenden u) konkav ist.

4. *Beispiel einer Bewegung nach dem Potential* $c\,\mathrm{th}\,y$. Setzen wir das Potential gleich

$$-\mathrm{th}\,y,$$

so wird die Kraft y zu vergrößern suchen.

Nehmen wir die Anfangsbedingungen

$$x_0 = y_0 = 0, \quad x_0' = y_0' = 1,$$

so wird der oberhalb der x-Achse (Brennlinie) gelegene Teil einer der in § 5 beschriebenen Kegelschnitte als Brennkurve sich er-

geben, und zwar muß die Bahnkurve gegen die x-Achse konvex sein.

In der Tat wird das Integral der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 \operatorname{ch}^2 y + y'^2) - \operatorname{th} y = 1$$

und die erste Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(x' \operatorname{ch} y) = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{dx}{dt} \operatorname{ch} y = 1.$$

Eliminieren wir jetzt die Zeit aus dem Integral der lebendigen Kraft, so kommt

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{ch} y \sqrt{2(1 + \operatorname{th} y) \operatorname{ch}^2 y - 1} \\ &= e^y \operatorname{ch} y. \end{aligned}$$

Durch Integration folgt unter Berücksichtigung der Anfangswerte

$$e^y = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x} - 1}}.$$

Diese in § 5, 6 untersuchte Kurve erfüllt auch wirklich die soeben auseinandergesetzten Bedingungen alle.

§ 10. Die elliptische Planetenbewegung in der L_2 und die KEPPLERschen Gesetze.

In der hier an den allereinfachsten Fällen durchgeführten Weise ließe sich a posteriori zeigen, daß alle Kegelschnitte als Bahnkurven von Punkten aufzufassen sind, die gewissen einfachen Kräften unterliegen. Von besonderem Interesse aber ist nur die elliptische Bewegung, also die Bewegung eines Punktes, der von einem festen Zentrum mit der Kraft $c : \operatorname{sh}^2 r$ angezogen wird, in einer geschlossenen Bahnkurve. Diese Bewegung entspricht der elliptischen Planetenbewegung im euklidischen Raum. Wir wollen sie genauer untersuchen, indem wir darauf achten, welche Abänderung dabei die KEPPLERschen Gesetze erleiden.

1. *Die elliptische Bewegung.*

Wenn ein beweglicher Punkt von einem festen Punkt mit der Kraft $1 : \operatorname{sh}^2 r$ angezogen wird, so wird bei Einführung von Polarkoordinaten das Integral der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}(r'^2 + \operatorname{sh}^2 r \, \varphi'^2) - \operatorname{cth} r = h.$$

Die zweite Differentialgleichung wird

$$\frac{d}{dt}(\varphi' \operatorname{sh}^2 r) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} \operatorname{sh}^2 r = c.$$

Führt man jetzt in das Integral der lebendigen Kraft mit Hilfe dieses soeben aufgestellten Integrals φ an Stelle von t als unabhängige Veränderliche ein, so kommt

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \operatorname{sh}^2 r \left(2(h + \operatorname{cth} r)\frac{\operatorname{sh}^2 r}{c^2} - 1\right).$$

Setzt man jetzt

$$h = -\operatorname{cth} 2a$$

$$c^2 = \frac{2 \operatorname{sh}(a-e) \operatorname{sh}(a+e)}{\operatorname{sh} 2a},$$

so nimmt das Integral der lebendigen Kraft die Form an

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \operatorname{sh}^2 r \left(-1 - \frac{\operatorname{sh}^2 r \operatorname{ch} 2a}{\operatorname{sh}(a-e)\operatorname{sh}(a+e)} + \frac{\operatorname{ch} r \operatorname{sh} r \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{sh}(a-e)\operatorname{sh}(a+e)}\right).$$

Auf der andern Seite folgt aus der Ellipsengleichung (§ 4, 1) welche sich schreiben läßt:

$$\operatorname{cth} r = \frac{\operatorname{sh} 2a + \operatorname{sh} 2e \cos\varphi}{2 \operatorname{sh}(a+e) \operatorname{sh}(a-e)}$$

durch Differentiation nach verschiedenen Umformungen ebenfalls

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \operatorname{sh}^2 r \left(-1 - \frac{\operatorname{ch} 2a \operatorname{sh}^2 r}{\operatorname{sh}(a-e)\operatorname{sh}(a+e)} + \frac{\operatorname{ch} r \operatorname{sh} r \operatorname{sh} 2a}{\operatorname{sh}(a-e)\operatorname{sh}(a+e)}\right).$$

Demnach ergibt sich als Bahnkurve die Ellipse.

Aus den vorausgeschickten Betrachtungen folgt dieses Resultat schon; wir haben hier nachträglich durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen eine Bestätigung gefunden.

2. *Die Umlaufszeit.* Um die Umlaufszeit zu berechnen haben wir das Integral auszuwerten:

$$T = \frac{2}{c}\int_0^{\pi} d\varphi \operatorname{sh}^2 r,$$

$$= \frac{2}{c}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi (\operatorname{ch} 2a - \operatorname{ch} 2e)^2}{(\operatorname{sh} 2a + \operatorname{sh} 2e \cos\varphi)^2 - (\operatorname{ch} 2a - \operatorname{ch} 2e)^2}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{(\mathrm{sh}\,2a + \mathrm{sh}\,2e\cos\varphi)^2 - (\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e)^2}$$

ist gleich dem Produkt

$$\frac{1}{2\,(\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e)} \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{sh}\,2e\cos\varphi + \mathrm{sh}\,2a - (\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e)} - \frac{1}{\mathrm{sh}\,2e\cos\varphi + \mathrm{sh}\,2a + (\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e)}\right)$$

und man kann jetzt das Integral nach der Formel

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{p + q\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}} \qquad (p^2 > q^2)$$

auswerten.

Es kommt schließlich heraus

$$T = \frac{\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e}}\sqrt{\mathrm{sh}\,2a} \cdot \frac{\pi \cdot 2\,\mathrm{sh}\,a}{\sqrt{(\mathrm{ch}\,2a - \mathrm{ch}\,2e)\cdot 2}},$$

d. h.

$$\underline{T = 2\pi\,\mathrm{ch}\,a\,(\mathrm{sh}\,a)^{\frac{3}{2}}}.$$

(Die entsprechende Formel für die sphärische Geometrie findet sich in der NEUMANNschen Note.)

3. *Abweichungen der KEPPLERschen Gesetze gegenüber der euklidischen Geometrie.* Von welcher Größenordnung sind die Abweichungen der KEPPLERschen Gesetze in der nichteuklidischen Geometrie nun von den entsprechenden Gesetzen in der euklidischen Geometrie?

Wir wollen die Antworten auf diese Fragen, die sich auch dem Vorhergehenden leicht ableiten lassen, zusammenstellen:

Das *NEWTONsche Anziehungsgesetz* ist nach § 7 zu ersetzen durch das Anziehungsgesetz

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 r},$$

das sich von dem Gesetz

$$\frac{1}{r^2}$$

nur um Größen *zweiter* Ordnung unterscheidet.

Das *erste KEPPLERsche Gesetz*, das besagt, daß die Bewegung in einem Kegelschnitt stattfindet, von dem der eine Brennpunkt mit dem Kraftzentrum zusammenfällt, *bleibt erhalten;* nur treten noch andere Formen von Kegelschnitten auf, als in der euklidischen Geometrie (§ 9).

Der *Flächensatz* gilt nicht mehr[1]), statt dessen hat man (§ 10, 1)

$$\frac{d\varphi}{dt}\,\mathrm{sh}^2 r = \text{constans.}$$

Auch hier ist die Abweichung nur von der zweiten Ordnung gegenüber der euklidischen Geometrie; sie wird außerdem um so *geringer*, je mehr sich die Bahn der Kreisform nähert.

Im *dritten* Keplerschen Gesetz ist statt der „mittleren Entfernung", d. h. der *halben großen Achse a* der elliptischen Bahn, die Größe $\mathrm{sh}\,a$ zu nehmen, dazu kommt noch der Faktor $\mathrm{ch}\,a$ (§ 10, 2); es gilt also das Gesetz bis auf Größen zweiter Ordnung.

Sollte also im Raume die Lobatschefskijsche Geometrie gelten, so müßte sich dies in der Planetenbewegung am ersten dadurch zeigen, daß der Flächensatz und das dritte Keplersche Gesetz in der gewöhnlichen Form nicht mehr gelten (die Umlaufszeit wird vergrößert). Doch sind alle Abweichungen nur von der *zweiten* Ordnung.

---

1) Gälte der Flächensatz, so müßte das Integral lauten:

$$\frac{d\varphi}{dt}\,\mathrm{sh}^2\frac{r}{2} = \text{constans.}$$ (Vgl. „Pangeometrie" S. 50.)

Inhaltsübersicht.

		Seite
§ 1.	Einleitung	393—395
§ 2.	Synthetische Ableitung der Kegelschnitte des L_3	395—398
§ 3.	Übergang zur analytischen Ableitung	398—400
§ 4.	Kegelschnitte mit mindestens einem Brennpunkt	401—404
§ 5.	Kegelschnitte mit einer Brenngeraden	404—408
§ 6.	Kegelschnitte mit einem unendlich fernen Brennpunkt	408—410
§ 7.	Ableitung des Potentials	410—413
§ 8.	Die Planetenbewegung in der S_2	413—417
§ 9.	Übertragung auf die L_2	417—420
§ 10.	Die elliptische Planetenbewegung in der L_2 und die Keplerschen Gesetze	420—423

Druckfertig erklärt 13. I. 1903.]

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Protektor der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglied.

Seine Exzellenz der Staatsminister des Kultus und öffentlichen Unterrichts Dr. *Kurt Damm Paul v. Seydewitz.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Ernst Windisch* in Leipzig, Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1904.
Geheimer Hofrat *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1904.
Professor *Hugo Berger* in Leipzig.
—— *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Rat *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.
—— —— *Karl Bücher* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *August Fischer* in Leipzig.
Bibliotheksdirektor Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— —— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Kirchenrat *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Rat *Max Heinze* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrat *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *August Leskien* in Leipzig.

Professor *Friedrich Marx* in Leipzig.
—— *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Mitteis* in Leipzig.
Professor *Eugen Mogk* in Leipzig.
Oberschulrat *Hermann Peter* in Meissen.
Geheimer Hofrat *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
Geheimer Hofrat *Sophus Ruge* in Dresden.
Professor *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrat *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
—— —— *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
—— *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Georg Treu* in Dresden.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Curt Wachsmuth* in Leipzig
—— —— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
Geheimer Hofrat *Erich Marcks* in Heidelberg.
Hofrat *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Regierungsrat *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimer Rat *Wilhelm His* in Leipzig, Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1903.
Geheimer Bergrat *Hermann Credner* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1903.
Professor *Ernst Abbe* in Jena.
—— *Ernst Beckmann* in Leipzig.

Geheimer Hofrat *Wilhelm Biedermann* in Jena.
Geheimer Medizinalrat *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Professor *Victor Carus* in Leipzig.
—— *Karl Chun* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Paul Flechsig* in Leipzig.
—— —— *Ewald Hering* in Leipzig.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Knorr* in Jena.
—— —— *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Medizinalrat *Felix Marchand* in Leipzig.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ernst von Meyer* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Wirklicher Staatsrat Professor *Arthur v. Oettingen* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
—— —— *Karl Rohn* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrat *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
Professor *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rat *Clemens Winkler* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
—— —— *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
—— —— *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Außerordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Professor *Karl Correns* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.
—— *Hans Held* in Leipzig.
—— *Max Siegfried* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimrat *Ludwig Boltzmann* in Wien.
Geheimer Rat *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Geheimer Regierungsrat *Felix Klein* in Göttingen.
—— —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Klasse.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebers, Georg, 1898.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleckeisen, Alfred, 1899.
Fleischer, Heinr. Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert. 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Krehl, Ludolf, 1901.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Miaskowski, August von, 1899.

Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.
Noorden, Carl von, 1883.
Overbeck, Johannes Adolf, 1895.
Pertsch, Wilhelm, 1899.
Peschel, Oscar Ferdinand, 1875.
Preller, Ludwig, 1861.
Ribbeck, Otto, 1898.
Ritschl, Friedrich Wilhelm, 1876.
Rohde, Erwin, 1898.
Roscher, Wilhelm, 1894.
Sauppe, Hermann, 1893.
Schleicher, August, 1868.
Seidler, August, 1851.
Seyffarth, Gustav, 1885.
Socin, Albert, 1899.
Springer, Anton, 1891.
Stark, Carl Bernhard, 1879.
Stobbe, Johann Ernst Otto, 1887.
Tuch, Friedrich, 1867.
Ukert, Friedrich August, 1851.
Voigt, Georg, 1891.
Wachsmuth, Wilhelm, 1866.
Wächter, Carl Georg von, 1880.
Westermann, Anton, 1869.
Zarncke, Friedrich, 1891.

Mathematisch-physische Klasse.

d'Arrest, Heinrich, 1875.
Baltzer, Heinrich Richard, 1887.
Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von, 1868.
Braune, Christian Wilhelm, 1892.
Bruhns, Carl, 1881.
Carus, Carl Gustav, 1869.
Cohnheim, Julius, 1884.
Döbereiner, Johann Wolfgang, 1849.
Drobisch, Moritz Wilhelm, 1896.
Erdmann, Otto Linné, 1869.
Fechner, Gustav Theodor, 1887.
Funke, Otto, 1879.
Geinitz, Hans Bruno, 1900.
Hankel, Wilhelm Gottlieb, 1899.
Hansen, Peter Andreas, 1874.
Harnack, Axel, 1888.
Hofmeister, Wilhelm, 1877.
Huschke, Emil, 1858.
Knop, Johann August Ludwig Wilhelm, 1891.
Kolbe, Hermann, 1884.
Krüger, Adalbert, 1896.
Kunze, Gustav, 1851.
Lehmann, Carl Gotthelf, 1863.
Leuckart, Rudolph, 1898.
Lie, Sophus, 1899.
Lindenau, Bernhard August von, 1854.
Ludwig, Carl, 1895.
Marchand, Richard Felix, 1850.
Mettenius, Georg, 1866.
Möbius, August Ferdinand, 1868.
Naumann, Carl Friedrich, 1873.
Pöppig, Eduard, 1868.
Reich, Ferdinand, 1882.
Scheerer, Theodor, 1875.
Schenk, August, 1891.
Schleiden, Matthias Jacob, 1881.
Schlömilch, Oscar, 1901.
Schmitt, Rudolf Wilhelm, 1898.
Schwägrichen, Christian Friedrich, 1853.
Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August, 1849.

Stein, Samuel Friedrich Nathanael von, 1885.
Stohmann, Friedrich, 1897.
Volkmann, Alfred Wilhelm, 1877.
Weber, Eduard Friedrich, 1871.
Weber, Ernst Heinrich, 1878.
Weber, Wilhelm, 1891.
Wiedemann, Gustav, 1899.
Wislicenus, Johannes, 1902.
Zöllner, Johann Carl Friedrich, 1882.

Leipzig, am 31. Dezember 1902.

Verzeichnis

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1902 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Bautzen. 1898—1901. Bautzen 1902.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1901. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1901, No. 39—53. 1902, No. 1—40. Berlin d. J.

Acta Borussica. Denkmäler der Preuß. Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Herausg. von der Königl. Akademie der Wissenschaften. *Schrötter, Friedr. v.,* Das preußische Münzwesen im 18. Jahrh. Beschreibender Teil. Hft. 1. Berlin 1902.

Politische Korrespondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 27. Berlin 1902.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 34, No. 18. Jahrg. 35, No. 1—20. Berlin 1901 02.

Die Fortschritte der Physik im J. 1901. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 57. Abt. 1—3. Braunschweig 1902.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 3, No. 11—15. Jahrg. 4, No. 1—17. Berlin 1901. 02.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 15 (Jahrg. 1901), No. 19—26. Bd. 16 (Jahrg. 1902), No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 26. (1901/02), No. 5—16. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt N. F. H. 31 (nebst Atlas). 35. Berlin 1900. 01.

Jahrbuch der Kgl. Preuß. geologischen Landesanstalt und Bergakademie. Bd. 21 (1900). Berlin 1901.

Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1901. S.-A. Berlin 1901.

Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf 20 Stationen an der westafrikanischen Küste. Ausgeführt im Auftrage des Reichsmarine-Amtes von *M. Loesch*. Berlin 1902.

Bubendey, Die Grenzen der Seeschiffahrt. Rede, gehalten in der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1902.

12. Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig für die Vereinsjahre 1899/1900 u. 1900/01. Braunschweig 1902.

Neunundsiebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1901. Breslau 1902.

Decaden-Monatsberichte des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts [in Chemnitz]. Jahrg. 4. 1901.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts. Jahrg. 16. III. Jahrg. 17. I. III. Chemnitz 1902.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrage der Königl. Sächs. Staatsregierung hrsg. von *Otto Posse* und *H. Ermisch*. 1. Hauptteil. Abt. B. Bd. 2. Urkunden der Markgrafen von Meißen und Landgrafen von Thüringen 1396—1406. Hrsg. von *H. Ermisch*. — 2. Hauptteil. Bd. 18. Die Matrikel der Universität Leipzig. Hrsg. von *Georg Erler*. Bd. 3. Register. Leipzig 1902.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Jahrg. 47 (1901), No. 3. 4 nebst Beilage. Jahrg. 48 (1902), No. 1. 2 nebst Beilage. Dresden 1902.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1900/01. München 1901.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1901, Jul.—Dec. Dresden d. J.

Verzeichnis der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1902 u. Wintersem. 1902/03. — Personalverzeichnis der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule f. d. Sommersem. 1902 u. Wintersem. 1902/03.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 15—17 (Jahrg. 59). Dürkheim a. d. H. 1902.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 16. 17. Düsseldorf 1902.

Mitteilungen des Vereins für die Geschichte und Altertumskunde von Erfurt. H. 23. Erfurt 1902.

Sitzungsberichte der physikal.-medizinischen Societät in Erlangen. H. 33 (1901). Erlangen 1902.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. f. das Rechnungsjahr 1900/01. Frankfurt 1902.

Helios. Abhandlungen und monatliche Mitteilungen aus dem Gesamtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausg. von *H. Roedel*. Jahrg. 19. Berlin 1902.

Jahrbuch f. d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1902. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1902/03. Freiberg 1902.

Verzeichnis der Vorlesungen auf der Großherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Gießen. Sommer 1902, Winter 1902/03; Personalbestand W. 1901/02, S. 1902. — 77 Dissertationen aus den Jahren 1901 u. 1902.

Leist, A., Die Strafgewalt moderner Vereine (Progr.). — *Hansen, A.*, Die Entwickelung der Botanik seit Linné (Festrede). Gießen 1901. 02.

33. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Gießen 1899—1902.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausg. von *R. Jecht*. Bd. 77. Görlitz 1901.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Klasse. Bd. 4. No. 6. Bd. 5. No. 3. 4. Bd. 6. No. 1—3. Math.-phys. Klasse. Bd. 2. No. 2. 3. Göttingen 1901. 02.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1901, No. 2. 3. 1902, No. 1—5. Philol.-hist. Kl. 1901, No. 3. 4. 1902, No. 1—4 u. Beiheft. Geschäftliche Mitteilungen. 1901, H. 2. 1902, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1901/02. Grimma 1902.

Leopoldina. Amtl. Org. d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 37, No. 12. H. 38, No. 1—10. Halle 1901. 02.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. 74. H. 3—6. Halle 1901. 02.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 3. H. 10. Bd. 4. H. 2. Hamburg 1900. 02.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 11, Heft 1. 2. Heidelberg 1901. 02.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg N. F. Bd. 7. H. 1. 2. Heidelberg 1902.

Mitteilungen der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Herausg. von *W. Valentiner*. I. Karlsruhe 1901.

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Herausg. vom Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika Dar-es-Salâm. Bd. 1. H. 1. 2. Heidelberg 1902.

Programm der Großherzogl. Badnischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Studienjahr 1902/03. — 50jähriges Regierungsjubiläum Seiner Königl. Hoheit des Großherzogs Friedrich. Festvortrag und Ansprachen, gehalten in der Aula der Großh. Badischen Technischen Hochschule. — *Haid, M.*, Die modernen Ziele der Erdmessung (Festrede). Karlsruhe 1901. 02. — 5 Habilitationsschriften und 3 Dissertationen a. d. J. 1900—1902.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1901/02. — Verzeichnis der Vorlesungen. Winter 1901/02, Sommer 1902. — *Gering, H.*, Über weissagung und zauber im nordischen altertum (Rektoratsrede). — *Mühlan, Ferd.*, Martinus Seusenius' Reise in das heilige Land i. J. 1602 (Progr.). — *Niemeyer, Theod.*, Recht und Sitte (Festrede). Kiel 1902. — 135 Dissertationen a. d. Jahren 1900 u. 1901.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirtschaft, Domänen u. s. w. N. F. Abteilung Helgoland. Bd. 5. H. 1. Abteilung Kiel. Bd. 6. Kiel und Leipzig 1902.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 42 (1901). Königsberg 1901.

Jahresbericht des Nikolaigymnasiums in Leipzig. Bericht über das Schuljahr 1901/02.

8. u. 9. Jahresbericht des Instituts für rumänische Sprache (Rumänisches Seminar) zu Leipzig. Herausg. von *Gust. Weigand.* — *Weigand, Gust.*, Linguistischer Atlas des dacorumänischen Sprachgebietes. Lief. 3. Leipzig 1902.

Adreßbuch des Vereins Kunstgewerbe-Museum zu Leipzig. Leipzig 1902.

Jahresbericht und Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg 1900—1902. Magdeburg 1902.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Meißen von Juli 1901 bis Juli 1902. Meißen 1902.

Abhandlungen der math.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 21, Abt. 3. München 1902.

Abhandlungen der histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 2. München 1902.

Abhandlungen der philos.-philolog. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 22, Abt. 1. München 1902.

Flasch, Adam, Heinrich von Brunn (Festrede). — *Pöhlmann, Rob.*, Griechische Geschichte im 19. Jahrhundert (desgl.). — *Voit, Karl v.*, Max von Pettenkofer zum Gedächtnis (Rede). München 1902.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1901, H. 4. 1902, H. 1. 2. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1901, H. 5. 1902, H. 1. 2. München d. J.

43. Plenarversammlung der histor. Kommission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Sekretariats. München 1902.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 17. H. 1. 2. München 1902.

Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 14. — Jahresbericht für 1900. Nürnberg 1900. 01.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1901. Hft. 1—4. — Katalog der Gewebesammlung des Germanischen Nationalmuseums. Teil 2, verfaßt von *Hans Stegmann.* Nürnberg 1901.

Mitteilungen des Altertumsvereins zu Plauen. 15. Jahresschrift aus d. J. 1901/02 nebst Beilage. Plauen 1902.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 2, No. 1—12. Jahrg. 3, No. 1—6. Posen 1901. 02.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 16, H. 1. 2. Jahrg. 17, H. 1. Posen 1901. 02.

Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 7—10. Berlin 1902.

Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 12. Potsdam 1902.

Veröffentlichung der Kgl. Württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung. — Relative Schwermessungen. II. S. A. Stuttgart 1902.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 11 (1902). Stuttgart d. J.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 51, 1. Bd. 52, 1. Dresden 1901. 02.

Zuwachs der Großherzogl. Bibliothek zu Weimar i. d. J. 1899 bis 1901. Weimar 1902.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 55. Wiesbaden 1902.

Sitzungsberichte der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1900, No. 5. Jahrg. 1901, No. 1—7. Jahrg. 1902, No. 1. 2. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 34, No. 7—11. Bd. 35, No. 1—3. Würzburg 1901. 02.

Österreich-Ungarn.

Građa za povjest kńiževnosti hrvatske na svijet izdaje Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti (Agram). Kń. 3. U Zagrebu 1901.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Svez. 16. 1901. U Zagrebu 1902.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 30, 1. Zagrebiae 1902.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Kń. 146—148. U Zagrebu 1901. 02.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znanosti i umjetnosti. Svez. 21. U Zagrebu 1901.

Vjestnik hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. N. S. Svez. 6. U Zagrebu 1902.

Vjestnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskog zemaljskog arkiva. God. 4, Svez. 1—4. U Zagrebu 1901. 02.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Svez. 6, II. Kń. 7, Svez. 1. U Zagrebu 1900. 01.

Zeitschrift des Mährischen Landesmuseums. Herausg. von der Mährischen Museumsgesellschaft (Deutsche Sektion). Bd. 1. H. 1. 2. Brünn 1901.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1902. Budapest d. J.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akademie d. Wissenschaften. Bd. 7 (1899). Budapest 1901.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 17, szám. 9—10. Budapest 1901.

Értekezések a Történeti Tudományok Köréből. Köt. 19, Sz. 6—8. Budapest 1901. 02.

Archaeologiai Értesitö. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 21, szám. 3—5. Köt. 22, szám. 1—3. Budapest 1901. 02.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 19, füz. 3—5. Köt. 20, füz. 1. 2 Budapest 1901. 02.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar. tudom. Akad. Köt. 28, sz. 1. Budapest 1902.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 31, füz. 3. 4. Köt. 32, füz. 1. 2. Budapest 1901. 02.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1901. Budapest 1902.

Werke aus dem Verlage der Ungar. Akademie d. Wissenschaften. o. O. u. J.

Karácsonyi, János, A magyar nemzetségek a XIV. század Közepéig. Köt. 2. ebd. 1901.

Margalits, Repertorium Croaticum (Norvát történelmi Repertorium) Köt. 2. Budapest 1902.

Thaly Kálmán, Gróf Eszterházy Antal kurucz generális tábori könyve 1706—1709. Budapest 1901.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1902. Winter-Sem. 1902/03. — Übersicht der akademischen Behörden im Studienjahre 1902/03.

Beiträge zur Kunde steiermärk. Geschichtsquellen. Herausg. von dem historischen Vereine für Steiermark. Bd 31. Graz 1901.

Mitteilungen des historischen Vereines für Steiermark. Hft. 48. 49. Graz 1902. — Der historische Verein für Steiermark von 1850—1900. Ein Gedenkblatt seines 50jährigen Bestehens und Wirkens. Graz 1900.

Mitteilungen des naturhistorischen Vereins für Steiermark. H. 38 (1901). Graz 1902.

Berichte des naturwissenschaftl.-medizinischen Vereines in Innsbruck. Jahrg. 26 (1900/01). Innsbruck 1901.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. 3. Folge. H. 45. Innsbruck 1901.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1900, No. 9. 10. 1901, Math.-naturw. Cl. 1901, No. 8. 9. 1902, No. 1—7. Philol. Cl. 1901, No. 9. 10. 1902, No. 1—7. Krakau d. J.

Atlas geologiczny Galicyi (Wydanictwo Komis. fizyograf. Akad. umiej. w Krakowie) zesz. 9. 13 (Text u. Atlas). W. Krakowie 1901.

Bibliografia historyi Polskich (Wydan. Akad. umiej. w Krakowie) No. 41. Kraków 1902.

Biblioteka pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 41. W Krakowie 1902.

Katalog literatury naukowej Polskiej. Tom. 1, zesz. 4. Tom. 2, zesz. 1. 2. Krakow 1902.

Materialy antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne wydawane staraniem komisyi antropologicznej Akad. umiejętn. w Krakowie. Tom. 3, 5. W Krakowie 1898. 1901.

Rocznik akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1900/01. W Krakowie 1901.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydział filologiczny. T. 33. (Ser. II. T. 18). — Wydział historyczno-filozoficzny. T. 41—43. (Ser. II. T. 16—18). — Wydział matemat.-przyrodniczy. T. 38—41 (Ser. II. T. 18. 19. Ser. III. T. 1. A. B.). W Krakowie 1901. 02.

Scriptores rerum Polonicarum. Tom. 18 (Editionum Collegii histor. Academiae lit. Cracov. No. 60). W Krakowie 1901.

Sprawozdania komisyi do badánia historyi sztuki w Polsce. T. 6. 7, zes. 1. 2. W. Krakowie 1900. 01.

Sprawozdania z czynności i posiedzeń Akad. umiej. w Krakowie. Tom. 7, No. 7.

Polskie słownictwo chemiczne uchwalone przez Ankietę chemiczną w Grudnin 1900—01. Krakow 1902.

Federowski, Mich., Lud białoruski na Rusi litewskiej. Tom. 2, 1. (Wydanictwo komisyi antropol. Akad. umiej.) W Krakowie 1902.

Mitteilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 14, 3—6. Jahrg. 15, 1. 2. Laibach 1901. 02.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 11. V. Ljubljani 1901.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. 1902. No. 9—10. Lemberg d. J. — Etnografičnyj zbirnyk. T. 10. U Lvovi 1901.

Lud, Organ towarzystwa ludoznawczego we Lwowie. T. 8, zesz. 1—4. We Lwowie 1902.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 12. 1902. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čisl. 20. 21. V Praze 1901. 02.

Archiv pro lexikografii a dialektologii. Čisl. 3. V Praze 1901.

Académie des sciences de l'Empereur François Joseph. I. Bulletin international. Résumés des travaux présentés. Année 6. 1901. (Médecine. Sciences mathématiques et naturelles.)

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. I. Ročn. 9. Tříd. II. Ročn. 10. — V Praze 1901.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 10, Čisl. 1—9. V Praze 1901.

Národni Písně Moravské nově nasbírané sebral *Frant. Bartoš.* Seš. 2 V Praze 1901.

Spisy Jana Amosa Komenského. Čisl. 4. ib. 1901.

Ott, Emil, Soustavný úvod ve studium nového řízení soudniho. Dil. III. ib. 1901.

Pavlíček, Antonin, Chek ve vědě a zákonodárstvi ib. 1902.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1901. Prag 1902.

Spisův poctěných jubilejní cenou Král. České Společnosti nauk v Praze čisl. 12. 13. Praze 1901.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. Jahrg. 1901. — Philos.-histor.-philolog. Klasse Jahrg. 1901. Prag 1902.

Bericht über die Säkularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho de Brahe. — *Studnička, F. J.*, Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe. Weitere Beiträge. Prag 1901.

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen geleitet von *A. Hauffen*. Bd. 4. H. 1. Prag 1901.

Bibliothek deutscher Schriftsteller in Böhmen. Bd. 12. Adalbert Stifters sämtliche Werke. Bd. 14. Herausg. von *Adalb. Horcicka*. Bd. 13. Ausgewählte Werke des Grafen Kaspar von Sternberg. Bd. 1. Herausg. von *Aug. Sauer*. Prag 1901. 02.

Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit der Gesellschaft zur Förd. deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. 1901. Prag 1902.

Urkunden-Regesten aus den ehemaligen Archiven der von Kaiser Josef II. aufgehobenen Klöster Böhmens. Mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutsch. Wissensch. etc. herausg. von *Ant. Schubert*. Innsbruck 1901.

Czapek, F., Untersuchungen über die Stickstoffgewinnung und Eiweißbildung der Pflanzen. Ausgeführt mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutsch. Wissensch. etc. S.-A. Braunschweig 1902.

Spitaler, Rud., Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluß auf die Lagenveränderungen der Erdachse. Mit Unterstützung der Gesellsch. z. Förd. deutsch. Wissensch. etc. Gotha 1901.

Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1901. Prag 1902.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1901. Jahrg. 62. Prag 1902.

Ordnung der Vorlesungen an der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag. Somm.-S. 1902. Winter-S. 1902/03.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 40, No. 1—4. Prag 1901/02. — Festschrift. ebd. 1902.

Sitzungsberichte des deutschen naturw.-medizin. Vereins für Böhmen „Lotos". N. F. Bd. 21. Prag 1901.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Preßburg. N. F. H. 13. Preßburg 1902.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 24 (1901), No. 12. Anno 25 (1902), No. 1—11. Spalato d. J.

Anzeiger der Kais. Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Kl. 1901. No. 27. 1902. No. 1—21.

Archiv für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Kommission der Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 89, II. 90. 91, I. Wien 1901.

Denkschriften der Kais. Akademie d. Wissensch. Mathem.-naturw. Kl. Bd. 69. 70. 73. Philol.-hist. Kl. Bd. 47. Wien 1901.

Fontes rerum Austriacarum. Österreichische Geschichtsquellen, hrsg. v. d. histor. Kommission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 52—54. Wien 1901.

Mitteilungen der Erdbeben-Kommission der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. N. Folge. No. 1—8. Wien 1901. 02.

Südarabische Expedition. Veröffentlicht von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. 3. *Jahn, Alfred,* Die Mehri-Sprache in Südarabien. Bd. 4. *Müller, Dav. Heinr.,* Die Mehri- und Soqotri-Sprache. I. Wien 1902.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Kl. Bd. 109 (1900) I, No. 8—10. II^a, No. 10. III, No. 8—10. Bd. 110 (1901) I, No. 1—7. II^a, No. 1—10. II^b, No. 1—9. III, No. 1—10. — Philos.-histor. Kl. Bd. 143 (1901).

Tabulae codicum mss. praeter graecos et orientales in Bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum. Vol. IV. Vindobonae 1902.

Abhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 1, H. 3. 4. Bd. 2. H. 1. Wien 1901. 02

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 51, H. 9. 10. Bd. 52, H. 1—8. Wien 1901. 02.

Publikationen für die internationale Erdmessung. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. u. k. militärgeographischen Institutes in Wien. Bd. 18. Trigonometrische Arbeiten. Wien 1902.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 16, No. 1—4. Bd. 17, No. 1. 2. Wien 1901. 02.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 6 H. 1. Suppl. Bd. 17, H. 5. Bd. 19, H. 1. Wien 1901. 02.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 51 (1901), H. 2. Jahrg. 52 (1902), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1901, No. 15—18. Jahrg. 1902, No. 1—10. Wien d. J.

Mitteilungen der Sektion f. Naturkunde des Österreichischen Touristen-Club. Jahrg. 13. Wien 1901.

Publikationen der v. Kuffner'schen Sternwarte. Herausg. von *Leo de Ball.* Bd. 6, T. 1. Wien 1902.

Belgien.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin. V. Sér. des Annales. 10. Part. II, 3—7. Anvers 1902.

Expédition antarctique Belge. Résultats du voyage du S. Y. Belgica en 1897—1899 sous le commandement de *A. de Gerlache de Gomery.* Rapports scientifiques: Astronomie. — Météorologie. — Océanographie. — Botanique. — Zoologie. — Note relative aux Rapports scientifiques. Anvers 1901. 02.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1902. (Année 68). Bruxelles d. J.

Académie Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 1901. 1902, No. 1—8. — Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. 1901. 1902, No. 1—8. Bruxelles d. J.

Mémoires de l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 54, Fasc. 1—5. Bruxelles 1900. 01.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 56. 61. 62, Fasc. 1—3. Bruxelles 1901. 02.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 59, Fasc. 1—3. Bruxelles 1901. 02.

Analecta Bollandiana. T. 21. Bruxelles 1902.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 45. Bruxelles 1901.

Bulletin du Jardin botanique de l'État à Bruxelles. Vol. 1, Fasc. 1—3. Bruxelles 1902.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 18, Fasc. 2. T. 19, Fasc. 1. Louvain 1901.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1901, No. 6. 1902, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 6. Række. T. 5, No. 2. Naturv. og math. Afd. 6. Række. T. 9, No. 8. T. 10, No. 3. 4. T. 11, No. 1—4. T. 12, No. 1. 2. Kjøbenhavn 1901. 02.

England.

Aberdeen University Studies. No. 4. 5. Aberdeen 1901.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 11, P. 4—6. Cambridge 1902.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 19, P. 2. Cambridge 1902.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 31, P. 12—14. Vol. 32, Sect. A, P. 1. 2. Dublin 1901. 02.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 9, P. 2—4. Dublin 1900. 01.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Vol. 7, No. 8—13. Dublin 1900. 01.

Economic Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 1, P. 2. Dublin 1899.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 23, No. 5. 6. Vol. 24, No 1—3. Edinburgh 1901. 02.

Proceedings of the R. Institution of Gr. Britain. Vol. 16, P. 2. 3. London 1901. 02.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 69—71, No. 454—468. — Yearbook of the R. Society 1902. — Reports to the Malaria Committee. Ser. 6—7. — Reports of the Evolution Committee. Rep. 1. London 1902.

Transactions of the R. Society of London. Vol. 194. B. 197. A. 198. A. London 1901. 02.

Catalogue of scientific Papers (1800—1883). Suppl. Vol. Compiled by the Royal Society of London. Vol. 12. London 1902.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 34. No. 767—771. 777—789 London 1900. 01.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1902, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 45, P. 2. Vol. 46, P. 2—6. Manchester 1901. 02.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1901/02. — Notes from the Manchester Museum. No. 9. — Museum Handbooks: *Marshall, A. M.,* Descriptive Catalogue of the embryonal models. Edit. 2 by *J. S. Hickson.* Manchester 1902.

Publications of West Hendon House Observatory. No. II. Sunderland 1902.

Frankreich.

Mémoires des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. VI. Sér. T. 1. Bordeaux 1901.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1900/01. Paris et Bordeaux d. J.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1900 à Mai 1901. Note de *G. Rayet.* Bordeaux 1901.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. T. 32 (Sér. IV, T. 2). Cherbourg 1901—02.

Mémoires de l'Académie des sciences, bell.-lettres et arts de Lyon Sciences et lettres. Sér. III. T. 6. Paris et Lyon 1901.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouv. Sér. T. 47. 48. Lyon 1901.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 5—9. Paris et Lyon 1901. 02.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 12. Marseille 1902.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des sciences. Sér. II. T. 3, No. 1. Montpellier 1901. — *Bonnet, Émile,* Catalogue de la Bibliothèque de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier 1901.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Sér. III. T. 2, Fasc. 3. 4. T. 3, Fasc. 1. Paris et Nancy 1901. 02.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1901. Paris d. J.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du comité international. T. 12. Paris 1902.

Journal de l'École polytechnique. Ser. II. Cah. 7. Paris 1902.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1901, No. 4—8. 1902, No. 1—4. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 18, Suppl. T. 19, No. 1—11. Paris 1901. 02.

La Revue de Paris. Année 9, No. 21—24. Paris 1902.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 29, No. 4. T. 30, No. 1—3. Paris 1901. 02.

Niederlein, Gust., Ressources végétales des Colonies Françaises. Représentées dans les collections de „l'Office Colonial" du ministère des Colonies Paris 1902.

Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'ouest. Tom. 10, No. 3. 4. T. 11, No. 1. 2. Rennes 1901. 02.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Sér. VIII. T. 3, Sem. 2. Sér. X. T. 1. Toulouse 1881.

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. Ann. 13. 14 (No. 51—54). Toulouse 1901. 02.

Bibliothèque méridionale, publ. sous les auspices de la Faculté des lettres de Toulouse. Ser. I, T. 7. Ser. II, T. 7. Toulouse 1901. 02.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Ser. II. T. 3, Fasc. 2—4. T. 4, Fasc. 1. 2. Paris et Toulouse 1901. 02.

Annales de l'Observatoire astronomique magnétique, et météorologique. T. 4. Toulouse et Paris 1901.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 24 (1900), No. 7—12. Année 25 (1901), No. 1—6. Athen, Paris d. J.

Mitteilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abteilung. Bd. 26, H. 2—4. Bd. 27, H. 1. 2. Athen 1901. 02.

Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας. T. 14. No. 1—3. Athen 1902.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1901. Amsterdam 1902.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 4. 8, No. 1. 2. Sect. II. Deel 8, No. 1—6. Deel 9, No. 1—3. Amsterdam 1901. 02.

Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel 4. Amsterdam 1901.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 10. Amsterdam 1902.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoefftiano indicti in annum 1903. — *Pascoli, Joh.,* Centurio. Carmen in certamine poetico Hoefftiano praemio aureo ornatum. Acced. 5 poemata laudata. Amstelodami 1902.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 10, P. 1. 2. Amsterdam 1901. 02.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 5. St. 3. Amsterdam 1901.

Programma van jaarlijksche prijsvragen voor het j. 1902, ter beantwoording uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 7, Livr. 1—5. Harlem 1902.

Herdenking van het 150-jarig bestaan van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen op 7. Juni 1902. 's Gravenhage 1902.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 8, P. 1. Harlem 1902.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1900/01. Leiden 1901.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1900/01. Leiden 1901.

Tijdschrif voor Nederlandsche taal-en letterkunde. Uitgeg. vanwege de Maatschapp. d. Nederl. Letterkunde. Deel 19, Afd. 3. 4. Deel 20, Afd. 1. 2. Leiden 1900. 01.

Université de Leide. Recueil de travaux du Laboratoire Boerhaave, publ. par *D. E. Siegenbeek van Henkelom*. T. 1. 2. Leide 1899.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 2, Stuk 3. Nijmegen 1902. — Prodromus Florae Batavae. Vol. 1, P. 2. Edit. altera. Nijmegen 1902.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 21. Juni 1901. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 22. Jun. 1901. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 22. 's Gravenhage 1901.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Ser. III. No. 14. 16. Amsterdam 1901.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. 5. Reeks. III, Afl. 2. IV, Afl. 1. Utrecht 1902.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 13—23. Firenze 1901. 02.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 10 (1899/1900). Classe d. lettere. Appendice. — Rendiconti. Acireale 1901. 02.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di science matematiche e naturali. Vol. 19 (Ser. III, Vol. 10), Fasc. 5—8. Milano 1902.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 34. Milano 1901.

Opere matematiche di *Francesco Brioschi*. Pubbl. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 2. Milano 1902.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Ser. III. Vol. 3. Modena 1901.

Tosti, L., Della vita di San Benedetto. Ediz. illustrata. Montecassino 1892.

S. Hieronymi Tractatus contra Originem de visione Esaiae, quem nunc primum ex codd. mss. Casinensibus *Ambrosius M. Amelli* edid. et illustr. Montecassino 1901.

Società Reale di Napoli. Rendiconto delle tornate e dei lavori della R. Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 15 (1901) Magg.—Dic. — Atti della R. Accad. delle scienze fisiche e matematiche. Ser. II. Vol. 10. Rendiconto. Ser. III. Vol. 8 (Anno 41), Fasc. 1—7. Napoli 1901. 02.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 17. Padova 1901. — Elenco delle pubblicazioni periodiche spedite alla R. Accademia di science, lettere ed arti in Padova dal 1779 al presente in cambio delle sue pubblicazioni. Padova 1902.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 14 (1900), Fasc. 6. T. 16 (1902), Fasc. 1—5. Palermo d. J.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze nat. ed. econom. di Palermo. Vol. 23. Palermo 1901.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Filosofia e filologia. Vol. 15. Pisa 1902.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 18. — Processi verbali. Vol. 12. Lugl.-Nov. Vol. 13. Genn.—Marzo. Pisa 1901. 02.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. II (Notizie degli scavi), Vol. 9, Nov.—Diz. 1901. Vol. 10, 1.—9. 1902. — Rendiconti. Vol. 10 (1901), Fasc. 9—12. Vol. 11 (1902), Fasc. 1—10. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Ser. V. Rendiconti. Vol. 10 (1901), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 11 (1902) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. Rendiconto dell' adunanza solenne del 1. Giugn. 1902. Roma d. J.

Mitteilungen des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 16, H. 4. Bd. 17, H. 1. 2. Register zu Bd. 1—10. Roma 1901. 02.

Studi Sassaresi, pubbl. per cura di alcuni professori della Università di Sassari Anno 1. Sez. 2, Fasc. 2. Sassari 1901.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 13, No. 1—10. Siena 1901. 02.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 37, Disp. 1—15. Torino 1901. 02.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 51. Torino 1902.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1901 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1902.

Luxemburg.

Recueil des mémoires et des travaux publ. par la Société botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 15 (1900—01). Luxembourg 1902.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 10, No. 5. 6. Anul 11, No. 1—4. Bucuresci 1901. 02.

Rußland.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. 43 (1900/01). Helsingfors 1901.

Fennia. Bulletin de la Société de géographie de Finlande. 10. 16. 18. Helsingfors 1894—1901.

Geologist Öfversiktskarta öfver Finland. Section C 2. — Meddelander från industristyrelsen i Finland, H. 32. 33. Helsingfors 1902.

Godičnyj Akt Imp. Kazanskago Universiteta. 1901. Kasan d. J. — 4 Dissertationen a. d. J. 1901. 02.

Učenyja Zapiski Imp. Kazanskago Universiteta. 1901, T. 67, No. 9. 10. T. 68, No. 12. T. 69, No. 1—10. Kasan 1900—02.

Universitetskija Izvěstija. God 41, No. 10—12. God 42, No. 1—10. Kiev 1901. 02.

Jahrbuch für Genealogie, Heraldik und Sphragistik. 1900. Herausg. von der Kurländischen Gesellschaft f. Literatur u. Kunst. Mitau 1902.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1902. No. 1—4. Moscou d. J.

Učenyja zapiski Imp. Moskovskago Universiteta. Otděl estestvenno-istor. Vyp. 14—16. Otd. fisiko-mat. V. 17. 18. Otd. istor-filol. V. 28—31. Otd. jurid. V. 18. Moskva 1898—1901.

Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Ser. V. T. 13, No. 4. 5. T. 14. 15. T. 16, No. 1—3. St. Pétersbourg 1900—02.

Catalogue des livres publ. par l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. I. Publications en langue russe. S. Pétersbourg 1902.

Annales de l'Observatoire physique central, publ. par. *M. Rykatchew*. Année 1901, P. 1. 2. St. Pétersbourg 1902.

Comité géologique, St. Pétersbourg. Bulletins. T. 20, No. 7—10. T. 21, No. 1—4. Mémoires. Vol. 15, No. 4. Vol. 17, No. 1. 2. Vol. 18, No. 3. Vol. 19, No. 1. Vol. 20, No. 2. St. Pétersbourg 1901. 02.

Acta Horti Petropolitani T. 19, Fasc. 3. S. Peterburg 1902.

Scripta botanica Horti Universit. Imper. Petropolitani. Fasc. 17. 18. Petropoli 1900—02.

Trudy Peterburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 28, 4. 5. T. 31, 3. T. 32, 2—4. Protokoly zasědanij. Vol. 32, Liv. 1, No. 1—6. Vol. 33, Liv. 1, No. 1—3. S. Pétersbourg 1901. 02.

Obozrěnie prepodavanija nauk v Imp. S. Peterburgsk. Universitetě na 1901/02.

Zapiski istoriko-filologičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgskago Universiteta. Čast 50, 3. 54, 3. 60—66. S. Peterburg 1902.

Katalog russkich knig biblioteki Imp. S. Peterburgsk. Universiteta. Tom 2. S. Peterburg 1902.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 45. Riga 1902.

Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums im J. 1898. Tiflis 1901.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 15. Stockholm 1900—1901/02.

Bergens Museum. Aarbog for 1901. 1902, H. 1. 2. — Aarsberetning for 1901. Bergen 1902.

Sars, G. O. An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 4, P. 3—10. Bergen 1902.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1901. Christiania d. J.

Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1901, No. 1—5. Hist.-filos. Kl. 1901, No. 1—6. Kristiania 1901. 02.

Den Norske Nordhavs Expedition 1876—1878. 28. Zoologi. Christiania 1901.

Nyt magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 39. Christiania 1901.

Det Kon. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1899/1900. Kristiania 1901.

Kong. Vetenskaps- och Vitterhets Samhälles Handlingar. 4. Följd. 4. Göteborg 1902.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 36 (1900) I. II.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler*. 25. 26. Stockholm 1901. 1902.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 27. Stockholm 1902.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 35. Stockholm 1901. 02.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Åarg. 58. (1901.) Stockholm 1901/02.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 39 (Ser. II, Bd. 25). Aarg. 1897. Stockholm 1902.

Jac. Berzelius, Självbiografiska anteckningar. Utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Stockholm 1901.

Duner, N. C., Tal vid Kongl. Vetensk.-Akad. minnesfest den 24 Oktober 1900 300-årsdagen af Tycho Brahes död. Stockholm 1901.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Månadsblad. 26 (1897), 29 (1900). Stockholm 1902. 01.

Bidrag till vår Odlings Häfder. Udg. af Nordiska Museet. 8. Stockholm 1901.

Medelanden från Nordiska Museet. 1898. 99. Utg. af *J. Böttiger*. Stockholm 1902.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 22 (1901). Stockholm d. J.

Det Kong. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1900. Trondhjem 1901.

Festskrift udg. i anledning af Trondhjems 900 aars Jubiläum 1897 af det Kong. Norske Videnskabernes Selskab. Trondhjem 1897.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. 20, 1. Upsaliae 1901.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 33 (1901). Upsal 1901/02.

Skrifter utgifn af Kongl. Humanistiska Vetenskaps-samfundet. Bd. 4. Upsala, Leipzig 1895—1901.

Malmström, C. G., Bidrag till Sveriges Medeltidshistoria. Upsala 1902.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweizer. Gesellschaft für die gesamten Naturwissenschaften (Nouveaux Mémoires de la Société Helvétique des sciences naturelles). Bd. 38. Basel 1901.

Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitätsschriften 1901/02. Basel 1902.

Argovia. Jahresschrift der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 29. Aargau 1901.

Baseler Chroniken. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd. 6. Leipzig 1902.

Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd. 1, H. 2. Bd. 2, H. 1. Basel 1902.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 13, H. 3. Basel 1902.

Burckhardt, Fr., Zur Erinnerung an Tycho Brahe 1546—1601. Vortrag. Basel 1901.

Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus den J. 1901 (No. 1500—1518). Bern 1902.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 45 (1901/02). Chur 1902.

Index lectionum in univers. Friburgensi per mens. aest. 1902 et per mens. hiem. 1902/03. — Behörden, Lehrer u. Studenten. Wintersem. 1901/02. Sommersem. 1902. — Bericht über das Studienjahr 1900/01. Freiburg.

Collectanea Friburgensia. N. S. Fasc. 3. 4. Friburgi 1902.

Baumhauer, Heinr., Über den Ursprung und die gegenseitigen Beziehungen der Krystallformen. Rektoratsrede. Freiburg 1901.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 34, P. 1. 2. Genève 1902.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 3, No. 4. Bd. 4, No. 1. Zürich 1902.

Schweizerisches Landesmuseum. 10. Jahresbericht (1901). Zürich 1902.

Rahn, J., Zur Statistik schweizerischer Kunstdenkmäler. Bog. 11. 12.

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz (Matériaux pour la carte géologique de la Suisse). Lief. 1. 3. 4. 5. 7, 1. 2. 8. 8, 1. 9—14. 16—25. 27. 28. 30. N. Folge. Lief. 1—11. 13. — Geotechnische Serie. Lief. 1. Bern 1862—1902.

Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft in Zürich. 1901, No. 1. Zürich 1901.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 46, H. 3. 4. Jahrg. 47, H. 1. 2. — Neujahrsblatt a. d. J. 1902 (104. Stück). Zürich d. J.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 63. 64. — Godišnjak. 14 (1900). — Beograd 1901. 02.

Svečani pomen posvetnom dobrotvoru pokojnom Niciforu Dučiću. Beograd 1901.

Srpske etnografske Sbornik. Knjiga 3. 4. U Beograd 1901.

Sbornik za istorii, jesik i knjichevnost spiskoga naroda. Knjig. 1. U Beograd 1902.

Afrika.

Geodetic Survey of South Africa. Vol. 2. Cape Town 1901.

Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1900. Vol. 1. 2. Washington 1901.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 32 (1901). Boston d. J.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 21, No. 1. Vol. 22, No. 2. Vol. 23, No. 1. New Haven 1901. 02.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 12. Rochester 1901.

Miscellaneous scientific Papers of the Alleghany Observatory. N. Ser. No. 4—7. 1902.

Maryland Geological Survey. Vol. 4. Baltimore 1902.

Johns Hopkins University Circulars. No. 155—160. Baltimore 1901. 02.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 24, No. 1. Baltimore 1902.

American Journal of Philology. Vol. 22, No. 2. 3. Baltimore 1901.

American chemical Journal. Vol. 26, No. 4—6. Vol. 27, No. 1—3. Baltimore 1901. 02.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. 19, No. 10—12. Ser. 20, No. 1. Baltimore 1901. 02.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 37, No. 6—23. Boston 1901. 02.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences (Boston). Vol. 12, No. 5. Cambridge 1902.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 29, No. 15—18. Vol. 30, No. 1. 2. — Occasional Papers. 6. Boston 1901.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 38, No. 5, 6. Geol. Ser. No. 7. Vol. 39, No. 2—4. Vol. 40, No. 1—3. Vol. 41, No. 1. Cambridge, Mass. 1902.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 26, No. 1—3. Vol. 27, No. 1. 2. Cambridge, Mass. 1902.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. for 1901/02. Cambridge, Mass. 1902.

Bulletin of the Chicago Academy of Sciences. [Vol. 1,] No. 4. Vol. 2, No. 3. Chicago 1900.

The John Crerar Library. 7. Annual Report for 1901. Chicago 1902.

Field Columbian Museum. Publications. No. 60—65. Chicago 1901. 02.

Bulletin of the Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Reproduction Series. No. 1. 2. — Pharmacy Series. No. 1. — Mycological Series. No. 1. 2. — Mycological Notes by *G. G. Lloyd*. No. 5—9. Cincinnati 1900. 01.

Tufts College Studies. No. 7. College Hill 1902.

The University of Missouri Studies. Vol. 1, No. 2. 3. Columbia, Miss. 1902.

31. Annual Report of the board of trustees of the Ohio State University for 1900/01. P. 1. 2. Columbus 1901.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick.* Vol. 11, No. 4. Vol. 12, No. 1—3. Granville 1901. 02.

Proceedings of the Indiana Academy of sciences 1900. 01. Indianapolis 1901. 02.

Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. II. Vol. 8. 9, No. 1—3. Lancaster 1901. 02.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 3, No. 1—4. Lancaster and New York 1900. 01.

The Kansas University Quarterly. Vol. 10, No. 3. — Science Bulletin. Vol. 1. No. 1—4. Lawrence 1901. 02.

Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. No. 69. 70. 72. 74. Lincoln 1901/02.

15th Annual Report of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Lincoln 1902.

18. Annual Report of the Agricultural Experiment Station of the University of Wisconsin. Madison 1901.

Boletin del Instituto geologico de México. No. 15. 1901.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 13, Cuad. 3. 4. T. 16, Cuad. 2—6. T. 17, Cuad. 1—3. México 1901/02.

Bulletin of the Wisconsin Natural History Society. Vol. 2, No. 1—3. Milwaukee 1902.

19. and 20. Annual Report of the board of trustees of the Public Museum of Milwaukee. 1901/02.

Bulletin of the University of Montana. No. 3. Missoula, Mont. 1901.

Lick Observatory, University of California. [Mount Hamilton.] Bulletin. No. 13—20. 22—26. Sacramento 1901. 02.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 14, P. 1. 2. New York 1901.

American Museum of Natural History. Bulletin. Vol. 10. 11, P. 4. Vol. 14. 15, P. 1. Vol. 17, P. 1. 2. — Memoirs. Vol. 1, P. 7. Vol. 4, P. 3. Anthropology. Vol. 4. 6. — Annual Report for 1901. New York 1901. 02.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 33, No. 5. Vol. 34, No. 1—4. New York 1901. 02.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 6, No. 1—3. Norwood Mass. 1902.

Oberlin College. Laboratory Bulletin. No. 11. 12. — The Wilson Bulletin. No. 33. 39. 40. Oberlin, Ohio 1902.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada. Ser. II. Vol. 7. Ottawa 1901.

Geological Survey of Canada. General Index to the Reports of Progress, 1863—1884. — Geological Map of the Dominion of Canada. Western Sheet. No. 783. Ottawa 1900.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Vol. 53, P. 3. Vol. 54, P. 1. Philadelphia 1901. 02.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 40, No. 167. Vol. 41, No. 169. 170. Philadelphia 1901. 02.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. N. S. Vol. 20, P. 3. Philadelphia 1902.

Proceedings of the California Academy of sciences. Ser. III. Botany. Vol. 2, No. 3—9. — Zoology. Vol. 2, No. 7—11. Vol. 3, No. 1—4. — Occasional Papers. No. 8. San Francisco 1902.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 11, No. 6—10. Vol. 12, No. 1—8. St. Louis 1901. 02.

University of Toronto Studies. History and Economics. Vol. 2, No. 1. — Biolog. Ser. No. 2. — Physiolog. Ser. No. 3. — Review of Historical Publications relating to Canada 1901. Toronto 1901. 02.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 6, Art. 1. Urbana 1901.

Memoirs of the National Academy of sciences. Vol. 8. Mem. 5. 6. Washington 1898. 1902.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1898/1900. Vol. 2. Washington 1901.

Annual Report to the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 18 (1896/97), II. Washington 1899.

U. S. Department of Agriculture. North American Fauna. No. 22. Washington 1902.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 42. 43. No. 1259. 1312—1314. Washington 1902.

Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1309. Washington 1901.

Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin. No. 26. Washington 1901.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for 1899/1900. — V. Report of the U. S. National Museum. Washington 1902.

Publications of the U. S. Naval Observatory. 2. Ser. Vol. 2. Washington 1902.

U. S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication No. 7. Washington 1902.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1900, to June 30, 1901. Washington 1902.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey. The Geology and Mineral Resources of a portion of the Copper River District, Alasca. — Reconnaissances in the Cape Nome and Norton Bay Region, Alasca, in 1900. — Mineral Resources of the United States. Washington 1901.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 177—190. 192—194. Washington 1901. 02.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 21. 1899/1900, P. II.—V. VII. Washington 1901.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 52, Entr. 4—6. T. 53, Entr. 1—6. T. 54, Entr. 1—3. Buenos Aires 1901. 02.

Boletin de la Academia nacional de sciencias de la Republica Argentina. T. 17, Entr 1. Cordoba 1902.

Anales del Museo nacional de Montevideo. Tom. 4, Fasc. 22. Montevideo 1901.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1902. (Anno 18.) Rio de Janeiro 1902.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1901. 1902, Jan.—Junho. Rio de Janeiro 1901. 02.

Archivos do Museu nacional do Rio de Janeiro. Vol. 10. 11. Rio de Janeiro 1899. 1901.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 11, Livr. 4. 5. Santiago 1902.

Asien.

Notulen van de algemeene en directie vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 39, Afl. 3. 4. Deel 40, Afl. 1. Batavia 1901. 02.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 45, Afl. 1. 3. 4. Batavia 1902.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Ann. 1674. 's Gravenhage, Batavia 1902.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 52, St. 1. Deel 54, St. 1. Deel 55, St. 1. Batavia, 's Hage 1901. 02.

Publications of the Maharaja Takhtasingji Observatory, Poona Vol. 1. Bombay 1902.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 61. Ser. X, Deel 5. Batavia 1902.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 23. 1900. Batavia 1902. — Regenwaarnemingen in Nederl. Indie. Jaarg. 22. ib. 1901.

Indian Museum. Annual Report. 1900/01. — *Schulze, Franz, Eilhard,* An Account of the Indian Triaxonia collect. by the Roy. Indian Marine Survey Ship Investigator. Transl. by *R. von Lendenfeld.* Calcutta 1902.

The Kyōto Imperial University Calendar for the year 2561/62 (1901/02). Kyōto 1902.

Publications of the Earthquake Investigation Committee. No. 8—11. Tōkyō 1902.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. 16, 2. Art. 6. Vol. 17, 3. Art. 7—9. Tōkyō 1902.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 5, No. 2. 4. Tokio 1901. 02.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 4, P. 2. 3. Tokyo 1902.

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. S. Vol. 14, P. 2. Vol. 15, P. 1. Melbourne 1902.

Report of the 8. Meeting of the Australian Association for the advancement of science. 1900. Melbourne 1901.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 35 (1902). Abstract of Proceedings. Sept. 1901—Aug. 1902. Sydney d. J.

2. Einzelne Schriften.

Bericht über die Feier von Rud. Virchows 80. Geburtstag am 13. Oktober 1901.

Comes, O., Chronographical Tables for Tobacco. Napoli 1900.

Dassen, C. C., Metafisica de los conceptos matemáticos fundamentales y del Analysis llamado infinitesimal. Tesis. Buenos Aires 1901.

Fritsche, H., Die tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg 1902.

Garbell, A., Einführung in den Selbstunterricht der russischen Sprache nach der Methode Toussaint-Langenscheidt. Brief 1—23. Berlin.

Les hypothèses scientifiques émises par *Zénobe Gramme* en 1900. Paris 1902.

Hatzidakis, Georg N., Ἀκαδημεικὰ ἀναγνώσματα ἑλληνικὴ, λατινικὴ καὶ ἰνδικὴ γραμματικὴ. Tom. 1. Athen 1902.

Holitscher, Ph.., Märchen-Dichtungen. Breslau 1902.

Janet, Ch., Études sur les fourmis, les guêpes et les abeilles. Note 17—19. Paris 1898 und 6 weitere Sep.-Abzüge.

Leyst, Ernst, Über den Regenbogen in Rußland. Moskau 1901.

Marchand, Felix, Der Prozeß der Wundheilung (Deutsche Chirurgie. Lief. 16). Stuttgart 1901.

Passalsky, P., Anomalies magnétiques dans la region des mines de Krivoï-Roy. Odessa 1901.

Pettinelli, Parisino, Un nuevo procedimiento per trovare molte relazioni note ed ignote fra le quantitá fisiche. Cuneo 1902.

Riefler, S., Das Nickelstahl-Kompensationspendel D. R. P. No. 108 870. München 1902.

Rossetti, Gaetano, I grandi errori del mondo medico, ecclesiastico, astronomico e dei governanti. Libro II. Torino s. a.

Saint-Lager, Histoire de l'Abrotonum. Paris 1900.

— —, La perfidie des synonymes dévoilée à propos d'un Astragale. Lyon 1901.

Stetefeld, Rich., Die drei Kältemaschinen-Systeme: Ammoniak, schweflige Säure und Kohlensäure. S.-A. München 1902.

Vogel, H. C., Über die Bewegung des Orionnebels im Visionsradius. S.-A. Berlin 1902.

Worel, Karl, Direkte Photographie in natürlichen Farben auf Papier. S.-A. Wien 1902.

INHALT.

Seite

Heinrich Liebmann, Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Mit 14 Textfiguren 393

Verzeichnis der Mitglieder der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften I

Verzeichnis der eingegangenen Schriften VI

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

[illegible]

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

VIERUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1902.

SONDERHEFT.

Wilhelm His, Zur Vorgeschichte des deutschen Kartells und der internationalen Association der Akademien.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1902.

Einzelpreis 70 Pfg.

Zur Vorgeschichte des deutschen Kartells und der internationalen Association der Akademien.

Im Auftrage der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zusammengestellt und dem Kartelltage in Göttingen (15. Mai 1902) vorgelegt von dem o. M. Wilhelm His.

In den Tagen vom 16. zum 20. April v. J. hat in Paris unter dem Vorsitz von Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, die internationale Association der Akademien zum erstenmal eine Generalversammlung abgehalten. Aus Delegierten von Akademien der verschiedenen Kulturstaaten bestehend[1]), verfolgt diese Körperschaft das Ziel, wissenschaftliche Unternehmungen größeren Umfangs anzuregen und durchzuführen, die ein geordnetes Zusammenwirken der Kräfte verschiedener Länder beanspruchen.

An der in Paris abgehaltenen Versammlung haben 79 Gelehrte teilgenommen, großenteils Männer von bedeutendem Namen, an ihrer Spitze der greise Historiker Mommsen. Der großartige Empfang, der ihnen zunächst durch das Institut de France, sodann aber durch den Präsidenten der Republik, durch den Unterrichtsminister und durch den Conseil municipal de la Ville de Paris zu Teil geworden ist, hat gezeigt, wie hoch in diesen Kreisen die Bedeutung der Association gewertet wird.

Im ganzen haben schon diesmal 12 Vorschläge und Pläne zu größeren wissenschaftlichen Unternehmungen auf der Tagesordnung gestanden. Ein Teil dieser Pläne hat, als gehörig vorbereitet, die Billigung der vereinigten Akademien gefunden, andere

1) Es waren in Paris 18 Akademien Europas und Amerikas vertreten: außer den Akademien von Frankreich, Deutschland, England und den übrigen Großstaaten, auch die von Holland, Belgien, Schweden, Norwegen und Dänemark.

sind besonderen Kommissionen zu eingehender Prüfung zugewiesen worden. Ferner sind als Ergebnis der Beratungen ebenso einfache als zweckmässige Organisationsbestimmungen der neubegründeten Körperschaft zur Annahme gelangt, und endlich hat man sich über Grundsätze geeinigt, nach denen durch Vermittlung der Akademien Manuskripte aus Archiven und Bibliotheken von einem Land in ein anderes verliehen werden können. Im ganzen ist zu erwarten, daß die volle Bedeutung der Association, als einer für die Regierungen maßgebenden wissenschaftlichen Macht, im Laufe der Jahre immer mehr zur vollen Entfaltung gelangen wird. Das eine Ergebnis der diesmaligen Pariser Zusammenkunft darf aber als besonders erfreulich schon jetzt lebhaft begrüßt werden; es ist dies das einträchtige Zusammenarbeiten der Gelehrten verschiedener Länder und verschiedener Richtungen an Aufgaben gemeinschaftlichen Interesses.

Die internationale Association der Akademien verwirklicht zwar einen schon von LEIBNIZ ausgesprochenen Gedanken, in Wirklichkeit reicht aber ihre Geschichte nur auf 10 Jahre zurück, und sie knüpft unmittelbar an die des deutschen akademischen Kartells an, aus dem sich die internationale Association organisch herausentwickelt hat. Noch sind die Traditionen alle frisch, und diesen Vorteil benützend, hat es unsere Gesellschaft für erwünscht gehalten, die Vorgeschichte der beiden Institutionen nach ihren entscheidenden Daten zusammenzustellen und den übrigen Körperschaften des Kartells behufs weiterer Ergänzung vorzulegen.

Die offiziellen Akten weisen zunächst auf Wien als Ausgangspunkt der Bewegung hin. Das erste gedruckte Schriftstück ist ein vom 12. Juni 1892 datiertes, von Herrn VON HARTEL der Wiener Akademie überreichtes Promemoria. An der Hand einzelner, dem sprachwissenschaftlichen Gebiete entnommenen Beispiele weist Herr VON HARTEL nach, wie bedauerliche Verschwendungen an Arbeit und an Mitteln stattfinden, wenn verschiedene Akademien, ohne sich unter einander zu verständigen, dieselben oder verwandte wissenschaftliche Unternehmungen durchzuführen suchen. Eine geordnete Arbeitsteilung zwischen den wissenschaftlichen Körperschaften verschiedener Nationen kann Früchte reifen, die auf andere Weise unerreichbar sind.

Eine umfassende, den Philologen speziell am Herzen liegende Aufgabe lag damals in der Herstellung eines den Bedürfnissen der Zeit entsprechenden Thesaurus linguae latinae vor. Die

Dringlichkeit dieser Aufgabe hat auch den eigentlichen Anstoß zu einem die Einigung der Akademien herbeiführenden Vorgehen gegeben. Schon bei einer 1889 in Görlitz abgehaltenen Philologenversammlung hatte M. Hertz behufs Herstellung des Thesaurus eine Kooperation der Akademien von Berlin, München und Wien in Anregung gebracht, und als es sich in einer vom preußischen Minister, Herrn von Gossler, zu Prüfung der Thesaurusfrage einberufenen Konferenz (bestehend aus den Herren Althoff, Mommsen, Vahlen, Diels und Hertz) herausstellte, daß die zur Durchführung des Unternehmens geforderten Mittel die Kräfte jeder einzelnen Akademie weit überschritten, kam bei den bezüglichen Verhandlungen neuerdings der Gedanke einer kooperativen Tätigkeit verschiedener Akademien zur Sprache. Dieser Gedanke hat rasch Wurzeln gefaßt und er hat in wesentlich erweiterter Form in dem Promemoria des Herrn von Hartel seinen Ausdruck gefunden.

Herr von Hartel hat das Prinzip einer Vereinbarung gelehrter Körperschaften sofort allgemein erfaßt, und er hat es nach Rücksprache mit seinem naturwissenschaftlichen Kollegen, Herrn Ed. Suess auf das Gesamtgebiet wissenschaftlicher Arbeit ausgedehnt. Als weiter ausschauenden Plan hat er dabei einen Verband der gelehrten Körperschaften von Italien, Frankreich, England und Amerika mit denen von Deutschland und Österreich-Ungarn in Aussicht genommenen, für den Anfang aber ein akademisches Kartell innerhalb von Deutschland und Österreich.

Die k. Akademie der Wissenschaften in Wien hat sich den Vorschlägen des Herrn von Hartel angeschlossen und sie den Akademien und Gesellschaften von Berlin, München, Göttingen und Leipzig empfehlend zur Kenntnis gebracht. Die fünf Gesellschaften haben auf den 29. Januar 1893 einen Delegiertentag in Leipzig vereinbart, und hier sind auf Grund eines von den Herren Mommsen und Suess vorgelegten Entwurfes die Statuten des deutschen Kartells festgestellt worden. Diese haben aber bekanntermaßen die Billigung von nur vier der in Leipzig vertretenen Gesellschaften gefunden, die Berliner Akademie hat es abgelehnt, sich daran zu beteiligen und sich die Entscheidung ihrer Anteilnahme an einzelnen Unternehmungen von Fall zu Fall vorbehalten.

Die hinsichtlich der ersten Anregung zur Kartellbildung so bestimmt nach Wien hinweisenden Spuren haben die math.-phys.

Klasse veranlaßt, den jetzigen Präsidenten der k. Akademie der Wissenschaften in Wien, Herrn Prof. ED. SUESS um weiteren Aufschluß zu bitten, und er ist so gut gewesen, in einem lebendig und klar geschriebenen Schriftstück die folgenden Hergänge zu schildern. Ich darf den Wortlaut dieses Schreibens hier mitteilen:

„Im Frühjahre 1892 besuchten mich eines Tages in meinem Arbeitszimmer an der Universität THEODOR MOMMSEN und WILHELM VON HARTEL, damals Vorstand unserer kais. Hofbibliothek, jetzt unser Unterrichtsminister. Ich bekleidete zu jener Zeit die Stelle des Generalsekretärs der Akademie. Sie machten mir Mitteilung von den Schwierigkeiten, welchen die Herausgabe des Thesaurus linguae latinae begegnet sei, und von den Vorteilen, welche ein internationales Übereinkommen den Studien der durch sie vertretenen Richtungen bringen würde. Sie frugen ferner, ob ein ähnliches Übereinkommen nicht auch für naturwissenschaftliche Forschungen ersprießlich wäre, und erörterten weiter die mögliche Art der Durchführung dieses Gedankens.

Mit diesem Besuche beginnt die Geschichte des Kartells. Das Verdienst der ersten Anregung fällt den beiden Genannten, THEODOR MOMMSEN und WILHELM VON HARTEL, zu.

Der Nutzen einer solchen Einrichtung für alle Zweige der Naturforschung ist ein so handgreiflicher, daß die Antwort auf die mir gestellten Fragen sich von selbst ergab. Zum Zwecke der weiteren Durchführung wurde verabredet, daß VON HARTEL eine Denkschrift ausarbeiten und unserer Akademie vorlegen solle. Diese Denkschrift datiert vom 12. Juni 1892 und kann als das erste Aktenstück in dieser Sache gelten. „Eine Vereinigung der gelehrten Körperschaften der Kultur-Nationen" wird in Aussicht genommen; sogar der seither in Umlauf gekommene Ausdruck „Internationale Association" findet sich schon vor (S. 3). Für den „ersten Anlauf" (S. 9) soll ein akademisches Kartell mit Berlin, Göttingen, Leipzig und München angestrebt werden.

Die Anträge VON HARTEL's wurden am 16. und 17. Juni 1892 zur Kenntnis beider Klassen unserer Akademie gebracht; eine Kommission wurde zu ihrer Vorberatung eingesetzt und am 30. Juni beschloß die Akademie im Sinne dieser Anträge. Am 1. Juli richtete ich ein vertrauliches Schreiben an ZITTEL, welcher mir schon am 11. Juli nicht nur seine freudige Zustimmung, sondern auch jene des Präsidenten PETTENKOFER und der drei

Klassensekretäre übermittelte. Am 5. Juli habe ich mir erlaubt, Ihnen, verehrter Herr Geheimrat, zu schreiben; Sie antworteten mir bereits am 7. in warmer Gutheißung, ebenso einige Tage später Ludwig, zugleich im Namen Ribbecks. Nach Göttingen wollte ich persönlich gehen. Von verschiedenen Seiten kamen Zuschriften, durchwegs hochwillkommener Art, und am 20. Juli versuchte unsere Akademie eine erste formelle Einladung zur Vorberatung dieser Sache an die vier genannten Orte.

Bald darauf hatte ich die Ehre, Sie und Ihre Herren Kollegen in Leipzig zu sprechen; in Göttingen traf ich mit dem Sekretär der k. Gesellschaft, Sauppe, und vielen ausgezeichneten Gelehrten zusammen, welche sich ohne Ausnahme zustimmend und aufmunternd aussprachen.

Unterdessen hatte Mommsen einen Entwurf von Statuten ausgearbeitet und am 27. Juli uns als eine Grundlage für weitere Beratungen übersendet. Diese konnten erst nach den Ferien beginnen. Anfangs Oktober war ich in Berlin; nie werde ich die Liebenswürdigkeit vergessen, mit welcher Mommsen mir sein Haus öffnete und mich mit vielen hervorragenden Gelehrten bekannt machte. Mit Freude erinnere ich mich ferner eines langen und anregenden Gespräches bei Gelegenheit eines Besuches bei Althoff. Ablehnung, und zwar reine und unverhüllte Ablehnung, habe ich nur bei Dubois-Reymond gefunden; sie war schmerzlich wegen meiner besonderen Hochachtung für die Person Dubois'. Sie ist aber auch die einzige Ablehnung gewesen, welche mir in ganz Deutschland begegnet ist.

Ende Oktober trat unsere Akademie in allen wesentlichen Punkten dem Mommsenschen Statutenentwurfe bei. Von Göttingen, Leipzig und München kamen nacheinander die Erklärungen des Beitrittes. Eine persönliche Zusammentretung wurde gewünscht.

Am 17. November schrieb die Berliner Akademie an uns, sie bezweifle nicht, daß sich Fälle und Formen denken lassen, in welchen ein solcher Verband zur Erreichung wichtiger und anders kaum zu erstrebender Ziele dienen könne. Unsere Akademie möge, nachdem sie in dieser Sache die Initiative ergriffen, Ort und Zeit bestimmen, wo Abgesandte der fünf Körperschaften zusammenzukommen und über die weiteren Schritte zu beraten hätten. Es liege übrigens nicht in der Absicht, die Delegierten mit Vollmacht zu bindenden Beschlüssen auszustatten, sondern es soll deren Mandat lediglich konsultativer Natur sein.

Die Wiener Akademie hatte bereits am 11. November die vertrauliche Anfrage an die k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften gerichtet, ob Leipzig als der Ort der ersten Zusammentretung genehm sei, und bald traf auch die aufs freundlichste zustimmende Antwort aus Leipzig ein. Im Dezember ergingen dann die Einladungen zu einer Zusammentretung in Leipzig am 29. und 30. Januar 1893.

Den Inhalt der am 29. Januar im Sitzungssaale Ihrer philosophischen Fakultät vorgenommenen Beratung der Statuten darf ich hier als bekannt voraussetzen, insbesondere auch den Umstand, daß vonseiten Berlins der Wunsch ausgesprochen wurde, es möge innerhalb der ersten zwei Jahre nach Gründung des Verbandes der deutschen Körperschaften keine Erweiterung durch Heranziehung weiterer gelehrter Gesellschaften stattfinden, sondern erst mit der gemeinsamen Arbeit der deutschen Gesellschaften Erfahrung gesammelt werden, während Wien sofortige Anknüpfungen wünschte, und auch kein diesbezüglicher Vorbehalt in die Statuten aufgenommen worden ist. Es wurde hierauf in außerprotokollarischer Besprechung die Vertheilung der Aufgabe, weitere Einladungen zu erlassen, auf einzelne Körperschaften und Personen unternommen.

Die Berliner Akademie schrieb am 10. Februar: „So bereit sie wäre, die am 20. Juli 1892 beantragte Vereinbarung zu treffen, oder sich über ein Zusammenwirken für bestimmte Unternehmungen mit den dazu geneigten Körperschaften von Fall zu Fall zu verständigen, so trage sie doch Bedenken, auf Grund der Statuten, welche von der Delegiertenversammlung in Leipzig am 29. Januar entworfen worden sind, in einen Verband einzutreten, von dem sich zur Zeit nicht absehen lasse, welchen Umfang er annehmen, welche Einrichtungen er erforderlich machen und welche Verbindlichkeiten er ihr auferlegen würde."

Am 17. Februar zeigten Leipzig, am 1. März München und am 18. März Göttingen die endgiltige Gutheißung der Leipziger Beschlüsse an, und somit war das Kartell, wie es heute noch besteht, begründet.

Die Bestrebungen nach internationalem Verband wurden in weiten Kreisen bekannt, BÜHLER meldete aus England von der besonders warmen Zustimmung, welche sie bei Lord KELVIN und Sir ARCHIBALD GEIKIE gefunden hatte. Infolgedessen wandte sich am 31. März die Wiener Akademie nach Göttingen, Leipzig und

München mit einem Vorschlage auf Einladung einer Anzahl anderer Akademien znm Beitritte. Die Antworten waren nicht völlig übereinstimmend. Göttingen meinte, man solle sich zunächst auf London und Paris beschränken. Leipzig wünschte Aufstellung einer Gesammtliste, dann staffelweises Vorgehen. München sprach sich dahin aus, man möge sich vorläufig auf Göttingen, Leipzig, München und Wien beschränken, fallweises Zusammengehen mit Berlin suchen und den Thesaurus als eine Gelegenheit dazu ansehen.

Der Wunsch, auch Berlin als ein Mitglied des Deutschen Kartells zu sehen, war aber ein allgemeiner, und wir hofften, daß sich eine Brücke werde finden lassen. Am 31. Mai sagte der Kurator unserer Akademie, Erzherzog Rainer, bei Eröffnung der feierlichen Sitzung der Akademie: „Ich darf der Hoffnung Ausdruck geben, daß zunächst auch diejenige Akademie, deren eines ihrer hervorragendsten Mitglieder zuerst an diesem Plane mitgewirkt hatte, sich diesem Verbande nicht lange fernhalten werde, und daß der bisher nur unter vier wissenschaftlichen Körperschaften geschlossene Bund eine stets fruchtbringendere Erweiterung finden möge."

Berlin hatte, wie gesagt, in Leipzig den Wunsch ausgesprochen, daß durch die nächsten zwei Jahre keine weitere Einladung zum Beitritte erfolge. Dies war abgelehnt worden. Die Wiener Akademie glaubte die Lage zu vereinfachen und den Beitritt von Berlin zu erleichtern, indem sie dem abgelehnten Wunsche dennoch tatsächlich Rechnung tragen wollte. Am 30. Juni beschloß sie einstimmig, dermalen von jeder weiteren Einladung anderer Körperschaften abzusehen, jedoch grundsätzlich an der von ihr vertretenen Anschauung festzuhalten; durch einzelne ihrer Mitglieder sollte mit einzelnen englischen und französischen Gelehrten noch weiter Fühlung genommen werden. Hiervon wurde den kartellierten Körperschaften und auch Berlin am 2. Juli 1893 Kenntnis gegeben. Zugleich wurde mitgeteilt, daß für den Thesaurus eine Geldbewilligung vonseiten der Regierung erfolgt und ein Mitglied der Akademie in die Thesaurus-Kommission delegiert worden sei. „Die Akademie", wurde im Schreiben vom 2. Juli gesagt, „würde sich glücklich schätzen, wenn es ihr gelungen wäre, mit diesen Beschlüssen die Linie gefunden zu haben, auf welcher sich die Wünsche und Absichten der geehrten Verbandskörperschaften gemeinsam bewegen, und

auf welcher weitere Erfolge und eine, wenn auch verlangsamte, Annäherung an das größere Ziel zu hoffen wären."

Das Weitere ist allgemein bekannt; der Thesaurus ist unter Teilnahme Berlins in glücklichen Fortgang gebracht worden; manche andere Unternehmung wurde vonseiten des engeren Kartells erfolgreich eingeleitet; vielfache erfreuliche persönliche Annäherung hat stattgefunden; wir haben aber viel länger als zwei Jahre gewartet; dann sind aus Anlaß des Internationalen Kataloges die Vertreter der Royal Society in Göttingen erschienen, dann kam die Übereinkunft von München, dann Wiesbaden, endlich Paris.

Hiermit schließt mein Bericht. Zehn Jahre werden binnen kurzem seit dem Besuche Mommsen's und v. Hartel's vergangen sein. Das Deutsche Kartell lebt und hat manchen guten Erfolg erzielt. Die internationale Association ist unter guten Anzeichen ins Leben getreten. Zwei lebhafte Wünsche bleiben uns wohl allen, welche an diesem Verlaufe der Dinge teilgenommen haben, zurück, nämlich der Eintritt Berlins in das Deutsche Kartell und die tunlichste weitere Verdichtung der freundschaftlichen persönlichen Beziehungen."

Der hier mitgeteilte Bericht von Herrn Suess beginnt mit dem Besuch von Prof. Mommsen in Wien. Schon im Promemoria des Herrn von Hartel ist indessen eine in Berlin stattgehabte Vorverhandlung erwähnt, die allerdings speziell auf den Thesaurus linguae latinae sich bezogen hat. Über diese Vorkonferenz ist Herr Koll. Diels so freundlich gewesen, mir brieflich Mitteilung zu machen: „Wenn ich ... erwähnt habe", so schreibt er mir, „daß außer Mommsen, Suess und von Hartel, Althoff den Anstoß zu dieser Sache gegeben habe, so bezieht sich das auf eine im Jahre 1891 bei Gelegenheit des Hertz'schen Antrags auf Gründung des Thesaurus l. lat. (Berl. Sitzungsber. S. 671 ff.) im Ministerium stattgefundene Besprechung, an der m. W. die Herren Althoff, Schmidt und Mommsen teilnahmen. Es handelt sich um die Frage, wie die von Mommsen in seinem Bericht (Berl. Sitzungsber. 1891 S. 685) geforderten Summen aufgebracht werden könnten. Da war es, daß Althoff den Gedanken anregte, die Akademien Deutschlands und die von Wien für diesen Zweck zu vereinigen. Mit diesem Gedanken reiste Mommsen im Frühjahr 1892 nach Wien".

Mit dieser letzten Angabe scheint die Vorgeschichte des

Kartells klar gelegt: Das Bedürfnis einer solchen Vereinbarung ist zuerst beim Unternehmen des Thesaurus linguae latinae dringlich geworden, die tatsächliche Initiative verdanken wir den Herren Mommsen, von Hartel und Ed. Suess. Diese Männer sind die eigentlichen Schöpfer des Deutschen Kartells, und sie haben damit auch die Grundlage gelegt zum internationalen Verband der Akademien. Es mag auf Mißverständnissen beruhen, daß die Berliner Akademie von der endgültigen Teilnahme am Kartell sich zurückgezogen hat, bei dessen Schöpfung doch eines ihrer Mitglieder eine so entscheidende Rolle gespielt hatte. Wie dies der oben mitgeteilte Brief des Herrn Suess zum Ausdruck bringt, so hegen aber die am Kartell beteiligten vier Körperschaften auch heute noch den warmen Wunsch, daß die Berliner Akademie ihrem Verband beitreten möge, und sie haben die Hoffnung nicht aufgegeben, daß dies früher oder später geschehen werde. Auch nach Begründung der internationalen Association der Akademien hat das Deutsche Kartell seine Bedeutung als selbständige Institution nicht eingebüßt, denn es fallen ihm naturgemäß Aufgaben zu, denen die internationale Association ferne stehen wird.

Wenn es dem Kartell bis dahin nicht vergönnt gewesen ist, die Berliner Akademie als Mitglied zu gewinnen, so hat es andererseits mit ganz besonderem Dank anzuerkennen, daß es vermöge der Vermittlung der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen bei seinen eine finanzielle Beihilfe erfordernden Unternehmungen vonseiten der königl. preuß. Regierung wiederholt die kräftigste Unterstützung gefunden hat.[1])

---

1) Der Thesaurus linguae latinae, an dessen Begründung übrigens die Berliner Akademie von Anfang ab beteiligt gewesen ist, ist durch feste Jahresbeiträge der Regierungen von Preußen, Österreich, Bayern und Sachsen sicher gestellt worden. Die Pläne zu Schwerebeobachtungen, wie sie 1894 von Wien aus in Gang gebracht und dann auf der Versammlung der Kommission für internationale Erdmessung in Innsbruck weiter entwickelt worden sind, sind dadurch ausführbar geworden, daß die königl. preuß. Regierung die Mitwirkung von Herrn Helmert und des Potsdamer geodätischen Institutes ermöglichte, und daß sie die unter dem Namen des Kartells angebahnte ostafrikanische Pendelexpedition in Gang gesetzt hat. Als 1896 durch das Kartell die Errichtung von Stipendien für den Besuch des botanischen Gartens in Buitenzorg angeregt wurde, da hat neben der österreichischen auch

Mit weiser Beschränkung haben Herr VON HARTEL und die Wiener Akademie fürs erste nur eine Vereinbarung der deutschen Akademien und gelehrten Gesellschaften eingeleitet. Dabei haben sie aber sofort auch die Ausdehnung des Verbandes auf auswärtige gelehrte Körperschaften in Aussicht genommen. Gleich nach Begründung des Kartells, d. h. schon im Sommer 1893 wurde zwischen den dabei beteiligten Gesellschaften eine Erweiterung des Verbandes, sowohl nach ihrem wünschbaren Umfang, als nach ihrem passendsten Zeitpunkt erörtert. Der Bericht des Herrn SUESS gibt darüber Auskunft und auch unsere Gesellschaftsprotokolle enthalten allerlei Detailangaben, deren Wiedergabe indessen überflüssig erscheint. Das Endergebnis der gepflogenen Verhandlungen führte dahin, daß man vorerst auf offizielle Einladungen an weitere Körperschaften verzichtete und zunächst in England und in Frankreich persönlich Stimmung für die Sache zu machen plante. Während der fünf Jahre 1893 bis 1898 ist aber das Kartell innerlich erstarkt, und es hat sich der Kreis seiner Aufgaben erweitert.

Mittlerweile hat die Royal Society in London das von ihr unternommene große Katalogunternehmen auf internationaler Basis in Gang zu setzen und dafür den Beistand auswärtiger Akademien und Regierungen zu gewinnen gesucht. Diese Angelegenheit hat schon bei der Kartellversammlung in Wien vom Jahre 1896 zur Beratung gestanden, und es wurde damals von Seiten der Versammlung bei den dem Kartell angehörigen Akademien und Gesellschaften beantragt, es möchten diese den von der Royal Society behufs Behandlung des Katalogunternehmens anberaumten Kongress durch Delegierte beschicken, und die letzteren beauftragen, sich in einer Vorkonferenz über die zu vertretenden Interessen zu verständigen.

In die Zeit von Ostern 1897 fallen, wie Herr Koll. Klein mir freundlichst mitgeteilt hat, auch persönliche Besprechungen

---

die deutsche Reichsregierung ein solches Stipendium begründet, und ebenso hat sie sich mit einer erheblichen Summe an dem von der Royal Society unternommenen großen Katalogunternehmen beteiligt.

Es liegt im Wesen des Kartells, sowie auch der internationalen Association, daß sie anregend zu wirken haben, und daß sich nach erreichter finanzieller Unabhängigkeit die einzelnen Unternehmungen, wie z. B. das des Thesaurus, emancipieren und ihren Weg selbständig weiter gehen.

über den Associationsgedanken, die er anläßlich eines Aufenthaltes in London mit Herrn Rücker gehabt hat. Weiterhin haben um Pfingsten 1897 zwei Delegierte der Royal Society, die Herren Armstrong und Schuster die Kartellversammlung in Leipzig besucht. Noch im Verlauf desselben Jahres 1897 wurden seitens der Herren Rücker, Foster und Klein durch Verhandlungen mit den Herren Darboux, Bertrand u. a. auch in Paris Verbindungen angeknüpft, und schließlich folgte am 1. Juni 1898 die entscheidende Kartellversammlung in Göttingen.

An dieser Versammlung haben von London aus die Herren Armstrong, Rücker, Michel Foster und Schuster teilgenommen. Auf die früheren Pläne einer allgemeinen internationalen Verbindung gelehrter Körperschaften zurückgreifend, hatte die Göttinger Gesellschaft die Erweiterung des Kartells auf die Tagesordnung gestellt. Eine eingehende Diskussion, an der auch die Delegierten der Royal Society Anteil genommen haben, fand statt, und es wurde beschlossen, bei den kartellierten Akademien und Gesellschaften die prinzipielle Zustimmung zur Gründung einer das Kartell umfassenden internationalen Association zu beantragen. Von diesen Beschlüssen sollte auch die Königl. Preußische Akademie der Wissensch. in Berlin in Kenntnis gesetzt werden. Schon unterm 21. Juni erklärte sich die Londoner Royal Society, auf Grund der von ihren Delegierten erhaltenen Berichte, bereit, an einer internationalen Verbindung gelehrter Körperschaften teilzunehmen und über diese Angelegenheit mit der Académie des Sciences in Paris, der k. Akad. d. Wissensch. in St. Petersburg und der Reale Accademia dei Lincei in Rom in Verhandlung zu treten. In dem nun folgenden Frühjahr 1899 war die Sache soweit gediehen, daß der in München zusammentretende Kartelltag die Gründung einer internationalen Association der Akademien als Hauptgegenstand beraten konnte. Diesmal gelangte man zum Ziel. Es wurden die grundlegenden Gedanken einer solchen Vereinbarung nach den von der k. Akademie in Wien formulierten Vorschlägen festgesetzt und beschlossen, eine konstituierende Versammlung auf den Herbst des Jahres 1899 nach Wiesbaden einzuberufen. Die zu begründende internationale Association sollte eine vom Kartell getrennte Neuschöpfung sein. Auch wurde die Berliner Akademie als die älteste der in München vertretenen Körperschaften gebeten, die Einladungen zur Wiesbadener Konferenz ergehen zu lassen.

Die konstituierende Versammlung der Delegierten von 10 Akademien und Gesellschaften hat am 9. und 10. Oktober 1899 in Wiesbaden stattgefunden, und es sind von ihr die jetzt giltigen Statuten der Association festgestellt worden. Außer den in Wiesbaden vertretenen 10 Akademien und Gesellschaften wurden 9 fernere zum Beitritte eingeladen, die dann auch mit einer einzigen Ausnahme der Einladung gefolgt und bei der ersten Generalversammlung in Paris vertreten gewesen sind. Von diesem Zeitpunkte ab geben der treffliche Bericht und die Protokolle des Herrn DARBOUX klare Auskunft über die Organisation und die bisherige Tätigkeit der internationalen Association der Akademien.

Es sind in diesem Frühjahr 10 Jahre verflossen, seitdem die ersten zielbewußten Schritte zur Gründung des Kartells und der internationalen Association der Akademien getan worden sind. Noch genießen wir das Glück, daß die Begründer der beiden bereits so segensreich gewordenen Institutionen unter den Lebenden weilen. Ihnen gilt heute unser ganz besonderer Dank.

Beilagen.

I. Verzeichnis von gedruckten Aktenstücken.

(Aus dem Verzeichnis sind die gedruckten Spezialberichte der Kommissionen des Kartells weggelassen).

1892. Promemoria von Herrn W. VON HARTEL an die k. Akademie der Wissenschaften in Wien (12. Juni 1892).

1892. *Entwurf von Statuten des Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften* (ohne Datum). Der von Herrn TH. MOMMSEN verfaßte Entwurf ist den Beratungen bei Begründung des Kartells in Leipzig zu Grunde gelegt worden.

1893. *Versammlung der Delegierten* der Kön. preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, der Kön. Societät der Wissensch. zu Göttingen, der Kön. sächs. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig, der Kön. bayr. Akademie der Wissensch. zu München, der Kais. Akad. d. Wissensch. zu Wien am 29. Januar 1893 im Sitzungssaale der philosophischen Fakultät der Universität *Leipzig* zur Beratung des Entwurfes von Statuten des Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften.

1894. Am 17. Mai war der Kartelltag in Göttingen. Ein gedrucktes Protokoll liegt nicht bei unseren Akten. NB. Aus

dem Jahre 1894 liegen vor: ein von Ed. Weiss und R. v. Sterneck unterschriebener, Wien März 1894 datierter *„Entwurf zu einem Programm systematischer Schweremessung* und ein vom Juni 1894 datierter Bericht der Kön. Ges. d. Wissensch. in Göttingen: *Die Erforschung der Intensität der Schwere im Zusammenhang mit der Tektonik der Erdrinde als Gegenstand gemeinsamer Arbeit der Kulturvölker.* Die Angelegenheit ist von einer besonderen Delegiertenkonferenz in Innsbruck am 5. September 1894 behandelt worden.

1895. Die Pfingstversammlung, die in München stattfinden sollte, ist ausgefallen, nachdem München, Göttingen und Leipzig gegen deren Abhaltung gestimmt haben.

1896. *Protokoll der ersten Sitzung der Delegierten* der kartellierten Akademien und gelehrten Gesellschaften. *Wien*, den 27., 28. und 29. Mai.

1897. *Protokoll über die Verhandlungen der Delegierten* der kartellierten Akademien und gelehrten Gesellschaften in der Versammlung zu *Leipzig* am 9. und 10. Juni 1897.

1898. *Protokolle über die Verhandlungen der Delegierten* der kartellierten Akademien und gelehrten Gesellschaften in der V. Versammlung zu *Göttingen* am 31. Mai und 1. Juni 1898.

1899. *Verhandlungen der Delegierten* des Verbandes der wissenschaftlichen Körperschaften und der k. preußischen Akademie zu Berlin in der VI. Versammlung zu *München* am 23. und 24. Mai 1899.

1899. *Generalplan zur Gründung einer internationalen Association der Akademien.*

Vorläufige Feststellung der Akademien zu Berlin, Göttingen, Leipzig, München und Wien. Versandt mit der Einladung zur Konferenz in Wiesbaden (9. und 10. Oktober 1899).

1899. *Protokoll über die Konferenz in Wiesbaden* behufs Gründung einer internationalen Association der Akademien (9. und 10. Oktober 1899).

1900. Vom Kartelltag in Wien enthalten unsere Akten nur Berichte und Protokolle der Spezialkommissionen (für die mathematische Encyklopädie, für das Buitenzorg-Stipendium, für die Realencyklopädie des Islam, für die Errichtung eines beschränkten Systems von seismischen Stationen).

1900. *Association internationale des Académies.* Comité de l'association, Session de 1900 à Paris (31 Juillet, 1 Août 1900). GASTON DARBOUX Bericht über die Bedeutung und Entwickelung der internationalen Association der Akademien im *Journal des Savants* (Janvier 1901). In diesem Bericht ist auch das Schreiben abgedruckt, womit Lord LISTER als Präsident der Royal Society die Académie des Sciences eingeladen hat, dem Gedanken einer internationalen Association der Akademien näher zu treten.

1901. *Association internationale des Académies.* Première Assemblée générale tenue à Paris du 16 au 20 Avril 1901 sous la direction de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Compte rendu. Procès-verbaux des séances. Paris (Gauthier Villars Imprimeur-Libraire).

1901. Protokolle über die Verhandlungen der Delegierten der kartellierten Akademien und gelehrten Gesellschaften in der Versammlung zu Leipzig am 23. und 24. Mai 1901.

II. Promemoria an die Wiener Akademie von Hrn. von Hartel im Juni 1892.

Hohe Akademie!

Je mehr es sich im Laufe der Zeit als die nothwendigste und wichtigste Aufgabe der Akademien herausgestellt hat, solche Arbeiten umfassender Art in Angriff zu nehmen, welche Mittel und Kräfte des einzelnen Gelehrten übersteigen, desto wahrnehmbarer wurden die Unzukömmlichkeiten, welche darin liegen, dass diese öffentlichen, mit staatlichen Mitteln arbeitenden Anstalten, ohne Fühlung mit einander zu nehmen, sich mit gleichen oder ähnlichen Unternehmungen beschäftigen und auf diese Weise nicht bloss einen Theil ihrer Gelder und Kräfte nutzlos verbrauchen, sondern wohl auch in bedauerlichen Collisionen sich gegenseitig schwächen. Zugleich haben sie aber durch diese Isolirung auch etwas von der führenden Stellung verloren, die ihnen gebührte. Die Nothwendigkeit internationaler Verständigung, welche sie selbst bisher unter sich nicht zu finden vermochten, hat bereits auf manchen Gebieten ausserhalb derselben zu freien Vereinigungen in der Form von Congressen, Gelehrtenversammlungen u. dgl. geführt, welche immer mehr Aufgaben an sich ziehen und damit beträchtliche Unterstützungen von Seiten der Regie-

rungen erlangen, die diese weit lieber und in reicherem Masse vielleicht den Akademien zukommen liessen; sind dieselben ja zu dem Zwecke geschaffen worden, bei Allem, was der Staat zur Pflege der Wissenschaften und zur Förderung wissenschaftlicher Arbeiten unternimmt, ihm berathend zur Seite zu stehen. Je mehr Gelder aber der Staat nichtakademischen Kreisen und Zwecken zur Verfügung stellt, desto weniger bleiben für die Akademien übrig, diese können nicht leicht über das beschränkte Mass ihrer regelmässigen Dotationen, welche in begonnenen Unternehmungen oft für lange Jahre festgerannt sind, hinausgreifen und sind, wenn sich Gelegenheiten zu neuer fruchtbarer Thätigkeit bieten, zur Theilnahmslosigkeit verurtheilt.

Ist das für jede Akademie eine bedenkliche Lage, so ist sie doppelt bedenklich für unser Institut, welches bei seiner bescheidenen Ausstattung und unter Verhältnissen, die in den letzten Jahren noch ungünstiger wurden, Alles vermeiden muss, was seine führende Stellung in Oesterreich gefährden, Alles ergreifen muss, was sie zu stärken und zu erhöhen geeignet sein kann.

Dass diese Erwägungen nicht auf eingebildeten Gefahren oder leeren Hoffnungen beruhen, dafür mögen einige Erfahrungen der letzten Zeit und der Hinweis auf mehrere wissenschaftliche Unternehmungen grösseren Stiles, welche in Vorbereitung begriffen sind, darthun, indem ich mich dabei innerhalb meines engeren Studiengebietes, der klassischen Alterthumswissenschaft, halte.

Die Berliner und Wiener Akademie haben in den beiden grossen Sammlungen, dem ‚Corpus scriptorum ecclesiasticorum' und den ‚Monumenta Germaniae antiquissima' in gegenseitiger Unkenntniss über die spezielle Durchführung ihrer Programme eine Reihe von Texten mit Aufwand nicht unerheblicher Mittel gleichzeitig hergestellt, was für das kaufende Publicum ebenso lästig wie für die Wissenschaft nutzlos war. Hätten die Wiener und Berliner Akademie darüber sich verständigt, so wäre unschwer eine entsprechende Vertheilung der Aufgaben erfolgt, und was noch vortheilhafter hätte werden können, die kostspieligen jahrelangen Inventarisirungsarbeiten der handschriftlichen Schätze in den verschiedenen Bibliotheken Europas wären vielleicht nach einem gemeinsamen Plane durchgeführt worden, was den Gang der Arbeiten beschleunigt und die Auslagen namhaft vermindert hätte.

Die durch die Lichtenstein'sche Schenkung begonnene archäologische Durchforschung von Kleinasien, welche, wie wir hoffen

wollen, zur Herstellung eines Corpus der griechischen Inschriften Kleinasiens führen wird, lief vor Kurzem Gefahr, mit einem auf dasselbe Ziel gerichteten Unternehmen der Berliner Akademie zu collidiren. Ist auch diese durch eine loyale Verständigung noch rechtzeitig beseitigt worden, so sind andere Collisionen mit Franzosen, Engländern und Amerikanern, welche in angrenzenden Gebieten sich mit gleichen Aufgaben beschäftigen, nicht ausgeschlossen. Und wenn selbst diese Nationen gegenseitig die Gebiete respectiren, welche sie zu bearbeiten willens sind, so werden ihre Einzelpublicationen jenes einheitlichen festen Planes entbehren, welches das unter Leitung der Berliner Akademie geschaffene ‚Corpus inscriptionum latinarum' auszeichnet. Eine Vereinigung der gelehrten Körperschaften der Culturnationen, welchen an einer Betheiligung an dieser grossen Aufgabe gelegen ist, würde um so leichter zur Aufstellung gleicher Grundsätze und zu geeigneten Mitteln einer Concentration der Arbeit führen, als die reichen Erfahrungen und musterhaften Leistungen der Berliner Akademie auf diesem Felde zur Benützung bereit liegen. Sie allein böte die Gewähr, in absehbarer Zeit einem der dringendsten Bedürfnisse verschiedener Zweige geschichtlicher Forschung abzuhelfen, welche mit unsäglicher Mühe und ungenügendem Erfolge ihre gute Kraft verbraucht, des in zahllosen Büchern und Zeitschriften verstreuten Materials habhaft zu werden, und, wenn die Dinge nicht anders gehen, noch lange verbrauchen wird. Denn die Grösse und Schwierigkeit einer zeitgemässen Sammlung griechischer Inschriften lässt nicht erwarten, dass ein Staat allein das Werk auf sich nehmen und die entsprechenden materiellen Opfer oder auch nur die erforderlichen Arbeitskräfte aufbringen könne. Unsere Akademie wäre ohne irgendwelche Belastung ihrer Dotation eine internationale Association zu diesem Zwecke gerade jetzt zu fördern in der Lage, da ein Theil der jüngst für Philologen und Historiker errichteten zehn Stipendien für Reisen auf griechischem Boden bestimmt ist. Es müsste aber dem Staat zur Ehre und der jungen wissenschaftlichen Generation zum Vortheil gereichen, wenn diese öfter Gelegenheit erhielte, ihre Kräfte in den Dienst grosser wissenschaftlicher Aufgaben zu stellen und darin erstarken zu lassen. Sicherlich ist der Aufschwung wissenschaftlicher Leistungsfähigkeit in Deutschland nicht zum geringen Theile dadurch bedingt. Und der österreichische Staat ist wenigstens auf anderen Gebieten nicht zurückgeblieben, so oft es

galt, Aufgaben internationalen Charakters durch Gewährung besonderer Mittel zu unterstützen.

Von derartigen Arbeiten auf dem Felde der Alterthumswissenschaft, für welche von Berlin und München aus vorbereitende Schritte gethan wurden, ist die eine die Sammlung eines ‚Corpus nummorum', die andere die Herstellung eines ‚Thesaurus latinitatis'.

Was die Dringlichkeit und die auf gemeinsame Arbeit zu stellende Durchführbarkeit des ‚Corpus nummorum' betrifft, so kann ich mich im Folgenden auf das Gutachten einer ersten Autorität in diesem Fache stützen.

Der Mangel einer zusammenfassenden Katalogisirung der antiken Münzen ist ein empfindlicher, und die Publicationen der Museumskataloge, wie sie z. B. in London und Berlin im Gange sind, machen die Lücken nur noch empfindlicher. Den Gegenstand der Arbeit sollten die Münztypen bilden, nicht die einzelnen Exemplare, die sich regelmässig einander ergänzen, und es sollten ferner die Münzen nach Zeit und Ort zusammengestellt werden, in welcher Gestalt sie als der einzige einigermassen vollständig auf uns gekommene Theil der historischen Ueberlieferung des Alterthums einen unschätzbaren Reichthum für alle Zweige der Forschung darbieten. Aber selbst das reichste Cabinet besitzt nur einen Theil der überhaupt vorhandenen Münzen und oft nur mangelhafte Exemplare; wer die Münzen für die Forschung braucht, ist diesen Katalogen gegenüber ungefähr in der Lage, in welcher der Philologe sein würde, wenn er statt des lateinischen Lexikons nur Wortverzeichnisse der einzelnen Schriftsteller hätte. Dieselben gleichgiltigen Dinge kehren in jedem Katalog wieder, die seltenen Stücke versagen nur zu oft auch bei beharrlichem Suchen; vor Differenzen steht man rathlos, die gerade bei der Numismatik so unentbehrlichen Zusammenstellungen der für die einzelnen Städte oder die einzelnen Herrscher vorliegenden, mit der Numismatik connexen historischen Notizen werden in diesen Katalogswerken gar nicht oder nur in ungenügender Weise gegeben, da selbstverständlich deren Verfasser mit ihrem Material allein die erforderliche Arbeit nicht liefern können. Die Folge davon ist, dass die älteren auf den gesammten damaligen Münzbestand gestellten, der Sache nach längst überholten Werke von Eckhel und Mionnet allen Katalogen zum Trotz den gewöhnlichen Gebrauch der Gelehrten beherrschen.

Erforderlich ist eine zusammenfassende Arbeit, welche, im Wesentlichen den einzelnen Landschaften folgend, für eine jede das gesammte numismatische Material zusammenstellte und für welche die Münzen ohne Rücksicht auf ihre Aufbewahrung untersucht würden. Es ist dies verhältnissmässig leicht, da, verglichen mit Inschriften, Urkunden, Geschichtsquellen, das numismatische Material in relativ wenig grossen Sammlungen concentrirt ist. Allerdings ist die Aufgabe dennoch eine so umfangreiche und kostspielige, dass jede einzelne Nation Bedenken tragen wird, dieselbe auf sich zu nehmen. Würden aber auch die finanziellen Mittel von einem Staate noch aufgebracht werden, die genügenden Arbeitskräfte vermöchte er allein nicht zu stellen, da die Zahl der brauchbaren Numismatiker nicht gross ist, noch sein kann. Man begreift es demnach, dass die Berliner Akademie zunächst sich darauf beschränkte, eine Sammlung der Münzen Thrakiens und der weiter nördlich gelegenen Gebiete in Angriff zu nehmen, indem sie für die Erweiterung ihres Planes und die endliche Gewinnung eines ‚Corpus nummorum' ihre Hoffnungen auf die Cooperation anderer Staaten und ihrer gelehrten Institute setzte.

Die Arbeitstheilung wäre hier ähnlich wie bei der Herstellung eines ‚Corpus inscriptionum graecarum' einzurichten, aber mit geringeren Schwierigkeiten verbunden. Ueber die Grundsätze einer verständigen Sammelarbeit würde man sehr leicht sich einigen, und soweit Differenzen hier eintreten können, z. B. Verschiedenheit der Sprache und grössere oder geringere Ausdehnung der Arbeiten, würden diese dem einheitlichen Charakter und dem Nutzen der Arbeit keinen wesentlichen Eintrag thun. Selbst Centralisirung der Publication wäre hier nur insoweit erforderlich, als gleiches Format und andere Aeusserlichkeiten (Grössenzeichen, Metallbezeichnung u. dgl.) regulirt werden müssten. Im Uebrigen würde nichts hindern, dass jeder Staat den von ihm übernommenen Theil der Gesammtarbeit selbständig veröffentlichte. Man darf sagen: hier bedarf es nur des befreienden Wortes; ist eine entsprechende derartige Abrede unter den civilisirten Nationen getroffen, so ist man am Ziele.

Viel schwieriger liegen die Dinge bei der Herstellung eines den heutigen Bedürfnissen entsprechenden ‚Thesaurus latinitatis'. Diese Bedürfnisse haben sich seit der Zeit, da Fr. A. Wolf. im Anfang unseres Jahrhunderts die erste Anregung dazu gegeben hat, gesteigert und verfeinert. Nicht bloss der Philologe bedarf

an Stelle der bisherigen unzulänglichen Behelfe eines die aus zehn Jahrhunderten erhaltenen lateinischen Texte umfassenden und erschöpfenden Verzeichnisses der Wörter mit ihrem Formen- und ihrem Bedeutungswandel, um seine engere Aufgabe, diese Texte kritisch herzustellen und zu verstehen, richtig zu lösen. Die Beobachtung der Stilunterschiede bei einzelnen Schriftstellern, in einzelnen Gattungen und Epochen, die chronologische Bestimmung der erhaltenen Literaturtrümmer entbehren ohne das des soliden Fundamentes, welches bislang durch zahllose sich zersplitternde und in ihrer Massenhaftigkeit für allgemeinere Benützung unbrauchbar gewordene Einzelarbeiten nicht geschaffen werden konnte. Aber es handelt sich hierbei nicht bloss um Wünsche der classischen Philologie. Die romanische Philologie kann einen tieferen Einblick in die Entstehung und Entwicklung der romanischen Sprachen nur gewinnen, wenn die einzelnen Wörter durch alle Stufen ihres Daseins bis zu ihrem völligen Absterben verfolgt werden. Dieser sprachliche Umbildungsprocess ist an sich ein historisches Phänomen von höchstem Interesse und nach manchen Richtungen von vorbildlicher Bedeutung für alle jene sprachlichen Entwicklungen, welche uns nicht oder nur in historischen Documenten geringeren Umfanges vorliegen. Aber dazu bedarf es einer anderen Art des Sammelns und Ordnens, als bis jetzt in der Lexicographie üblich war. Es muss die Lebensgeschichte jedes einzelnen Wortes, besonders jener, welche durch längere Zeit lebendig geblieben, dann allmälig abstarben und durch andere ersetzt wurden, die Veränderung ihrer Formen und ihrer Gebrauchsweisen genau vorgeführt werden. Unter diesen Gesichtspunkten gewinnt ein ‚Thesaurus latinitatis' eine allgemein geschichtliche Bedeutung, welche der Sammlung des Griechischen oder des Wortschatzes einer anderen Sprache nicht zukommt. Aber freilich steigen damit auch die Schwierigkeiten der Durchführung in unvergleichlicher Weise, was die resultatlosen Versuche, die bisher unternommen wurden, zeigen.

Fr. A. Wolf hatte daran gedacht, theils in Deutschland, theils in Holland, Frankreich, Italien und England eine Zahl von zehn und mehreren Gelehrten zu vereinigen, die sich in die sämmtlichen Schriftsteller bis auf die Zeit, wo das Latein als lebendige Sprache verschwindet, nach Neigung und Vorkenntnissen theilen, und dann ihre Vorräthe zweien selbst gewählten Redactoren überlassen sollten (vgl. dessen Liter. Analekten 4). Trotz

jahrelanger Verhandlungen kam dieser geniale Plan einer internationalen Cooperation nicht zur Ausführung; aber ebensowenig sein bescheidenerer Gedanke, die Arbeit in Deutschland allein zu machen, wozu er zunächst die Abfassung von lexicographischen Schulprogrammen nach einer planmäfsigen Auswahl in Anregung brachte.

Es ruhte dann die Sache, bis der Münchener Akademiker und Professor Karl Halm am 25. September 1858 in der Eröffnungssitzung der 18. Philologenversammlung in Wien die Wiederaufnahme derselben verkündete und die Grundzüge der Ausführung mittheilte, welche in die Hand deutscher und österreichischer Gelehrter gelegt und durch eine vom König Max II. in Aussicht gestellte Summe von 10000 Gulden in Fluss gebracht werden sollte, mit der man die Redactionskosten für zehn Jahre der Vorbereitung und für einige Specialarbeiten zu decken hoffte. Dazu war die Firma Teubner bereit, einen Betrag von 18000 Gulden beizuschiessen. Auch dieser Versuch scheiterte an Schwierigkeiten der Organisation und der Unzulänglichkeit der Mittel.

Nicht abgeschreckt durch solche Erfahrungen, machte sich ein Mitglied derselben Akademie, E. Wölfflin an die Sache und gab zunächst mit Unterstützung dieser Akademie sein Archiv für lateinische Lexicographie als Vorarbeit zu einem ‚Thesaurus linguae latinae' heraus (1884), in welchem die einschlägigen Fragen theoretisch und praktisch gelöst werden sollten. Er verstand es, etwa 250 freiwillige Mitarbeiter aus Deutschland und Oesterreich unter seiner Leitung zu vereinigen, und vertheilte unter sie die zu lösenden Fragen und Aufgaben und die zu excerpirenden Texte. Die Erfahrungen und Resultate dieser Bemühungen waren von unschätzbarem Werthe, die Erreichung des Zieles erschien aber in unabsehbare Ferne gerückt, so lange ein einzelner, wenn auch noch so energischer und opferwilliger Mann dieses Riesenunternehmen zu tragen hatte. Dieser ernste Versuch einer theilweisen Realisirung liess aber die ganze Grösse der Aufgabe nun erst genauer abschätzen und erkennen, dass ihr selbst eine reich dotirte Akademie allein nicht gewachsen wäre.

So wagte denn M. Hertz in der Eröffnungsrede der 40. Philologenversammlung in Görlitz 1889 eine Cooperation der drei grossen Akademien (Berlin, Wien, München) und anderer gelehrten Gesellschaften in Anregung zu bringen und hatte

wenigstens die Genugthuung, dass der preussische Minister von Gossler die gegebene Anregung zum Gegenstand weiterer Erwägungen machte, welche im Schoosse einer aus dem Geh. Oberregierungsrath Althoff, Th. Mommsen, Vahlen, Diels und Hertz bestehenden Conferenz gepflogen wurden. Hertz wurde mit der Abfassung eines Gutachtens betraut, welches den Organisationsplan und die Kosten berechnete und dieses Gutachten durch die Berliner Akademie einer Prüfung unterzogen. Das Resultat dieser Prüfung war, dass zwar die Nothwendigkeit und Zeitgemässheit des grossen Werkes nachdrücklich anerkannt wurde, aber nur um so fester sich die Ueberzeugung bildete, dass die Berliner Akademie allein die Mittel dazu, welche sie auf eine Million Mark berechnete, nicht aufzubringen vermöchte, und dass demnach wohl auch kein anderer Staat sich dieser Aufgabe unterziehen dürfte. Aber wenn selbst Deutschland sich mit Oesterreich zu diesem Zwecke verbündete, würden beider Mittel und Arbeitskräfte kaum genügen; denn ein Werk dieser Art muss in absehbarer Zeit zu Ende geführt werden und darf nicht angelegt sein, nach dem Muster der ‚Acta sanctorum', deren Folianten nun ins dritte Jahrhundert die Presse beschäftigen. Wohl aber wäre die beste Hoffnung auf eine glückliche und rasche Vollendung gegeben, wenn der Kreis der Mitarbeiterschaft weiter gezogen und die romanischen Nationen, welche die Sache noch näher berührt, deren Civilisation auf dem Boden des classischen Alterthums erwachsen ist, sich zur Betheiligung bestimmen liessen. Auch ist eine zweckdienliche Organisation der gemeinsamen Arbeit im Laufe dieser Berathungen und Versuche immer mehr als möglich erkannt worden. Eine internationale Verbindung der gelehrten Körperschaften würde leicht die noch übrig bleibenden Schwierigkeiten hinwegräumen, und die Regierungen werden gewiss mit den erforderlichen Mitteln nicht kargen, sobald die Akademien mit ihrem vereinigten Ansehen für eine solche Aufgabe eintreten.

Es kommt mir nicht zu, über mein engeres Arbeitsgebiet hinauszugreifen und aus anderen Fächern wissenschaftliche Aufgaben namhaft zu machen, welche zu ihrer Durchführung eine Organisation der wissenschaftlichen Arbeit innerhalb weiterer Kreise verlangen. Die angeführten werden als Beispiele genügen, die Möglichkeit und Nützlichkeit einer solchen zu erkennen.

So sehr es nun auf der Hand liegt, dass für die Vollbringung derartiger Arbeiten eine Vereinigung nicht bloss der Akademien

Deutschlands und Oesterreichs, sondern auch der gelehrten Körperschaften Italiens, Frankreichs, Englands und Amerikas erstrebenswerth wäre, so wird doch im ersten Anlauf schon viel erreicht sein, wenn ein akademisches Cartell innerhalb Deutschlands und Oesterreichs zustande käme, welches zu allmähliger Erweiterung den Zutritt Allen offen hält, welche ihn begehren. Die principielle Ausschliessung kleinerer oder nicht deutscher Akademien, soweit sie nicht durch diejenige der Localforschung von selbst gegeben ist, wäre nicht räthlich noch auch bei uns möglich, da die herbeizuführende Gesammtarbeit weit weniger auf die eigenen Mittel der Akademien als auf Staatsunterstützung angewiesen sein wird.

Auf solche Erwägungen gestützt, beehre ich mich zu beantragen:

1. Die Akademie erkennt es als wünschenswerth, dass zur Vermeidung von Collisionen und zur Herbeiführung wissenschaftlicher Cooperationen zunächst ein akademisches Cartell zwischen der Wiener Akademie und den Akademien von Berlin und München, sowie den gelehrten Gesellschaften in Leipzig und Göttingen hergestellt werde.

2. Die Wiener Akademie lade die genannten vier Institute Deutschlands zum Abschluss eines derartigen Cartells ein, dass dieselben sich untereinander gegenseitig verpflichten, wissenschaftliche Unternehmungen, bei welchen solche Gesichtspunkte der Collision und Cooperation in Frage kommen können, nicht zu beschliessen, ohne davon früher die übrigen Betheiligten in Kenntniss gesetzt und deren Aeusserungen erwogen zu haben.

3. Nach Eintreffen der zustimmenden Erklärung der betreffenden Körperschaften ist den Regierungen in einer eingehenden Denkschrift, über welche die vereinigten Institute sich untereinander verständigen werden, davon Kenntniss zu geben und in derselben sind diejenigen wissenschaftlichen Fragen, welche zunächst für eine Gesammtarbeit ins Auge gefasst werden könnten, zusammenfassend darzulegen und die Förderung dieser Zwecke zu erbitten.

Wien, 12. Juni 1892.

Hartel,
wirkliches Mitglied.

III. Schreiben der k. Akad. d. Wissensch. in Wien vom 20. Juli 1892.

Hochansehnliche k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften!

Die ausserordentliche Erweiterung, welche die wissenschaftliche Forschung im Laufe der letzten Jahrzehnte erfahren hat, die Zahl, die Mannigfaltigkeit und die Bedeutung ihrer Aufgaben bringen es mit sich, dass eine immer grössere Vereinigung von Kräften nöthig wird, um den allseits sich erhebenden Ansprüchen zu genügen. Zugleich ist es bei der heutigen Vereinzelung der leitenden wissenschaftlichen Körperschaften beinahe unvermeidlich, dass da und dort gleichzeitig und ohne gegenseitige Verständigung die verfügbaren Mittel demselben Ziele zugewendet werden, so dass Durchkreuzung von Arbeitskräften oder doch Verschwendung derselben eintritt.

Unter diesen Umständen drängt sich die Frage auf, ob es nicht zweckmässig sei, eine geregelte Form des Meinungs-Austausches zwischen den leitenden Körperschaften herbeizuführen, wobei die Zustimmung der betreffenden Regierungen vorausgesetzt ist. Eine solche Verbindung könnte zugleich dazu dienen, um grosse Aufgaben, welche die verfügbaren Mittel der einzelnen Körperschaft oder des einzelnen Staates übersteigen und einen internationalen Charakter an sich tragen, durch Vorzeichnung der Grundlinien, durch Feststellung der erforderlichen Mittel, endlich durch übereinstimmende und gemeinsame Vertretung gegenüber den einzelnen Staatsregierungen, mit vereinter Kraft zu verwirklichen.

Diese Erwägungen haben unser wirkl. Mitglied Hofrath v. Hartel veranlasst, am 12. Juni l. J. der Akademie die hier beiliegende Denkschrift zu übergeben, welche die Absichten einer solchen Vereinbarung darstellt, und die k. Akademie hat in ihrer Vollsitzung vom 30. Juni l. J. über einen von Hofrath v. Hartel erstatteten Commissions-Bericht die nachfolgenden Beschlüsse gefasst:

„1. Die Akademie erkennt es als wünschenswerth, dass zur Herstellung von Cooperation und zur Vermeidung von Collision bei wissenschaftlichen Unternehmungen ein Uebereinkommen zwischen der Wiener Akademie und zunächst den Akademien von Berlin und München, sowie den k. Gesellschaften der Wissenschaften in Göttingen und Leipzig hergestellt werde."

„2. Die Wiener Akademie ladet die vier genannten Institute Deutschlands zum Abschlusse eines Uebereinkommens ein, durch

welches dieselbe und die genannten Institute sich gegenseitig verpflichten, von jeder geplanten wissenschaftlichen Unternehmung die übrigen in Kenntniss zu setzen und deren Aeusserungen zu erwägen."

„3. Nach erlangtem Einverständnisse über die Grundzüge eines solchen Uebereinkommens werden sich dieselben über den Inhalt einer Denkschrift verständigen, welche den einzelnen Regierungen vorzulegen sein wird."

„4. Das Bureau wird beauftragt, im Einverständnisse mit der hierzu eingesetzten Commission die nothwendigen Unterhandlungen zu führen."

Im Sinne dieser Beschlüsse erlaubt das gefertigte Präsidium an eine hochansehnliche k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften die Einladung zu richten, Dieselbe wolle gütigst in Erwägung ziehen, ob und in welcher Gestalt ein solches Uebereinkommen zunächst zwischen den bezeichneten Körperschaften, zweckmässig und in einer wirklichen Erfolg entsprechenden Weise in's Leben zu rufen sei.

Wien, am 20. Juli 1892.

Das Präsidium
der k. Akademie der Wissenschaften.
ARNETH. SUESS.

IV. Entwurf von Statuten des Verbandes wissenschaftlicher Körperschaften.

§ 1. Die diesem Verbande angehörigen, für allgemeine Förderung der Wissenschaft thätigen Körperschaften haben sich vereinigt, um wissenschaftliche Arbeiten allgemeiner Art anzuregen und bei deren Verfolgung mögliche Collisionen zu verhindern und mögliche Cooperationen zu fördern. Für den Verkehr zwischen den vereinigten Körperschaften bestellt jede derselben nach ihrem Ermessen ihre Sekretäre oder besondere Vertreter.

§ 2. Jede dem Verbande beitretende Körperschaft setzt, wenn die bestehenden Verhältnisse es wünschenswerth oder erforderlich erscheinen lassen, ihre Regierung von dem Abschluss des Verbandes und ihrem Beitritt zu demselben in Kenntniss.

§ 3. Jede wissenschaftliche Unternehmung ist, wenn sie in einer Verbandskörperschaft in Aussicht genommen oder beantragt

wird und nach Ansicht derselben zu Collisionen oder Cooperationen Anlass bieten kann, den übrigen Verbandsgliedern zur Kenntniss zu bringen, welche bis zu einem von der antragstellenden Körperschaft zu bestimmenden Termin ihre Einwendungen oder Anerbietungen zu machen haben. Diese gelangen dann mit dem Antrag selbst in der antragstellenden Körperschaft zur Berathung, ohne dass deren Beschlussfassung dadurch vorgegriffen wird. Auch Massregeln, welche für derartige in Gang befindliche Unternehmungen getroffen werden, wie die Aussendung von Expeditionen oder einzelnen Sendlingen, werden, wenn dies nützlich oder wünschenswerth erscheint, den Verbandskörperschaften zur Kenntniss gebracht.

§ 4. Alle oder einige der Verbandskörperschaften können zur gemeinschaftlichen Vorberathung oder zur gemeinschaftlichen Durchführung eines wissenschaftlichen Unternehmens einen oder mehrere Delegirte bestellen. Wird zu diesem Zwecke eine dauernde Specialcommission gebildet, so wird für dieselbe unter den betheiligten Anstalten ein Regulativ vereinbart.

§ 5. Die Correspondenzen des Verbandes können in lateinischer, deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache geführt werden.

§ 6. Zur Zeit gehören dem Verband an

die Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
die Königl. Societät der Wissenschaften zu Göttingen,
die Königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig,
die Königl. bayr. Akademie der Wissenschaften zu München,
die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien.

Jede Körperschaft, welche die allgemeine Förderung der Wissenschaft bezweckt (§ 1), kann eingeladen werden, dem Verbande beizutreten. Die Einladung erfolgt im Namen des Gesammtverbandes durch eine Verbandskörperschaft, nachdem letztere die übrigen Verbandskörperschaften von der beabsichtigten Einladung in Kenntniss gesetzt hat und gegen die Aufnahme kein Widerspruch erhoben worden ist. Diese Bestimmung gilt für die ersten fünf Jahre; nach Ablauf dieser Frist wird von den vereinigten Körperschaften über die weiteren Aufnahmen Beschluss gefasst werden.

§ 7. Einer jeden Körperschaft steht der Rücktritt aus dem Verbande zu jeder Zeit frei.

V. Protokoll der behufs Kartellbildung anberaumten Versammlung in Leipzig am 29. Januar 1893.

Als Delegirte waren anwesend: E. Suess, Prof., Generalsekr. d. Wiener Akademie, aus Wien; Jul. Hann, Prof., Vorstand der K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, aus Wien; W. v. Hartel, Prof., Vorstand der Kais. Hofbibliothek, aus Wien; Alfons Huber, Prof., Sekretär der phil.-hist. Cl. der Kais. Akademie, aus Wien; Th. Mommsen, Prof., Sekretär der Königl. preuss. Akademie zu Berlin; Auwers, desgleichen, aus Berlin; Wölfflin, Prof., aus München; v. Voit, Prof., aus München; Joh. Friedrich, Prof., aus München; Ernst Ehlers, Prof., aus Göttingen; Herm. Wagner, Prof., aus Göttingen; Ribbeck, Prof., aus Leipzig; Ludwig, Prof., aus Leipzig; Leskien, Prof., aus Leipzig; Mayer, Prof., aus Leipzig.

Nach Begrüssung der Versammlung durch Herrn Ribbeck wird diesem auf Antrag des Herrn Mommsen der Vorsitz übertragen und die Versammlung tritt sofort in die Berathung der einzelnen Paragraphen des Entwurfes ein.

Zu § 1. Die Herren Suess und Mommsen machen Mittheilungen über die Vorgeschichte des Planes und die dabei obwaltenden Grundgedanken. Die Vertreter sämmtlicher Körperschaften sprechen ihre Befriedigung über das Unternehmen aus. — § 1 wird einstimmig angenommen.

Zu § 2 erklärt Herr Mommsen, dass die betreffende Commission der Berliner Akademie die Streichung dieses wie des mit ihm zusammenhängenden § 4 beschlossen habe, da die Ordnung der in beiden Paragraphen berührten Verhältnisse zu den betreffenden Regierungen jeder einzelnen Körperschaft zu überlassen sei.

Nach Erörterungen über eine zweckmässigere Fassung des Paragraphen, namentlich im Hinblick auf nichtdeutsche Gesellschaften, beantragt Herr Hartel folgende Fassung:

> „Jede dem Verbande beitretende Körperschaft setzt, wenn die bestehenden Verhältnisse es wünschenswerth oder erforderlich erscheinen lassen, ihre Regierung von dem Abschluss des Verbandes und ihrem Beitritt zu demselben in Kenntniss."

Bei der Abstimmung enthalten sich die Herren Auwers und Mommsen, gebunden durch den Beschluss ihrer Akademie, der Stimme. Von den übrigen Delegirten wird § 2 in der Hartelschen Fassung angenommen.

Zu § 3. Herr Auwers erklärt, dass die Berliner Commission dem § 3 im Princip zustimme, empfiehlt aber in Bezug auf die Fassung, den Ausdruck „allgemeiner Art" zu vermeiden, da auch speciellere und kleinere Unternehmungen zu Collisionen der verschiedenen gelehrten Gesellschaften führen könnten.

Nach längerer Debatte nimmt die Versammlung auf Antrag der Herren Hartel und Mommsen folgende Fassung des Paragraphen einstimmig an:

„Jede wissenschaftliche Unternehmung ist, wenn sie in einer Verbandskörperschaft in Aussicht genommen oder beantragt wird und nach Ansicht derselben zu Collisionen oder Cooperationen Anlass bieten kann, den übrigen Verbandsgliedern zur Kenntniss zu bringen . . ."

Ferner soll im letzten Satze des Paragraphen statt „Untersuchungen" gesagt werden „derartige Unternehmungen".

Zu § 4. Herr Mommsen erklärt, dass die Berliner Delegirten durch den bereits oben zu § 2 erwähnten Beschluss ihrer Akademie in ihrer Abstimmung gebunden seien.

Bei der Debatte über die Nothwendigkeit oder Zweckmässigkeit des Paragraphen erklärt Herr Hartel, es habe bei der Aufnahme desselben die bestimmte Absicht obgewaltet, den Regierungen einen Fingerzeig zu geben, wohin sie sich bei wissenschaftlichen Unternehmungen oder Unternehmungen, bei denen eine Betheiligung von wissenschaftlicher Seite erwünscht sei, sowie in Betreff der darauf zu verwendenden Mittel wenden könnten.

Da indess die Wiener Herren Delegirten erklären, dass sie, falls die Annahme des Paragraphen dem Gesammtplane Schwierigkeiten bereiten könne, nicht darauf beständen, wird bei der folgenden Abstimmung Streichung des § 4 beschlossen.

§ 5 wird ohne Diskussion einstimmig angenommen.

Darauf beantragt Herr Suess, den § 7 vor § 6 zu berathen; die Versammlung stimmt dem Antrage zu.

Zu § 7. Auf Antrag des Herrn Suess wird beschlossen, dass die in der Lücke nach den Eingangsworten zu nennenden Körperschaften nach der alphabetischen Ordnung der Städte, in denen sie ihren Sitz haben, aufgeführt werden sollen.

Darauf folgt die Debatte über den materiellen Inhalt des Paragraphen.

Herr Auwers erklärt Namens der Berliner Akademie, diese wünsche innerhalb der ersten zwei Jahre nach Gründung des Verbandes der deutschen Körperschaften keine Erweiterung durch Heranziehung weiterer gelehrter Gesellschaften; es möge erst mit der gemeinsamen Arbeit der deutschen Gesellschaften Erfahrung gesammelt werden, bis man zu einer Erweiterung schreite.

Herr Mommsen spricht persönlich gegen die zweijährige Ausschliessungsfrist, betont aber, das die Majorität in Berlin für diese sei, und der ganze Plan durch eine Ablehnung von Seiten der Delegirtenversammlung in Gefahr gerathen könne.

Die Herren Wiener Delegirten sprechen sich warm für die Beibehaltung des § 7 in seiner jetzigen Fassung aus. Herr SUESS hebt namentlich hervor, dass für die naturwissenschaftlichen Classen sofortige Anknüpfung mit grossen Academien des Auslandes von der grössten Wichtigkeit sei; Herr Hartel befürwortet die bestehende Fassung mit Rücksicht auf specifisch österreichische Verhältnisse.

Nach weiterer Befürwortung der bestehenden Fassung des Paragraphen durch die Herren Suess, Wagner, Ehlers, Wölfflin, denen sich auch Mommsen persönlich anschliesst, schreitet man zur Abstimmung. Die beiden Herren Berliner Delegirten enthalten sich der Stimme, von den übrigen Mitgliedern wird der § 7 in der ursprünglichen, gedruckt vorliegenden Fassung angenommen, jedoch mit folgenden von Herrn Mommsen beantragten redaktionellen Aenderungen:

„Die Einladung erfolgt im Namen des Gesammtverbandes durch eine Verbandskörperschaft, nachdem letztere die übrigen Verbandskörperschaften von der beabsichtigten Einladung in Kenntniss gesetzt hat“ u. s. w.

§ 6 wird mit der redactionellen Aenderung: statt „die Correspondenzen können ausser in der lateinischen, in deutscher“ u. s. w. zu sagen: „in lateinischer, deutscher“ u. s. w. einstimmig angenommen, nachdem Herr Ludwig seinen Antrag, unter die für die Correspondenz freizugebenden Sprachen auch die russische aufzunehmen, zurückgezogen hat.

§ 8 wird ohne Debatte einstimmig angenommen.

In der Schlussabstimmung wird der gemäss den vorgefassten Beschlüssen abgeänderte Entwurf als Ganzes angenommen. Die [illegible]e Fassung bildet einen Theil des Protokolls.

Die Delegirtenversammlung beschliesst darauf, folgende Erklärungen ins Protocoll aufzunehmen: „Die Delegirten der einzelnen Körperschaften haben den von der Delegirtenversammlung gefassten Beschluss ihren Mandanten vorzulegen. Das Resultat der Einzelbeschlüsse der dem Verbande angehörenden fünf Körperschaften ist jeder einzelnen s. Z. mitzutheilen.

Die Vertreter der fünf Körperschaften sind übereingekommen, dass, wenn eine Minderheit dieser Körperschaften den gefassten Beschluss ablehnt, die übrigen ihn aufrecht erhalten."

Ribbeck. Mommsen. C. Ludwig. Huber. Hartel. E. Suess. A. Auwers. Herm. Wagner. E. Ehlers. J. Hann. J. Friedrich. Wölfflin. C. Voit. A. Mayer. A. Leskien.

VI. Aus dem Göttinger Bericht vom Jahre 1898.

Gesammt- und Schlusssitzung.

Mittwoch, 1. Juni Nm. 4 Uhr.

Anwesend: die Herren Boltzmann, v. Escherich, v. Mojsisovics, v. Sterneck, Weiss aus Wien, die Herren Dyck, Zittel aus München, Herr Credner aus Leipzig, Herr Ehlers aus Göttingen, die Herren Kielhorn, Klein, Peter, Wagner, Riecke aus Göttingen, die Herren Armstrong, Foster, Rücker, Schuster von der Royal. Society.

Den Vorsitz führt Herr Ehlers, das Protocoll Herr Peter.

Nach dem Vorschlage der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen erscheint ein Zurückgreifen auf die früheren Pläne einer allgemeinen internationalen Verbindung der gelehrten Körperschaften wünschenswert.

Eine solche ist geeignet und berufen bei grossen wissenschaftlichen Fragen und Aufgaben durch unmittelbare Bezugnahme aller oder einzelner Körperschaften mit einander deren Kooperation zur leichteren Erreichung des gesteckten Zieles herbeizuführen.

Diese Association gelehrter Körperschaften würde in längeren Zwischenräumen, etwa alle fünf Jahr, eine von Delegirten zu beschickende Versammlung zur Erörterung aufgeworfener Fragen und Regelung geschäftlicher Angelegenheiten abhalten.

Innerhalb dieser Association bleibt das bisherige Kartell bestehen und soll für engere Verbindung benachbarter Gesellschaften mit einander Raum sein.

Für das Zustandekommen einer solchen Association würde zunächst die Teilnahme der grossen Akademien daran zu sichern sein.

Ueber diese Dinge verbreitete sich eine ausführliche Discussion, die zu folgenden Resolutionen führte, welche die Delegirten ihren Gesellschaften vorlegen werden:

I. Die kartellierten Akademien und Gesellschaften geben prinzipiell ihre Zustimmung zur Gründung einer das Kartell umfassenden internationalen Association gelehrter Körperschaften.

II. Der Vorort wird ermächtigt, von der erfolgten Zustimmung sowohl der Royal Society in London als der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin Mitteilung zu machen.

Die Delegirten der Royal Society geben daraufhin die Erklärung ab, dass sie eine entsprechende Zustimmungserklärung ihrer Gesellschaft beantragen wollen, von deren Annahme dem Vororte des Kartells Mitteilung zu machen sein würde.

Weitere Bezugnahme in dieser Angelegenheit soll dann zunächst zwischen dem Vororte des Kartells und der Royal Society stattfinden.

VII. Aus dem Münchner Bericht von 1899.

Als Delegirte sind erschienen: Aus Berlin: *Auwers, Diels;* aus Göttingen: *Ehlers, Leo;* aus Leipzig: *Credner, Lamprecht, Windisch, Wislicenus;* aus München: *v. Pettenkofer, v. Christ, Friedrich, Kuhn, v. Sicherer, v. Voit, v. Zittel;* aus Wien: *v. Hartel, Karabaček, Lieben, Mühlbacher, Suess.*

Der Präsident der bayerischen Academie der Wissenschaften begrüsst die Delegierten und schlägt *v. Voit* als Leiter der Verhandlungen vor, womit die Versammelten ihr Einverständnis erklären. *v. Voit* nimmt an und auf seinen Vorschlag wird beschlossen, von einer Commissionsbildung wegen der geringen Zahl der Beratungs-Gegenstände abzusehen.

Als erster Gegenstand steht auf der Tagesordnung die Beratung über die Gründung einer internationalen Association gelehrter Gesellschaften. *v. Voit* erstattet zuerst Bericht über die bisherige Entwickelung dieses Planes. Auf *v. Hartel's* Antrag unterbleibt die Generaldebatte und man tritt sofort in die Be-

ratung der Angelegenheit ein und zwar an der Hand der von der Kaiserl. Akademie zu Wien in einem Schreiben vom 2. April zur Förderung der Sache formulierten vier Anträge Einstimmig erklären die Versammelten ihr Einverständnis zu dem 1. Antrag: Die Bildung einer internationalen Association der grösseren gelehrten Körperschaften der Erde wird grundsätzlich als zweckmässig und dem Fortschritt der Wissenschaften förderlich anerkannt.

Der 2. Antrag erhält folgende Fassung: Diese Association hat den Zweck, wissenschaftliche Unternehmungen, welche von der Gesammtheit der vereinigten Körperschaften, oder von einer Gruppe derselben oder von einer einzelnen derselben in Angriff genommen oder empfohlen werden, zu unterstützen, und sich über Einrichtungen zur Erleichterung des wissenschaftlichen Verkehrs zu verständigen. Jeder einzelnen Körperschaft soll die Entschliessung über die Teilnahme, sowie über die Mittel und Wege von Fall zu Fall vorbehalten sein.

Es besteht allgemeine Übereinstimmung, dass die internationale Association von dem Kartell völlig getrennt, eine Neuschöpfung sein soll, und nach längerer Beratung wird beschlossen, dass die Akademien einzeln in die Association eintreten sollen. Die Versammlung ist der Ansicht, dass der Association nur eine lose Organisation gegeben werden solle. Bei der Frage, ob periodische Zusammenkünfte der associierten Körperschaften stattfinden sollen, machen sich verschiedene Meinungen geltend; es folgt eine eingehende Besprechung, an der sich die Vertreter aller Akademien und gelehrten Gesellschaften beteiligen. Um einerseits den einzelnen Akademien volle Freiheit zu lassen, und andererseits die zu Tage getretenen Wünsche zur Kenntnis der einzuladenden auswärtigen Akademien zu bringen, wird für das Einladungsschreiben an die Akademien zur konstituierenden Versammlung im Herbste folgende Fassung gewählt: „Bei der Konferenz wird zur Diskussion gestellt werden, ob die internationale Association zur Lösung ihrer Aufgabe periodische Versammlungen, etwa alle 3 oder 5 Jahre, abhalten oder ob solche Versammlungen nach Bedarf abgehalten werden sollen.“ Auf Wunsch *Windisch's* wird zu Protokoll genommen, dass hiedurch kein Zwang für die einzelnen Körperschaften ausgesprochen sei, zu einer solchen Versammlung zu erscheinen.

Die Versammelten sind damit einverstanden, dass den Vertretern der Körperschaften jedes Mal freistehen soll, entweder

bestimmte Erklärungen abzugeben oder ihre Vota durch die eigenen Körperschaften gutheissen zu lassen.

Es soll im Herbste dieses Jahres eine konstituierende Versammlung stattfinden, welche den Zweck hat, in unvorgreiflicher Weise die nähere Einrichtung der Association zu besprechen. Das Ergebnis dieser Besprechung wird den einzelnen Körperschaften vorgelegt werden.

Bei Erörterung der Frage, *wo* die konstituierende Versammlung stattfinden solle, erwähnt *Suess* dass nach privaten Nachrichten die Royal Society mit einer Konferenz in Deutschland einverstanden sei. Die Münchener Akademie schlägt Baden-Baden als Versammlungsort vor. *Diels* empfiehlt den Beschluss über den Ort bis nach Festsetzung der einladenden Akademie auszusetzen. *v. Christ* stellt den Antrag, die Einladungen sollen von der k. preuss. Academie in Berlin als der ältesten ausgehen. *Auwers* erklärt, dass Berlin hiezu bereit sei, was allseitig lebhaft begrüsst wird. Bezüglich der Beiziehung der Royal Society zur Theilnahme an der Einladung berichtet *Suess* nach privaten Mitteilungen eines Sekretärs derselben: Die Royal Society sei der Meinung, dass der internationale Charakter der Association am besten hervortreten würde, wenn die Royal Society nach einem deutschen Orte zur Vorbesprechung einlade und die erste Arbeitssitzung in Paris im Jahre 1900 stattfinden würde; sei das nicht thunlich, so habe die Royal Society den Wunsch, der Einladung ein Begleitschreiben beizulegen, damit die Korrespondenz der Royal Society mit den auswärtigen Akademien ununterbrochen aufrecht erhalten würde. Nach längerer Besprechung wird der Vorschlag *Ehlers'* angenommen, die Berliner Akademie zu ersuchen, den geeigneten Weg zur Beiziehung der Royal Society bei der Einladung zu finden. Als Ort für die konstituierende Herbstversammlung schlägt *Auwers* Wiesbaden als innerhalb Preussens gelegen vor. *Diels* unterstützt diesen Antrag aus anderen Gründen. Schliesslich wird Wiesbaden als Ort und als Termin die Zeit zwischen dem 8. und 14. October angenommen. Nach eingehendem Austausch der Anschauungen über die Frage, ob sich für die internationale Association die Einrichtung eines wechselnden Vorortes oder eines ständigen Bureaus bezw. eines geschäftsführenden Ausschusses empfehlen würde, kommt man dahin überein, dass die Berliner Akademie hierüber den einzuladenden Körperschaften rechtzeitig bestimmte Vorschläge mitteilen solle.

Nach einem Vorschlage der Royal Society soll ein gedrängter Entwurf des Planes oder doch der Hauptpunkte desselben sobald als möglich unter den beteiligten Akademien in Cirkulation gesetzt werden und die Grundlage für die Besprechungen der Oktober-Konferenz bilden.

Es wird beschlossen, dass die Berliner Akademie alsbald eine Ankündigung der Konferenz im Oktober an die auswärtigen Akademien ergehen lassen möge, mit dem Beifügen, dass das Programm für die Verhandlungen selbst nachfolgen werde.

Es besteht Übereinstimmung, dass auch nach der konstituierenden Versammlung in Wiesbaden jeder einzelnen Akademie der Rücktritt von der internationalen Association freistehe.

. . . . . .

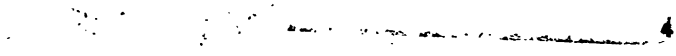
Es wird gewünscht, dass bereits die konstituierende Versammlung in Wiesbaden einige weitere, grössere Akademien für die Pariser Versammlung ins Auge fasse. Für die Aufnahme weiterer Mitglieder durch die Association sollen in Wiesbaden die Modalitäten festgestellt werden.

Jeder der Körperschaften soll es nach dem Wiener Programm freistehen, eine beliebige Anzahl von Vertretern zu den Zusammenkünften der internationalen Association zu entsenden; es wird dies als selbstverständlich erklärt, da nicht nach der Zahl der Anwesenden, sondern nach Akademien abgestimmt wird.

Nach dem Vorschlag der Royal Society soll die erste Arbeitsversammlung der Association i. J. 1900 stattfinden und zwar während der Weltausstellung in Paris.

Diesem Vorschlage wird zugestimmt.

Druckfertig erklärt 24. VI. 1902.]



THE BORROWER WILL BE CHARGED THE COST OF OVERDUE NOTIFICATION IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW.

CANCELLED
BOOK DUE WID
DEC 69 7 1 2
DEC 2 1980
1980

Widener Library
092 889 401